

Б. М. ЯВОРСКИЙ
А. А. ДЕТЛАФ
А. К. ЛЕБЕДЕВ

СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ

для инженеров и студентов вузов

*8-е издание,
переработанное и исправленное*

Москва
ОНИКС
Мир и Образование
2006

УДК 530(035)

ББК 22.3

Я22

Научный редактор *А. К. Лебедев*

Яворский Б. М.

Я22 Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. — 8-е изд., перераб. и испр. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2006. — 1056 с.: ил.

ISBN 5-488-00330-4 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 5-94666-260-0 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

В справочнике даны определения основных физических понятий, кратко сформулированы физические законы и сущность описываемых ими явлений, приведены математические понятия, необходимые для пользования справочником.

Данное издание существенно переработано с учетом новых достижений физической науки и вузовской программы курса физики.

Справочник адресован инженерно-техническим работникам, студентам и аспирантам вузов и втузов, преподавателям высшей и средней школы. Может быть полезен всем, кто интересуется физикой.

УДК 530(035)

ББК 22.3

ISBN 5-488-00330-4 (ООО «Издательство Оникс»)

ISBN 5-94666-260-0 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ISBN 985-13-5975-0 (ООО «Харвест»)

© Юрасова Л. Б., Юрасов В. В., Детлаф И. Н., наследники, 2006

© Лебедев А. К., глава VII.4, 2006

© Оформление переплета. ООО «Издательство Оникс», 2006

Предлагаемое издание «Справочника по физике» существенно переработано по сравнению с предыдущими изданиями и соответствует с современными представлениями физической науки. Заново написана глава "Элементарные частицы" с учетом последних открытий в области атомной и ядерной физики (эта глава написана А. К. Лебедевым). Однако общая структура и концептуальная основа справочника сохранены.

В книге даны определения физических понятий и принципов физической теории, сформулированы физические законы и приведены необходимые разъяснения. В справочнике отсутствует описание экспериментальных методов исследований, опытов и приборов и другой экспериментальный материал.

Математические знания, необходимые для пользования справочником, соответствуют уровню математического образования выпускника технического вуза и не превышают объема материала, приведенного в «Справочнике по математике для инженеров и учащихся втузов» И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева и «Справочнике по математике для научных работников и инженеров» Г. Корна и Т. Корна. В ряде случаев дано содержательное описание математических понятий (например понятия «группа»), широко используемых в современной физике.

В справочнике используется Международная система единиц (СИ), в которой ведётся преподавание общих курсов физики в технических вузах. В приложении приведены единицы физических величин в СИ и гауссовой системе СГС. В механике, в разделе о тепловых явлениях и во всех разделах физики, не связанных с вопросами электричества и магнетизма, обе системы практически равноправны, они отличаются только масштабами единиц основных физических величин. При изложении вопросов по электродинамике, атомной, ядерной и теоретической физике в научной и учебной литературе используется

система СГС из-за принципиальных неудобств системы СИ. Поэтому в приложении к справочнику дано сравнительное описание как системы СИ, так и гауссовой системы СГС.

Подробный предметный указатель с прямой ссылкой на страницу данного издания облегчит читателю справочника поиск сведений о нужном термине.

К сожалению, в процессе подготовки издания ушёл из жизни А. А. Детлаф (1922—2003).

Данное издание в определенном смысле подводит итог целой эпохе существования бренда «Справочник по физике для инженеров и студентов вузов» В. М. Яворского и А. А. Детлафа.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей: инженерно-технических работников, не специализирующихся в какой-либо области физики, студентов и аспирантов высших технических учебных заведений всех специальностей, преподавателей высших и средних специальных учебных заведений и учителей средней школы. Он может быть также использован лицами, интересующимися физикой, и принесет несомненную пользу для нового поколения читателей.

Раздел I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава I

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. Механикой называют науку о механическом движении и взаимодействии тел. *Механическое движение* — простейшая форма движения в природе, состоящая в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени. При этом под *телами* понимают макроскопические системы, состоящие из очень большого числа молекул или атомов, так что размеры этих систем во много раз больше межмолекулярных расстояний. В *классической ньютоновской механике* рассматриваются движения тел, происходящие со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме. Исследование движений тел, скорости которых соизмеримы со скоростью света, является предметом *релятивистской механики*, основанной на теории относительности.

2°. Вопросы внутреннего строения тел, природы и закономерностей их взаимодействий выходят за рамки механики, составляя содержание других разделов физики. В зависимости от свойств тел и постановки задачи в классической механике используются различные приближенные модели реальных тел: материальная точка, абсолютно твердое тело и др.

Материальной точкой называют тело, размеры которого несущественны в рассматриваемой задаче.

Абсолютно твердым телом (или просто твердым телом) называют тело, расстояния между любыми двумя

точками которого постоянны. Иначе говоря, размеры и форма абсолютно твердого тела не изменяются при его движении. Всякое твердое тело можно мысленно разбить на достаточно большое число элементарных частей так, чтобы размеры каждой из них были много меньше размеров всего тела. Поэтому абсолютно твердое тело часто рассматривают как *систему материальных точек*, жестко связанных друг с другом.

Абсолютно упругим телом называют тело, деформации которого пропорциональны вызывающим их силам и полностью исчезают после прекращения действия этих сил. *Абсолютно неупругим телом* называют тело, которое полностью сохраняет деформированное состояние после прекращения действия на тело сил, вызвавших это состояние.

3°. Классическая механика состоит из трех основных разделов: статики, кинематики и динамики. В *статике* исследуются законы сложения сил и условия равновесия твердых, жидких и газообразных тел. В *кинематике* приводится математическое описание механического движения тел безотносительно к тем причинам, которые вызывают тот или иной конкретный вид механического движения. В *динамике* рассматривается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение.

4°. *Системой отсчета* называют систему, снабженную часами и жестко связанную с абсолютно твердым телом, по отношению к которому определяют положения рассматриваемых тел в различные моменты времени. При этом под *часами* понимают любое устройство, используемое для измерения времени, или, точнее, промежутков времени между событиями, так как вследствие однородности времени начало его отсчета можно выбирать произвольно.

Систему отсчета, связанную с Землей, называют *лабораторной (земной) системой отсчета*.

В ньютоновской механике предполагается, что геометрические свойства пространства описываются геометрией Евклида, а ход времени одинаков во всех системах отсчета. Поэтому размеры тела не зависят от выбора системы отсчета так же, как и промежуток времени между любыми двумя событиями.

В механике в основном применяются следующие *системы координат*: *правая прямоугольная декарто-*

ва (рис. I.1.1, а), цилиндрическая (рис. I.1.1, б) и сферическая (рис. I.1.1, в). Формулы перехода от декартовых координат (x, y, z) точки M к цилиндрическим (ρ, φ, z) и обратно имеют вид

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho \cos \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z, \quad z = z.$$

Формулы перехода от декартовых координат (x, y, z) точки M к сферическим (r, φ, θ) и обратно имеют вид

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad z = r \cos \theta.$$

5°. Движение точки полностью задано, если указан однозначный закон изменения во времени t ее пространственных координат q_1, q_2 и q_3 (декартовых, цилиндрических или каких-либо других):

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Эти уравнения называют *кинематическими уравнениями движения точки*. Они эквивалентны одному векторному уравнению:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий начало отсчета с движущейся точкой $M(q_1, q_2, q_3)$. Если прямоугольные декартовы координаты точки M равны x, y, z , то

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты), совпадающие с положительными направлениями соответственно осей

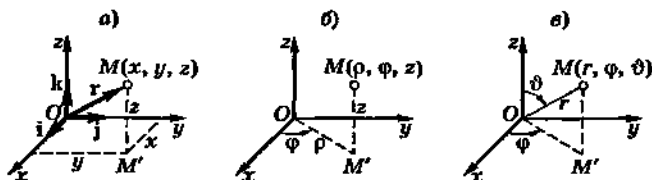


Рис. I.11

Ox , Oy и Oz , векторы xi , yj и zk — составляющие вектора r вдоль этих осей, а x , y и z — координаты (компоненты) вектора r в декартовой системе координат. Вследствие ортогональности этой системы координат проекции вектора r на оси координат равны соответствующим его координатам: x , y , z . Приращение dr радиуса-вектора за малый промежуток времени dt называют элементарным перемещением точки.

Обозначения в механике производных по времени от радиуса-вектора r и координат q_1, q_2, q_3 движущейся точки:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} \text{ и т. д.,}$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad \ddot{q}_i = \frac{d^2q_i}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

6°. *Траекторией* называют линию, описываемую движущейся точкой в пространстве. Уравнения

$$q_i = q_i(t),$$

где $i = 1, 2, 3$, выражают уравнение траектории в параметрической форме. Исключая из них время t , получаем два уравнения поверхности:

$$F_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad F_2(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

Линия пересечения этих поверхностей является траекторией.

Пример. Движение точки удовлетворяет условиям: $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$, $z = c \sin \omega t$, где a , b и c — отличные от нуля постоянные, а $\omega \neq 0$. Исключая время t , находим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{c} z.$$

Траектория точки — линия пересечения этих двух поверхностей.

Геометрическая форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Например, если по отношению к диску, равномерно вращающемуся вокруг неподвижной оси, точка равномерно движется вдоль одного из его радиусов, то по отношению к оси траектория этой точки представляет собой спираль Архимеда. В зависи-

мости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное движения* точки. Движение точки называют *плоским*, если все участки ее траектории лежат в одной плоскости. Обычно эту плоскость принимают за координатную плоскость $z = 0$, тогда плоское движение точки полностью определяется зависимостями от времени двух ее декартовых координат x и y или полярных координат ρ и φ .

В общем случае траектория точки — пространственная кривая. *Соприкасающейся плоскостью* в какой-либо точке M траектории называют предельное положение плоскости, проходящей через три точки N , M и P этой траектории, когда точки N и P неограниченно приближаются к точке M , оставаясь по разные стороны от нее. *Соприкасающейся окружностью* в точке M траектории называют предельное положение окружности, проходящей через три точки N , M и P траектории, когда выполняется вышеуказанный предельный переход. Соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости, а ее центр и радиус называют *центром кривизны* и *радиусом кривизны траектории* в точке M .

Прямую, проведенную из точки M в центр кривизны, называют *главной нормалью* к траектории в точке M . Главная нормаль и касательная к траектории в точке M взаимно перпендикулярны и лежат в соприкасающейся плоскости. Прямую, проведенную в точке M перпендикулярно соприкасающейся плоскости, называют *бинормалью*.

7°. *Длиной пути* s называют сумму длин всех участков траектории, пройденных точкой за рассматриваемый промежуток времени от t_0 до t . Если уравнения движения заданы в прямоугольных декартовых координатах, то

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt;$$

в цилиндрических координатах

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} dt;$$

в сферических координатах

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2} dt.$$

Положение движущейся точки в некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$ называют ее *начальным положением*. В силу произвольности начала отсчета времени обычно полагают $t_0 = 0$. Длина пути, пройденного точкой из начального положения, является скалярной функцией времени: $s = s(t)$.

За малый промежуток времени dt точка проходит элементарный путь длиной $ds = |dr| = v dt$, где dr — элементарное перемещение точки, а v — модуль ее скорости.

8°. *Механической системой* называют мысленно выделенную совокупность тел, которые в общем случае взаимодействуют как друг с другом, так и с внешними телами, не включенными в состав системы. Механическую систему можно рассматривать как совокупность материальных точек. Например, абсолютно твердое тело можно считать состоящим из непрерывно распределенных по его объему V материальных точек — малых частей этого тела объемом dV каждая.

Механическую систему называют *свободной*, если все входящие в нее материальные точки или тела могут занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости. В противном случае систему называют *несвободной*.

Связями (механическими связями) называют ограничения, наложенные на положение или движение рассматриваемой механической системы в пространстве. Связи называют *внутренними*, если они не мешают системе свободно перемещаться после того, как она внезапно отвердеет. Все остальные связи называют *внешними*.

Уравнениями связей называют уравнения, которым должны удовлетворять координаты и скорости (первые

производные от координат по времени) точек механической системы в соответствии с наложенными на нее связями.

Связь называют *удерживающей* (неосвобождаемой или *двухсторонней*), если соотношения между координатами и скоростями точек системы, обусловленные этой связью, выражаются аналитически в форме уравнения вида

$$\Phi(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0,$$

где t — время, x_i, y_i, z_i — координаты i -й точки системы ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}.$$

Примером удерживающих связей могут служить внутренние связи, обуславливающие неизменность расстояний между точками абсолютно твердого тела.

Связь называют *неудерживающей* (освобождаемой или *односторонней*), если ограничения, накладываемые ею на механическую систему, выражаются аналитически в виде неравенства

$$\Phi_1(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) \geq 0.$$

Такого рода связь осуществляется, например, при движении тела, подвешенного на гибкой нерастяжимой нити, а также при движении тела по горизонтальной плоскости.

Связи называют *стационарными*, если соответствующие им уравнения связей не содержат явно времени. В противном случае связи называют *нестационарными*.

Связь называют *геометрической*, если она накладывает ограничения только на положения точек системы в пространстве и выражается аналитически в виде

$$f(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, t) = 0.$$

Связи называют *дифференциальными*, если они накладывают ограничения не только на положения точек системы, но и на их скорости:

$$\varphi(\dots, x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \dots, t) = 0.$$

Связи называют *голономными*, если соответствующие им уравнения не содержат производных от координат точек системы или могут быть приведены к такому виду путем интегрирования. В противном случае связи называют *неголономными*. Примером неголономной связи может служить условие равенства нулю скорости точки касания шара, катящегося без скольжения по неподвижной шероховатой плоскости.

Механическую систему называют *голономной*, если она подчинена только голономным связям. Если в числе связей имеется хотя бы одна неголономная связь, то механическую систему называют *неголономной*.

2. СКОРОСТЬ ТОЧКИ

1°. *Скоростью (или мгновенной скоростью)* называют векторную величину $\mathbf{v}$, равную первой производной по времени от радиуса-вектора движущейся точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Скорость направлена по касательной к траектории в сторону движения точки и равна первой производной от длины пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Проекции скорости v_x , v_y и v_z на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки:

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}.$$

Отсюда

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

В цилиндрических координатах

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2};$$

в сферических координатах

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\phi}\sin\theta)^2}.$$

2°. В случае плоского движения, заданного в полярных координатах, скорость v точки $M(\rho, \varphi)$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — радиальную (лучевую) скорость v_ρ и трансверсальную (поперечную) скорость v_φ (рис. 1.1.2):

$$v = v_\rho + v_\varphi$$

причем

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \dot{\varphi}(k \times \rho),$$

где ρ — полярный радиус-вектор, проведенный из полюса O в точку M , а k — единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости движения точки таким образом, что из его конца вращение радиуса-вектора ρ в сторону увеличения угла φ видно происходящим против часовой стрелки (на рис. 1.1.2 вектор k направлен из-за чертежа перпендикулярно к его плоскости). Запись $k \times \rho$ означает векторное произведение векторов k и ρ . Проекции радиальной и трансверсальной скоростей точки M на направления соответственно радиуса-вектора ρ и прямой, проведенной перпендикулярно к ρ в сторону возрастания угла φ :

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}.$$

Пример. Движение точки задано уравнениями:

$$x = at \cos bt, \quad y = at \sin bt \quad \text{и} \quad z = 0,$$

где a и b — постоянные коэффициенты. В полярных координатах уравнения движения точки будут: $\rho = at$ и $\varphi = bt$. Следовательно, $\dot{\rho} = a$, $\dot{\varphi} = b$,

$$v_\rho = a, \quad v_\varphi = abt \quad \text{и} \quad v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = a \sqrt{1 + b^2 t^2}.$$

3°. Движение точки называют *равномерным*, если модуль ее скорости не зависит от времени ($v = \text{const}$). Длина пути, пройденного равномерно движущейся точкой, является линейной функцией времени:

$$s = v(t - t_0).$$

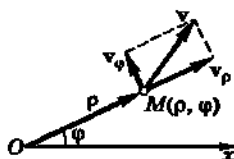


Рис. 1.1.2

4°. *Средней путевой скоростью* точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ называют скалярную величину $v_{\text{ср}}$, равную отношению длины пути Δs , пройденного точкой за этот промежуток времени, к его продолжительности Δt :

$$v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ скорость $v_{\text{ср}}$ совпадает с модулем скорости точки в момент времени t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t).$$

В случае равномерного движения $v_{\text{ср}} = v$.

Вектором средней скорости точки $v_{\text{ср}}$ в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ называют отношение приращения радиуса-вектора $\Delta \mathbf{r}$ точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt :

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор средней скорости совпадает с вектором скорости точки в момент времени t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

При равномерном прямолинейном движении точки $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \mathbf{v}$. Модуль вектора $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ совпадает со средней путевой скоростью $v_{\text{ср}}$ только в тех случаях, когда точка движется прямолинейно с неизменной по направлению скоростью v . Во всех остальных случаях $|\mathbf{v}_{\text{ср}}| < v_{\text{ср}}$.

5°. *Секторной (секториальной) скоростью* точки по отношению к какому-либо полюсу называют скалярную величину σ , равную первой производной по времени от площади S поверхности, очерчиваемой радиусом-вектором этой точки, проведенным из полюса:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2} r v \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и скорость точки, а r и v — модули этих векторов. Если движение точки происхо-

дит в плоскости, а полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат xOy , взятой на этой плоскости, то

$$\sigma = \frac{1}{2} (xv_y - yv_x) = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi},$$

где ρ и φ — полярные координаты точки.

3. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

1°. Ускорением (или мгновенным ускорением) называют векторную величину $\mathbf{a}^{1)}$, характеризующую быстроту изменения скорости движущейся точки и равную первой производной от скорости по времени, или второй производной от радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, проходящей через главную нормаль и касательную к траектории, и направлен в сторону вогнутости траектории.

Проекции a_x , a_y , a_z ускорения на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

В цилиндрических координатах

$$a = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2};$$

в сферических координатах

$$a = [(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2)^2 + (2r\dot{\varphi} \sin \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)^2 + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)^2]^{1/2}.$$

¹⁾ В курсах теоретической механики ускорение обозначают буквой $\mathbf{w}$.

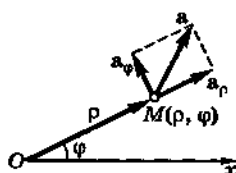


Рис. 1.1.3

2°. В случае плоского движения, заданного в полярных координатах, ускорение a точки $M(\rho, \varphi)$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — радиальное ускорение a_ρ и тангенциальное ускорение a_φ (рис. 1.1.3):

$$a = a_\rho + a_\varphi,$$

причем

$$a_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \frac{\rho}{\rho}, \quad a_\varphi = (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \left(k \times \frac{\rho}{\rho} \right),$$

где смысл векторов ρ и k такой же, как в формулах для a_ρ и a_φ . Проекция радиального и тангенциального ускорений точки на направления, соответственно, полярного радиуса-вектора ρ и прямой, проведенной перпендикулярно к ρ в сторону возрастания угла φ :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}.$$

Пример. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями: $\rho = a + bt$, $\varphi = ct$, где a , b и c — постоянные коэффициенты;

$$\dot{\rho} = b, \quad \dot{\varphi} = c \text{ и } \ddot{\rho} = \ddot{\varphi} = 0.$$

Следовательно,

$$a_\rho = -c^2(a + bt), \quad a_\varphi = 2bc.$$

$$\omega = \sqrt{\omega_\rho^2 + \omega_\varphi^2} = c\sqrt{c^2(a + bt)^2 + 4b^2}.$$

3°. В соприкасающейся плоскости, проведенной в произвольной точке траектории, вектор ускорения a можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие a_n и a_τ :

$$a = a_n + a_\tau.$$

Составляющую a_n , направленную вдоль главной нормали к центру кривизны траектории, называют

нормальным ускорением, а составляющую a_τ , направленную вдоль касательной к траектории, называют касательным ускорением. Их проекции на направления единичных векторов главной нормали n и касательной $\tau = \frac{v}{v}$ равны

$$a_n = \frac{v^2}{R} \text{ и } a_\tau = \frac{d}{dt} |v|,$$

так что

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \dot{v}^2},$$

где v — модуль скорости, а R — радиус кривизны траектории. Нормальное ускорение a_n всегда направлено к центру кривизны траектории.

4°. Движение точки называют *ускоренным*, если модуль ее скорости возрастает с течением времени, т. е. $a_\tau > 0$. Движение точки называют *замедленным*, если модуль ее скорости убывает с течением времени, т. е. $a_\tau < 0$. В случае равномерного движения $a_\tau = 0$. При ускоренном движении вектор a_τ совпадает по направлению с вектором v скорости точки, а при замедленном он направлен в сторону, противоположную направлению вектора v . Величины a_τ и a_n характеризуют быстроту изменения соответственно модуля и направления скорости движущейся точки. Движение, в котором числовое значение касательного ускорения постоянно, $a_\tau = \text{const}$, называют *равнопеременным* (равноускоренным, если $a_\tau > 0$, и равнозамедленным, если $a_\tau < 0$).

5°. Средним ускорением точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ называют вектор a_{cp} , равный отношению приращения Δv скорости v точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt :

$$a_{cp}(t, \Delta t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ среднее ускорение совпадает с мгновенным ускорением в момент времени t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{cp}}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a(t).$$

4. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

1°. *Поступательным движением твердого тела* называют такое его движение, при котором прямая, соединяющая любые две точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению. Все точки тела, движущегося поступательно в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения, а их траектории полностью совмещаются при параллельном переносе. Поэтому кинематическое рассмотрение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения любой его точки. В самом общем случае поступательно движущееся твердое тело обладает тремя степенями свободы, которые соответствуют независимым движениям тела вдоль трех взаимно перпендикулярных осей координат.

2°. Движение твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называют *вращением* (*вращательным движением*) вокруг неподвижной прямой AB , называемой *осью вращения*. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости — перпендикулярны к ней. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, обладает одной степенью свободы: его положение полностью определяется заданием угла φ поворота из некоторого начального положения.

Движение твердого тела, при котором одна из его точек остается неподвижной, называют *вращением вокруг неподвижной точки* (или *движением твердого тела вокруг неподвижной точки*). Это движение называют также *сферическим движением*, так как траектории всех точек тела лежат на концентрических сферах с центром в неподвижной точке тела. В каждый момент времени вращение твердого тела вокруг неподвижной

точки O можно рассматривать как вращение этого тела вокруг *мгновенной оси вращения*, проходящей через неподвижную точку O .

3°. Мерой перемещения твердого тела при его вращении вокруг неподвижной точки (или оси) служит *вектор $d\varphi$ элементарного поворота*, равный по модулю элементарному углу $d\varphi$ поворота тела за малый промежуток времени dt и направленный вдоль мгновенной оси вращения в ту сторону, откуда элементарный поворот тела виден происходящим против хода часовой стрелки.

Мерой быстроты вращения тела служит *вектор угловой скорости ω* , равный отношению вектора $d\varphi$ элементарного поворота тела к малому промежутку времени dt , за который этот поворот совершается: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Вектор ω направлен вдоль мгновенной оси вращения в ту же сторону, что и вектор $d\varphi$.

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, модуль угловой скорости равен модулю производной от угла поворота φ по времени: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, а направление вектора ω вдоль оси вращения совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом (рис. 1.1.4).

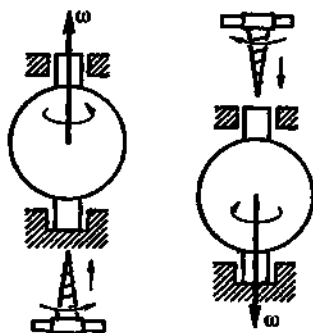


Рис. 1.1.4

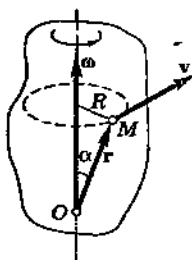


Рис. 1.1.5

4°. Скорость v произвольной точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 1.1.5), равна

$$v = \omega \times r \text{ и } v = \omega r \sin \alpha = \omega R,$$

где r — радиус-вектор, проведенный в точку M из любой точки O оси вращения тела, а $R = r \sin \alpha$ — расстояние от оси вращения до точки M . Эти же соотношения верны и в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки O .

Проекции вектора v на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат равны

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, v_y = \omega_z x - \omega_x z, v_z = \omega_x y - \omega_y x,$$

где x, y и z — проекции вектора r на эти оси.

Периодом обращения тела называют промежуток времени T , в течение которого тело, вращаясь вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω , поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величину $n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ называют частотой вращения.

5°. Мгновенная ось вращения тела, движущегося вокруг неподвижной точки O (начала координат), представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Поэтому для точек мгновенной оси вращения справедливо уравнение: $v = \omega \times r = 0$, т. е. радиус-вектор r любой точки M этой оси параллелен вектору ω .

6°. Тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, обладает тремя степенями свободы: его положение относительно неподвижной системы отсчета полностью определяется заданием трех координат (например, двух направляющих косинусов какой-либо оси, проходящей через неподвижную точку тела и жестко связанной с ним, а также угла поворота тела вокруг этой оси). В качестве независимых координат обычно вы-

бирают три угла Эйлера ψ , θ и φ (рис. I.1.6). Оси Ox , Oy и Oz — оси неподвижной прямоугольной правой декартовой системы координат; Ox' , Oy' и Oz' — оси аналогичной подвижной системы координат; i, j, k и i', j', k' — единичные векторы координатных осей; O — неподвижный центр; линию ON пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$ называют линией

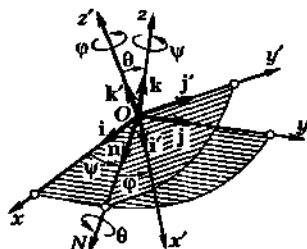


Рис. I.1.6

узлов. Линия узлов перпендикулярна к плоскости zOz' , а единичный вектор n , определяющий положительное направление на линии узлов, совпадает по направлению с векторным произведением $k \times k'$, т. е. тройка векторов k, k' и n имеет ту же ориентацию, что и орты координатных осей.

Угол ψ между осями Ox и ON называют *углом прецессии*. Угол θ между осями Oz и Oz' называют *углом нутации*. Угол φ между осями ON и Ox' называют *углом чистого вращения*. Углы ψ , θ , и φ отсчитываются в направлениях, которые определяются правилом правого винта, т. е. соответствуют изображенным на рис. I.1.6 направлениям вращения вокруг осей: Oz — для угла ψ , ON — для угла ω и Oz' — для угла φ . Углы Эйлера изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Проекции вектора ω угловой скорости тела на оси неподвижной (x, y, z) и подвижной (x', y', z') систем координат удовлетворяют *кинематическим уравнениям Эйлера* для твердого тела:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi,$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta,$$

$$\omega_{x'} = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\omega_{y'} = -\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

7°. *Угловым ускорением* называют вектор ε , равный первой производной от вектора угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения во времени вектора угловой скорости тела. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси вектор ε направлен также вдоль этой оси, так что проекция ε на направление вектора ω равна

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Вектор ε совпадает по направлению с ω в случае ускоренного вращения ($\varepsilon_{\omega} = \frac{d\omega}{dt} > 0$) и противоположен ему по направлению в случае замедленного вращения ($\varepsilon_{\omega} = \frac{d\omega}{dt} < 0$).

8°. Ускорение произвольной точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O (начала координат), равно

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega \times r) = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r).$$

Вектор $a_{вр} = \varepsilon \times r$, направленный перпендикулярно к плоскости, образуемой векторами ε и r , называют *вращательным ускорением* точки M тела. Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то $a_{вр}$ совпадает с касательным ускорением a_{τ} точки M .

Вектор $a_{ц} = \omega \times (\omega \times r)$, направленный перпендикулярно мгновенной оси вращения тела от точки M к оси, называют *осеостремительным ускорением* точки M тела. Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то $a_{ц}$ совпадает с нормальным ускорением a_n точки M .

9°. В самом общем случае свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Его положение в пространстве определяется тремя координатами x_0, y_0, z_0 какой-либо произвольно выбранной точки O' тела, называемой *поллюсом*, и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ , характеризующими положение тела по отношению к пря-

моуговой декартовой системе координат $O'\xi\eta\zeta$, оси которой параллельны соответствующим осям основной (неподвижной) системы координат $Oxyz$, а начало находится в полюсе O' (рис. 1.1.7). Соответственно движение тела можно рассматривать как совокупность двух одновременно совершающихся движений — поступательного со скоростью $v_0 = \frac{dr_0}{dt}$ полюса O' и вращения

вокруг полюса с угловой скоростью ω , которая не зависит от выбора полюса.

На рис. 1.1.7 показана жестко связанная с телом подвижная система координат $O'x'y'z'$. Радиус-векторы произвольной точки M тела в неподвижной и подвижной системах координат связаны соотношением: $r = r_0 + r'$. Скорость v точки M тела равна:

$$v = \frac{dr'}{dt} + \frac{dr_0}{dt} = v_0 + \omega \times r',$$

где $v_0 = \frac{dr_0}{dt}$ — скорость поступательного движения тела.

10°. Некоторые простейшие случаи движения твердого тела:

а) $\omega = 0$ — тело движется поступательно со скоростью v_0 ;

б) $v_0 = 0$ — тело вращается вокруг неподвижной точки (полюса O');

в) $v_0 = 0$, а вектор ω все время направлен вдоль одной и той же неподвижной прямой — тело вращается вокруг неподвижной оси;

г) вектор ω все время направлен вдоль одной и той же неподвижной прямой, а вектор v_0 параллелен ω —

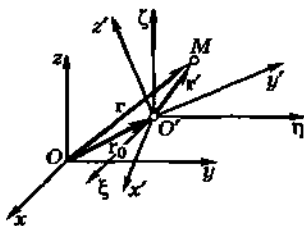


Рис. 1.1.7

такое движение тела называют *винтовым движением твердого тела* (например, движение винта при его завинчивании);

д) вектор $\mathbf{v}_0$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\omega}$, который все время направлен вдоль одной и той же неподвижной прямой — такое движение твердого тела называют *плоскопараллельным*, или *плоским*, так как все точки тела движутся в параллельных плоскостях, ортогональных вектору $\boldsymbol{\omega}$.

5. АБСОЛЮТНОЕ, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЯ

1°. *Абсолютным движением точки* называют ее движение по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета, условно принимаемой за неподвижную и называемой *абсолютной системой отсчета*. *Относительным движением точки* называют ее движение по отношению к подвижной системе отсчета, которую также называют *относительной системой отсчета*. *Переносным движением* называют абсолютное движение подвижной (относительной) системы отсчета.

Выбор абсолютной и относительной систем отсчета условен. Он зависит от постановки задачи и подчинен основной цели — максимальному упрощению ее решения.

2°. Связь между радиусами-векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ движущейся точки M , проведенными соответственно из начала O неподвижной системы отсчета (x, y, z) и начала O' подвижной системы (x', y', z') , имеет вид (см. рис. I.1.7)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'),$$

где x' , y' и z' — проекции $\mathbf{r}'$ на оси подвижной системы, а $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ — орты этих осей.

Абсолютная скорость $\mathbf{v}_a$ точки $M(\mathbf{r})$ равна (ход времени во всех системах отсчета одинаков, так что $t' = t$)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \\ + \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Относительная скорость v_r точки $M(r')$ равна

$$v_r = \frac{dx'}{dt} i' + \frac{dy'}{dt} j' + \frac{dz'}{dt} k' = \frac{dr'}{dt},$$

где $\frac{dr'}{dt}$ — относительная производная по времени от радиуса-вектора r' , вычисляемая в предположении постоянства направлений ортов i' , j' и k' подвижной системы отсчета.

Изменение во времени ортов i' , j' и k' может быть обусловлено только вращением подвижной системы координат. Если угловая скорость этого вращения равна ω , то

$$\frac{di'}{dt} = \omega \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \omega \times k'.$$

Следовательно¹⁾,

$$v_a = v_0 + \omega \times r' + v_r,$$

где $v_0 = \frac{dr_0}{dt} = \dot{r}_0$ — скорость поступательного движения подвижной системы, а

$$v_e = v_0 + \omega \times r'$$

— переносная скорость точки M , равная абсолютной скорости той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M .

Если начала подвижной и неподвижной систем отсчета совпадают, то

$$r' = r, r_0 = 0 \text{ и } \frac{dr}{dt} = \frac{\bar{d}r}{dt} + \omega \times r.$$

Абсолютная скорость движения точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей (закон сложения скоростей):

$$v_a = v_e + v_r$$

¹⁾ Эта связь между абсолютной и относительной производными по времени справедлива не только для радиуса-вектора r , но и для любого вектора, приложенного в общем начале подвижной и неподвижной систем координат.

3°. Абсолютное ускорение a_a точки $M(r)$ равно

$$a_a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \varepsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r') + \\ + 2\omega \times v_r + \frac{dv_r}{dt}.$$

Относительное ускорение a_r точки $M(r')$ равно

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2 x'}{dt^2} i' + \frac{d^2 y'}{dt^2} j' + \frac{d^2 z'}{dt^2} k'.$$

Переносное ускорение a_e точки M равно абсолютному ускорению той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M :

$$a_e = a_0 + \varepsilon \times r' + \omega \times (\omega \times r'),$$

где $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$ — абсолютное ускорение подвижной системы в ее поступательном движении.

Кориолисово ускорение a_k равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки:

$$a_k = 2\omega \times v_r.$$

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме ее переносного, кориолисова и относительного ускорений:

$$a_a = a_e + a_k + a_r.$$

Кориолисово ускорение равно нулю в трех случаях: а) подвижная система отсчета движется поступательно ($\omega = 0$); б) точка покоится по отношению к подвижной системе отсчета ($v_r = 0$); в) точка движется параллельно оси вращения подвижной системы, т. е. векторы v_r и ω параллельны друг другу.

Пример. Точка равномерно движется по скоростью v_1 вдоль радиуса плоского диска, который в свою

очередь равномерно вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Скорости и ускорения произвольной точки $M(r')$ диска равны (рис. I.1.8):

$$v_0 = 0, \quad v_e = \omega_2 \times r', \quad v_r = v_1,$$

$$v_a = \omega_2 \times r' + v_1, \quad v_a = \sqrt{(\omega_2 r')^2 + v_1^2},$$

$$a_e = \omega_2 \times (\omega_2 \times r') = -\omega_2^2 r',$$

$$a_k = 2\omega_2 \times v_1, \quad a_r = 0,$$

$$a_a = -\omega_2^2 r' + 2(\omega_2 \times v_1),$$

$$a_a = \omega_2 \sqrt{(\omega_2 r')^2 + 4v_1^2}.$$

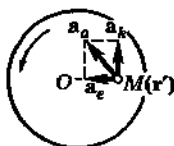
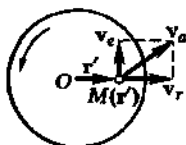


РИС. I.1.8

6. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ СЛОЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1°. Тело одновременно участвует в нескольких поступательных движениях со скоростями $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$. Его результирующее движение является также поступательным со скоростью v , равной векторной сумме скоростей $v_1, v_2, \dots, v_k$:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_k = \sum_{i=1}^k v_i.$$

2°. Тело одновременно участвует в двух вращательных движениях: вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг некоторой оси A_1B_1 , которая в свою очередь вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси A_2B_2 . Рассматривая первое вращение как относительное движение, а второе — как переносное, получаем следующие значения переносной v_e , относительной v_r и абсолютной v' скоростей произвольной точки M тела:

$$v_e = \omega_2 \times r',$$

$$v_r = \omega_1 \times r' = \omega_1 \times r - \omega_1 \times r_0,$$

$$v_a = v_e + v_r = (\omega_1 + \omega_2) \times r - \omega_1 \times r_0,$$

где r, r' и r_0 — радиусы-векторы, имеющие тот же смысл, что и на рис. I.1.7.

3°. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей A_1B_1 и A_2B_2 . Совместив начала подвижной и неподвижной систем отсчета с точкой пересечения осей (рис. 1.1.9), получим:

$$r_0 = 0 \text{ и } v = (\omega_1 + \omega_2) \times r.$$

Одновременное вращение тела вокруг двух пересекающихся осей A_1B_1 и A_2B_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 в каждый момент времени эквивалентно вращению этого тела вокруг мгновенной оси AB с угловой скоростью

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

4°. Сложение вращений вокруг параллельных осей ($\omega_1 \neq -\omega_2$). Проведем вектор r_0 перпендикулярно к осям вращения (рис. 1.1.10) и положим $r = r_1 + d$, где $d = \frac{r_0}{k+1}$, причем $k = \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$, если векторы ω_2 и ω_1 направлены

ны в одну и ту же сторону, и $k = -\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$, если векторы на-

правлены в противоположные стороны. Тогда $\omega = k\omega_1$, $\omega_1 + \omega_2 = (k+1)\omega_1$ и $v = (\omega_1 + \omega_2) \times r_1$. Одновременное вращение тела вокруг двух параллельных осей A_1B_1 и A_2B_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \neq -\omega_2$) в каждый момент времени эквивалентно вращению с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг параллельной им мгно-

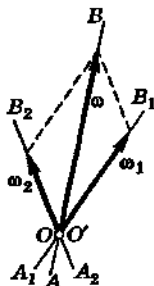


Рис. 1.1.9

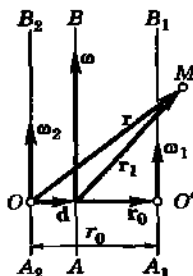


Рис. 1.1.10

венной оси AB , положение которой относительно осей A_1B_1 и A_2B_2 определяется указанным выше значением вектора $\mathbf{d}$.

Вращение тела вокруг параллельных осей с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 — $-\omega_1$ называют *парой вращений*. В этом случае результирующая скорость всех точек тела одинакова и равна $\mathbf{v} = -\omega_1 \times \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, соединяющий точки O и O' осей (рис. I.1.10). Тело движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}$, направленной перпендикулярно плоскости, в которой находятся векторы ω_1 и ω_2 .

Глава 2

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

1°. Первый закон Ньютона: всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.

Этот закон называют *законом инерции*, а движение материальной точки, свободной от внешних воздействий, — *движением по инерции*.

2°. Всякое механическое движение *относительно*: его характер зависит от выбора системы отсчета. В одно и то же время исследуемое тело по отношению к одной системе отсчета может покоиться, по отношению к другой — двигаться равномерно и прямолинейно, а по отношению к третьей — двигаться с ускорением. Поэтому закон инерции справедлив не во всякой системе отсчета. Так, например, тела, неподвижно лежащие на гладком полу равномерно и прямолинейно движущегося относительно Земли железнодорожного вагона, начинают двигаться по полу всякий раз, когда движение вагона становится ускоренным.

3°. *Инерциальными системами отсчета* называют те системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции. С весьма большой степенью точ-

ности можно считать, что такого рода системой отсчета является *гелиоцентрическая* система отсчета, начало которой совпадает с центром инерции солнечной системы.

Любая система отсчета, покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы, сама является инерциальной. Наоборот, всякая система, движущаяся ускоренно по отношению к инерциальной системе, является *неинерциальной*.

4°. Система отсчета, жестко связанная с Землей (*геоцентрическая*, или *лабораторная* система отсчета), неинерциальна, главным образом, вследствие суточного вращения Земли. Экспериментальным подтверждением этого и одним из доказательств существования суточного вращения Земли является опыт с маятником Фуко — тяжелым телом (обычно шаром), подвешенным на длинной нити и могущим свободно качаться в любом направлении практически без трения в подвесе. Положение плоскости качаний такого маятника по отношению к инерциальной системе отсчета должно быть неизменным: на маятник действует сила тяжести и реакция нити, лежащие в этой плоскости. Однако по отношению к земной системе отсчета плоскость качаний маятника Фуко постепенно поворачивается с угловой скоростью

$$\omega_{\text{м}} = \omega \sin \varphi,$$

где ω — угловая скорость суточного вращения Земли, а φ — географическая широта места наблюдения. Максимальное ускорение точек земной поверхности не превосходит 0,5% ускорения свободного падения. Поэтому в большинстве практических задач геоцентрическую систему отсчета можно приближенно считать инерциальной.

2. СИЛА

1°. *Сила* — векторная величина, являющаяся мерой действия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью задана, если указаны ее численное значение, направление и точка приложения. Взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при ударе и трении), так и между удаленными телами.

Взаимодействие между удаленными телами осуществляется посредством связанных с ними гравитационных и электромагнитных полей.

Примечание. В ньютоновской механике предполагается, что скорость передачи действия частиц и тел бесконечно велика, т. е. что эти действия передаются мгновенно.

Поле, действующее на материальную точку с силой F , называют *стационарным полем*, если оно не изменяется с течением времени, т. е. $\frac{dF}{dt} = 0$.

Взаимодействие между телами, как это следует из первого закона Ньютона, является причиной изменения состояния их движения. Кроме того, оно вызывает также деформацию тел. Измеряя деформации x_1 и x_2 одного и того же упругого тела под действием двух одинаково направленных сил F_1 и F_2 , приложенных в одной и той же точке, можно сравнивать числовые значения этих сил:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Этот метод, основанный на законе Гука, реализуется в пружинных весах и динамометрах.

2°. Действие на материальную точку A (рис. 1.2.1) нескольких тел с силами $F_1, F_2, \dots, F_k$ эквивалентно действию одной силы, называемой *равнодействующей силой* и равной векторной сумме этих сил:

$$F = \sum_{i=1}^k F_i.$$

Равнодействующая сила представляет собой замыкающую многоугольника, построенного на силах $F_1, F_2, \dots, F_k$ (рис. 1.2.2). Проекция этой силы на оси де-

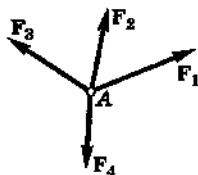


Рис. 1.2.1

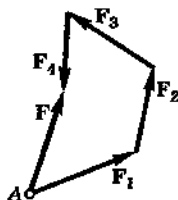


Рис. 1.2.2

картовой системы координат равны алгебраическим суммам соответствующих проекций всех сил F_i :

$$F_x = \sum_{i=1}^k F_{ix}, \quad F_y = \sum_{i=1}^k F_{iy}, \quad F_z = \sum_{i=1}^k F_{iz}.$$

Линией действия силы F_i называют прямую, вдоль которой направлен вектор F_i . Действие силы на абсолютно твердое тело не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия (предполагается, что точки приложения силы либо принадлежат телу, либо жестко связаны с ним). Следовательно, силы, приложенные к абсолютно твердому телу, можно рассматривать как скользящие векторы.

3°. Системой сходящихся сил (пучком сил) называют совокупность сил, приложенных к одному и тому же абсолютно твердому телу так, что их линии действия пересекаются в одной точке O (рис. 1.2.3). Переносим эти силы вдоль линий их действия в точку O , получим систему сил, приложенных в одной и той же точке и эквивалентных одной равнодействующей силе F , которая приложена в той же точке O и равна векторной сумме

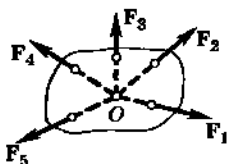


Рис. 1.2.3

всех сил системы: $F = \sum_{i=1}^k F_i$.

4°. Моментом M_i силы относительно точки O называют векторное произведение радиуса-вектора r_i , проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы F_i :

$$M_i = r_i \times F_i.$$

Проекции M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} вектора M_i на оси прямоугольной декартовой системы координат с началом в точке O связаны с проекциями на эти оси векторов r_i и F_i соотношениями:

$$M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy},$$

$$M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz},$$

$$M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix},$$

где x_i , y_i , z_i — координаты точки приложения силы F_i .

Моментом силы относительно оси называют величину, равную проекции на эту ось вектора момента силы относительно какой-либо точки той же оси (от выбора точки не зависит).

5°. Для произвольной системы сил $F_1, F_2, \dots, F_k$, действующих на механическую систему, вводят понятия главного вектора и главного момента. *Главным вектором системы сил* называют вектор F , равный сумме всех сил системы:

$$F = \sum_{i=1}^k F_i.$$

Главным моментом системы сил относительно какой-либо точки O называют вектор M , равный сумме моментов всех k сил системы относительно той же точки:

$$M = \sum_{i=1}^k M_i = \sum_{i=1}^k r_i \times F_i.$$

Точку O называют *центром приведения системы сил*. Главные моменты M и M' одной и той же системы сил для двух различных центров приведения O и O' связаны соотношением:

$$M' = M - r_{OO'} \times F,$$

где F — главный вектор системы сил, а $r_{OO'}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку O' .

Момент системы сил относительно оси равен проекции на эту ось главного момента системы сил относительно любой точки той же оси.

В самом общем случае действие на абсолютно твердое тело произвольной системы сил эквивалентно действию на тело главного момента M системы сил и главного вектора F системы сил, приложенного в центре приведения — точке O . Выбор этой точки совершенно произволен и влияет лишь на величину вектора главного момента M . В случае поступательного движения абсолютно твердого тела главный момент всех сил, приложенных к телу, относительно его центра равен нулю.

6°. При рассмотрении какой-либо системы материальных точек или тел силы, действующие на некоторую точку (тело) системы со стороны других точек (тел), входящих в эту систему, называют *внутренними силами*. Силы же, обусловленные действием материальных точек или тел, не входящих в рассматриваемую систему, называют *внешними силами*.

Замкнутой системой называют такую систему тел, на каждое из которых не действуют внешние тела.

7°. *Принцип освобождаемости*: всякую несвободную механическую систему можно рассматривать как свободную, если отбросить наложенные на нее связи и заменить действие на систему тел, осуществляющих связи, соответствующими силами, называемыми *реакциями связей*. Например, при перемещении тела по плоскости ограничения, наложенные на движение тела, могут быть полностью учтены путем введения нормальной реакции плоскости.

В отличие от реакций связей, все остальные силы (внешние и внутренние), приложенные к механической системе, называют *активными силами*.

3. МАССА ТЕЛА

1°. *Массой тела* в классической (ньютоновской) механике называют скалярную величину, являющуюся мерой его инерционных свойств и источником гравитационного взаимодействия.

В ньютоновской механике масса — величина положительная и аддитивная, т. е. масса m любой системы материальных точек (например, твердого тела) равна сумме масс m_i всех n точек этой системы:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i.$$

Кроме того, в ньютоновской механике считается, что:

а) масса тела не зависит ни от состояния его движения, ни от местоположения тела в пространстве, ни от того, действуют на него другие тела или нет;

б) справедлив *закон сохранения массы*: масса механической системы не изменяется с течением време-

ни, если нет обмена веществом между системой и внешними телами (внешней средой).

Инертность материальной точки проявляется в том, что под действием внешней силы эта точка приобретает конечное по величине ускорение, а в отсутствие внешних воздействий — сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения по отношению к инерциальной системе отсчета. Масса, входящая в выражение второго закона Ньютона, характеризует инерционные (инертные) свойства материальной точки и называется ее *инертной массой*.

Масса материальной точки, входящая в выражение закона всемирного тяготения, характеризует гравитационные свойства этой точки и называется ее *гравитационной (тяжелой) массой*.

На основании весьма точных экспериментов установлено, что для всех тел отношения их инертных масс к гравитационным одинаковы. Поэтому при соответствующем выборе величины гравитационной постоянной можно считать, что для любого тела его инертная и гравитационная массы равны друг другу и связаны с силой

тяжести P этого тела соотношением $m = \frac{P}{g}$, где g — ус-

корение свободного падения. Как показывает опыт, в одной и той же точке наблюдения ускорения свободного падения для всех тел одинаковы. Поэтому отношение масс двух тел равно отношению их сил тяжести:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

На этом основано сравнение масс тел с по-

мощью рычажных весов. 2°. *Плотностью тела* ρ называют отношение массы dm малого элемента тела к его объему dV : $\rho = \frac{dm}{dV}$.

Плотность тела зависит от его материала и термодинамического состояния.

Масса всего тела равна

$$m = \int_V \rho dV,$$

где интегрирование распространено на весь объем V тела. В случае однородного тела его плотность одинакова по всему объему V и масса тела $m = \rho V$.

Средней плотностью $\rho_{\text{ср}}$ неоднородного тела называют отношение массы тела к его объему:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}.$$

3°. *Центром масс (центром инерции)* системы материальных точек называют точку $C(x_C, y_C, z_C)$, радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ которой связан с массами m_i и радиусами-векторами $\mathbf{r}_i$ всех n точек системы соотношением

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

так что

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \\ z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m m_i z_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Координаты центра масс тела равны:

$$x_C = \frac{1}{m} \int_m x dm, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_m y dm, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_m z dm, \\ m = \int_V \rho dV.$$

Если тело однородное, то

$$x_C = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV.$$

В прямоугольных декартовых координатах

$$dV = dx dy dz, \quad \int_V x dV = \iiint_V x dx dy dz \text{ и т. д.}$$

4°. *Импульсом (количеством движения)* материальной точки называют вектор $\mathbf{p}_i$, равный произведению массы m_i точки на ее скорость $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

Импульсом системы из n материальных точек называют вектор $\mathbf{p}$, равный геометрической сумме импульсов всех точек системы:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i.$$

Для тела

$$\mathbf{p} = \int_m \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{v} \rho dV,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость малого (элементарного) элемента тела объемом dV и массой $dm = \rho dV$ (ρ — плотность).

Импульс механической системы равен произведению массы m всей системы на скорость $\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_C}{dt}$ ее центра масс: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$.

4. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

1°. Второй закон Ньютона: первая производная по времени от импульса материальной точки равна действующей на нее силе:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i, \text{ или } \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i.$$

Элементарным импульсом силы $\mathbf{F}_i$ за время dt называют вектор $\mathbf{F}_i dt$. Импульс силы $\mathbf{F}_i$ за конечный промежуток

времени Δt равен $\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_i dt$. Если сила $\mathbf{F}_i$ постоянна, то ее импульс за промежуток времени Δt равен $\mathbf{F}_i \Delta t$.

Второй закон Ньютона можно также сформулировать следующим образом: элементарное изменение импульса материальной точки равно элементарному импульсу действующей на нее силы:

$$d(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i dt;$$

так как $m_i = \text{const}$, то

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}.$$

Второй закон Ньютона можно сформулировать еще так: ускорение материальной точки прямо пропорцио-

нально действующей на нее силе, обратно пропорционально массе точки и совпадает по направлению с силой.

2°. Уравнение, определяющее связь a_i и F_i , называют *основным уравнением динамики материальной точки*. В прямоугольных декартовых, цилиндрических и сферических координатах оно имеет вид:

а) декартовы координаты

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix}; \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy}; \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz};$$

б) цилиндрические координаты

$$m_i (\ddot{\rho}_i - \rho_i \dot{\phi}_i^2) = F_{i\rho},$$

$$m_i (\rho_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{\rho}_i \dot{\phi}_i) = F_{i\phi}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz},$$

где $F_{i\rho}$ и $F_{i\phi}$ — проекции силы F_i соответственно на направления прямой OM' (см. рис. 1.1.1, б, где M — движущаяся материальная точка с массой m_i) и прямой, проведенной в плоскости xOy перпендикулярно к OM' в направлении возрастания угла ϕ ;

в) сферические координаты

$$m_i (\ddot{r}_i - r_i \dot{\theta}_i^2 \sin^2 \theta_i - r_i \dot{\theta}_i^2) = F_{ir},$$

$$m_i [(r_i \ddot{\phi}_i + 2\dot{r}_i \dot{\phi}_i) \sin \theta_i + 2r_i \dot{\phi}_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i] = F_{i\phi},$$

$$m_i (2\dot{r}_i \dot{\theta}_i + r_i \ddot{\theta}_i - r_i \dot{\phi}_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i) = F_{i\theta},$$

где F_{ir} — проекция силы F_i на направление прямой OM (см. рис. 1.1.1, в), $F_{i\phi}$ — проекция F_i на направление прямой, проведенной в плоскости xOy перпендикулярно к OM' в направлении возрастания угла ϕ , $F_{i\theta}$ — проекция F_i на направление прямой, проведенной в плоскости OMM' перпендикулярно к OM в направлении возрастания угла θ .

3°. В соприкасающейся плоскости ускорение материальной точки и действующую на нее силу можно разложить на нормальные и тангенциальные составляющие:

$$m_i (a_{in} + a_{it}) = F_{in} + F_{it},$$

причем

$$F_{in} = m_i a_{in} \quad \text{и} \quad F_{it} = m_i a_{it}.$$

Модуль нормальной силы равен

$$F_{in} = m_i a_{in} = \frac{m_i v_i^2}{R_i}.$$

Нормальная сила направлена к центру кривизны траектории материальной точки. Поэтому ее часто называют *центростремительной силой*. В случае круговой траектории радиуса R , сила $F_{\text{н}} = m_i \omega_i^2 R$, где ω_i — угловая скорость обращения точки.

Тангенциальная составляющая равна

$$F_{\text{т}} = m_i a_{\text{т}} = m_i \dot{v}_i.$$

Если $\dot{v}_i > 0$, то сила $F_{\text{т}}$ совпадает по направлению с вектором скорости v_i и ее называют *движущей силой*; если $\dot{v}_i < 0$, то сила $F_{\text{т}}$ противоположна по направлению скорости v_i и ее называют *тормозящей силой*.

4°. *Принцип независимости действия сил*: если на материальную точку одновременно действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке ускорение, определяемое вторым законом Ньютона так, как если бы других сил не было. Поэтому результирующее ускорение точки можно определить по второму закону Ньютона, подставляя в него результирующую силу F_r .

5. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

1°. *Третий закон Ньютона*: действия двух материальных точек друг на друга равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (i \neq j),$$

где $\mathbf{F}_{ij}$ — сила, действующая на i -ю точку со стороны j -й, а $\mathbf{F}_{ji}$ — сила, действующая на j -ю точку со стороны i -й. Эти силы приложены к разным точкам и могут взаимно уравновешиваться только в том случае, когда точки i и j принадлежат одному и тому же твердому телу.

2°. Из третьего закона Ньютона следует:

а) сумма всех внутренних сил, действующих в меха-

нической системе, равна нулю: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = 0$, где n —

общее число материальных точек, входящих в механическую систему, а $\mathbf{F}_{ii} = 0$;

б) сумма моментов всех внутренних сил в системе относительно любого центра O равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из центра O в точку приложения силы $\mathbf{F}_{ij}$.

6. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

1°. *Закон изменения импульса:* производная по времени от импульса $\mathbf{p}$ механической системы равна главному вектору $\mathbf{F}^{\text{внеш}}$ всех внешних сил, действующих на эту систему:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{внеш}}.$$

Так как $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, где m — масса системы, а $\mathbf{v}_C$ — скорость ее центра масс, то

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^{\text{внеш}}, \text{ или } \mathbf{a}_C = \frac{\mathbf{F}^{\text{внеш}}}{m}.$$

Эти уравнения выражают закон движения центра масс: центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору приложенных к системе внешних сил.

2°. В случае поступательного движения твердого тела его скорость $\mathbf{v}$ равна скорости центра масс этого тела: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C$. Соответственно основное уравнение динамики поступательного движения твердого тела имеет вид:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F}^{\text{внеш}}, \text{ или } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}^{\text{внеш}}}{m}.$$

где m — масса тела, $\mathbf{a}$ — его ускорение.

1-й случай. Движение по инерции ($\mathbf{F} = 0$):

$$m\mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{a} = 0.$$

2-й случай. Движение под действием постоянной силы:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = \mathbf{F} = \text{const}, \quad m\mathbf{v} = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0,$$

где $m\mathbf{v}_0$ — импульс тела в начальный момент времени $t = 0$.

Примечание. Свободное твердое тело движется поступательно, если равен нулю главный момент внешних сил относительно центра масс этого тела.

Пример. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту. Тело движется под действием постоянной силы тяжести P , направленной вертикально вниз (рис. 1.2.4). Для произвольной точки $M(x, y)$ траектории, по которой движется тело, имеем:

$$\begin{aligned} m\mathbf{v} &= P\mathbf{t} + m\mathbf{v}_0, \quad \text{или } \mathbf{v} = g\mathbf{t} + \mathbf{v}_0, \\ v_x &= v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \\ x &= v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{aligned}$$

уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

высота подъема:

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g};$$

дальность полета вдоль горизонтальной оси x :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

3-й случай. Движение под действием переменной силы. Изменение импульса тела за промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = F_{\text{ср}}(t_2 - t_1),$$

где $F_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} F dt$ — среднее значение вектора силы

в интервале времени от t_1 до t_2 .

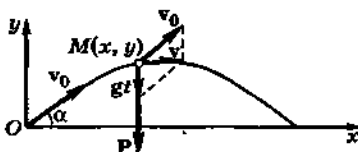


Рис. 1.2.4

7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

1°. Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется:

$$\frac{dp}{dt} = 0, \text{ или } p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const.}$$

Это один из основных законов природы, связанный с однородностью пространства. В проекциях на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат он записывается в виде системы трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i &= 0, \Rightarrow p_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = \text{const}_x; \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i &= 0, \Rightarrow p_y = \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i = \text{const}_y; \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i &= 0, \Rightarrow p_z = \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i = \text{const}_z, \end{aligned}$$

где $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ — проекции на оси Ox , Oy и Oz вектора v_i скорости i -й точки системы, а p_x , p_y и p_z — постоянные величины, равные проекциям на оси координат вектора p импульса системы.

2°. Закон сохранения импульса показывает, что взаимодействие тел, составляющих замкнутую систему, приводит только к обмену импульсами между этими телами, но не может изменить движения системы как целого: при любом взаимодействии между телами, образующими замкнутую систему, скорость движения центра масс этой системы не изменяется, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &\approx 0, \\ x_C &= v_{Cx}t + x_{C0}, \\ y_C &= v_{Cy}t + y_{C0}, \\ z_C &= v_{Cz}t + z_{C0}, \end{aligned}$$

где v_C — скорость центра масс, а x_C , y_C и z_C — его декартовы координаты.

3°. Если механическая система не замкнута, но действующие на нее внешние силы таковы, что их главный вектор тождественно равен нулю ($F^{\text{внеш}} \equiv 0$), то импульс системы не изменяется с течением времени: $p = \text{const}$. Если $F^{\text{внеш}} \equiv 0$, но проекция $F_q^{\text{внеш}}$ на какую-либо неподвижную ось q тождественно равна нулю ($F^{\text{внеш}} \equiv 0$), то, хотя $p \neq \text{const}$, проекция $p_q = \text{const}$. Например, если $F_x^{\text{внеш}} \equiv 0$, то

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i = \text{const}.$$

8. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

1°. Дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела, масса m которого зависит от времени (вследствие присоединения к телу или отделения него частиц вещества), имеет вид:

$$\frac{d}{dt} (mv) = F + v_1 \frac{dm}{dt},$$

где F — главный вектор всех сил, действующих на тело, а v_1 — скорость присоединяющихся частиц до присоединения (если $\frac{dm}{dt} > 0$) или скорость отделяющихся частиц после отделения (если $\frac{dm}{dt} < 0$).

2°. Ускорение a тела переменной массы равно

$$a = \frac{1}{m} (F + F_p),$$

где

$$F_p = (v_1 - v) \frac{dm}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

— реактивная сила, равная произведению производной по времени от массы тела на относительную скорость $u = v_1 - v$ присоединяющихся или отделяющихся частиц.

Примеры.

1. Реактивная сила, создаваемая воздушно-реактивным двигателем. Эта сила F_p равна сумме двух реак-

тивных сил, одновременно создаваемых поступающим в двигатель воздухом F_{p1} и выбрасываемыми из него продуктами сгорания F_{p2} :

$$\begin{aligned} F_p &= F_{p1} + F_{p2}, \\ F_{p1} &= u_1 \frac{dm}{dt}, \quad F_{p2} = -u_2 \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right), \\ F_p &= (u_1 - u_2) \frac{dm_1}{dt} - u_2 \frac{dm_2}{dt}, \end{aligned}$$

где $u_1 = -v$ — относительная скорость воздуха на входе в двигатель, v — скорость полета, u_2 — относительная скорость продуктов сгорания на выходе из двигателя, $\frac{dm_1}{dt}$ — секундный массовый расход воздуха, $\frac{dm_2}{dt}$ — секундный массовый расход топлива.

2. Движение ракеты в условиях отсутствия внешнего силового воздействия. Сила тяги ракеты получается из предыдущей формулы в предположении, что $u_1 = 0$ (окислитель, как и топливо, находится в самой ракете):

$$F_p = u_2 \frac{dm}{dt},$$

где $\frac{dm}{dt}$ — скорость уменьшения массы ракеты за счет выгорания топлива. Уравнение движения ракеты имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = u_2 \frac{dm}{dt},$$

где v и m — скорость и масса ракеты в произвольный момент времени t . Векторы $\frac{dv}{dt}$ и u_2 направлены в противоположные стороны, поэтому

$$m \frac{dv}{dt} = -u_2 \frac{dm}{dt},$$

откуда при $u_2 = \text{const}$ следует уравнение Циолковского:

$$v = v_0 + u_2 \ln \frac{m_0}{m},$$

где v_0 и m_0 — начальные значения скорости и массы ракеты (при $t = 0$).

9. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1°. Радиусы-векторы точки и время в двух произвольных инерциальных системах отсчета связаны преобразованием Галилея:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_e t), \\ t' &= t, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы движущейся точки в первой и второй системах отсчета, $\mathbf{v}_e = \text{const}$ — скорость равномерного и прямолинейного движения второй системы по отношению к первой, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный из начала O первой системы отсчета в начало O' второй системы отсчета в начальный момент времени $t = 0$. Второе условие ($t' = t$) выражает абсолютный характер времени в классической механике, т. е. одинаковость его течения во всех системах отсчета.

2°. Скорости и ускорения материальной точки в обеих системах отсчета связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e, \\ \mathbf{a}' &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Ускорение какой-либо материальной точки во всех инерциальных системах отсчета одинаково.

Из формул преобразования Галилея следует, что все эти величины во всех инерциальных системах одинаковы:

$$\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \text{ и } \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Поэтому одинаковы и результирующие силы, действующие на движущуюся материальную точку:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}.$$

Масса материальной точки не зависит от состояния ее движения и потому одинакова во всех системах отсчета ($m' = m$). Следовательно, если уравнение динамики материальной точки в одной инерциальной системе отсчета имеет вид: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, то и в любой другой инерциальной системе отсчета оно имеет такой же вид: $m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$.

Иными словами, уравнения, выражающие законы Ньютона, инвариантны относительно преобразования Галилея, т. е. не изменяют свой вид при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

3°. *Механический принцип относительности (принцип относительности Галилея)*: равномерное и прямолинейное движение (относительно инерциальной системы отсчета) замкнутой механической системы не влияет на ход протекающих в ней механических процессов.

Другая эквивалентная формулировка механического принципа относительности: законы механики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Механический принцип относительности свидетельствует о том, что в ньютоновской механике все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Нет никаких оснований для выделения какой-либо определенной («основной») системы отсчета, по отношению к которой покой и движение тел можно было бы считать абсолютными. Дальнейшее обобщение принципа относительности сделано в теории относительности.

10. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1°. Между любыми двумя материальными точками действуют силы *взаимного притяжения*, прямо пропорциональные произведению масс этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними (рис. 1.2.5):

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R},$$

где F_{12} — сила тяготения, действующая на точку 1 массой m_1 со стороны другой материальной точки массой m_2 ,

$\mathbf{R}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный из точки 2 в точку 1, $R = |\mathbf{R}_{12}|$ — расстояние между точками. Коэффициент G называют *гравитационной постоянной (постоянной тяготения)*.

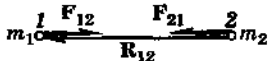


Рис. 1.2.5

По третьему закону Ньютона сила F_{21} , действующая на материальную точку с массой m_2 , равна силе F_{12} , но направлена в противоположную сторону:

$$F_{21} = -F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{R_{12}}{R} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{R_{21}}{R},$$

где $R_{21} = -R_{12}$ — радиус-вектор, проведенный в точку 2 из точки 1.

2°. Достаточно малые элементы двух тел произвольной формы и размеров можно считать материальными точками, массы которых равны произведениям их объемов (dV_1 и dV_2) на плотности (ρ_1 и ρ_2). Поэтому сила тяготения dF_{12} , действующая на элемент первого тела со стороны элемента второго тела, равна

$$dF_{12} = -G \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{12}^3} r_{12} dV_1 dV_2.$$

Результирующая сила F_{12} притяжения первого тела вторым равна

$$F_{12} = -G \int_{V_1} \rho_1 dV_1 \int_{V_2} \frac{\rho_2}{r_{12}^3} r_{12} dV_2,$$

где интегрирование проводится по полным объемам V_1 и V_2 обоих тел. В случае однородных тел их плотности постоянны и

$$F_{12} = -G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} dV_1 \int_{V_2} \frac{r_{12}}{r_{12}^3} dV_2.$$

Для двух твердых тел шарообразной формы, плотность каждого из которых зависит только от расстояния до его центра,

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} R_{12},$$

где m_1 и m_2 — массы этих тел, R_{12} — радиус-вектор, соединяющий центры второго и первого тел, а $R = |R_{12}|$.

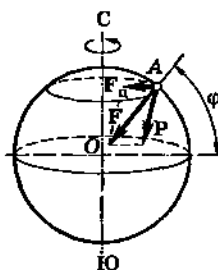


Рис. 1.2.6

Эта формула справедлива также и в том случае, когда одно из тел имеет произвольную форму, но его размеры во много раз меньше радиуса второго тела.

В частности, ею можно пользоваться для приближенного расчета силы тяготения тел к Земле.

3°. Силой тяжести материальной точки называют силу P , равную векторной разности между силой F тяготения этой материальной точки к Земле и цент-

ростремительной силой $F_{ц}$, обуславливающей участие материальной точки в суточном вращении Земли (рис. 1.2.6):

$$P = F - F_{ц},$$

причем

$$F_{ц} = m\omega^2 R \cos \varphi,$$

где m — масса точки, ω — угловая скорость суточного вращения Земли, R — радиус Земли, а φ — географическая широта места наблюдения A .

Другое определение силы тяжести, эквивалентное вышеприведенному: сила тяжести материальной точки равна сумме силы F тяготения этой материальной точки к Земле и переносной силы инерции F_e , обусловленной суточным вращением Земли с угловой скоростью ω : $P = F + F_e = F - m\omega \times (\omega \times r)$, где r — радиус-вектор материальной точки, проведенный из центра Земли, а m — масса точки.

Сила тяжести максимальна на полюсах и минимальна на экваторе. Однако это различие не превышает 0,55%. Сила тяжести тела равна геометрической сумме сил тяжести всех материальных точек, входящих в состав тела. Точку приложения этой силы называют центром тяжести тела. Центр тяжести тела совпадает с его центром масс.

4°. Свободным падением называют движение тела, происходящее под действием только его силы тяжести.

Ускорение свободного падения $g = \frac{P}{m}$. Оно одинаково

для всех тел и зависит от географической широты φ и высоты над уровнем моря. Числовые значения g (в м/с^2) на небольших высотах h (в м) над уровнем моря можно вычислять по приближенной формуле:

$$g = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) - 0,0003086 h.$$

Стандартное (нормальное) значение g , принятое для барометрических расчетов, равно $9,80665 \text{ м/с}^2$.

В большинстве технических расчетов пренебрегают зависимостью g от φ и полагают $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, а для определения изменения g при удалении от поверхности Земли пользуются приближенной формулой

$$g = g_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2,$$

где h — высота над поверхностью Земли, $R_0 = 6,37 \times 10^6 \text{ м}$ — средний радиус Земли, а $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$.

5°. *Весом тела* называют силу, с которой это тело действует вследствие тяготения к Земле на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Если тело и опора неподвижны относительно Земли, то вес тела равен его силе тяжести.

11. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

1°. Тяготение между телами осуществляется через гравитационное поле (поле тяготения). Отличительная особенность гравитационного поля состоит в том, что на помещенную в него материальную точку действует сила тяготения, прямо пропорциональная массе этой точки. Векторной силовой характеристикой гравитационного поля является его напряженность g , которая равна отношению силы тяготения F , действующей на материальную точку, к ее массе m :

$$g = \frac{F}{m}.$$

2°. Потенциальный характер сил тяготения позволяет ввести энергетическую характеристику гравитационного поля — потенциал φ , равный отношению потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ материальной точки, помещенной в рассматриваемую точку поля, к массе m этой материальной точки: $\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{m}$. Потенциал и напряженность гравитационного поля связаны соотношением:

$$\mathbf{g} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\mathbf{i} + \frac{d\varphi}{dy}\mathbf{j} + \frac{d\varphi}{dz}\mathbf{k}\right).$$

Между гравитационным и электростатическим полями существует формальная аналогия, являющаяся результатом внешнего сходства между выражениями для силы взаимного притяжения двух материальных точек и силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов. Поэтому для нахождения напряженности и потенциала гравитационного поля, создаваемого произвольной системой материальных точек с массами $m_1, m_2, \dots, m_k$, можно воспользоваться выражениями для напряженности и потенциала электростатического поля в вакууме геометрически тождественной системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_k$, заменив в этих выражениях величины $\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}$ на Gm_i , где

G — гравитационная постоянная. Так, например, для гравитационного поля, создаваемого материальной точкой с массой M , находящейся в начале системы отсчета,

$$\mathbf{g} = -G\frac{M}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{и} \quad \varphi = -G\frac{M}{r} + C,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки поля, C — произвольная постоянная, зависящая от выбора начала отсчета φ .

Эти выражения, справедливы также для гравитационного поля шара массы M , плотность которого изменяется только в радиальном направлении, а радиус поверхности меньше r .

В общем случае потенциал φ гравитационного поля, создаваемого произвольно распределенными в пространстве массами, удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -4\pi G\rho, \text{ или } \Delta\varphi = -4\pi G\rho,$$

где $\rho = \frac{dm}{dV}$ — объемная плотность распределения массы,

а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = -G \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

где r — расстояние от элемента объема dV с массой $dm = \rho dV$ до рассматриваемой точки поля, а интегрирование проводится по всему объему V , занятому телами, создающими поле (принимается, что $\varphi = 0$ в бесконечно удаленной точке).

3°. *Невесомость* называют состояние механической системы, при котором действующее на систему внешнее гравитационное поле не вызывает взаимного давления частей системы друг на друга. В состоянии невесомости тело, подвешенное на пружине, не вызывает никакой деформации пружины, а тело, лежащее неподвижно на опоре, не оказывает на нее никакого силового воздействия.

Состояние невесомости возникает в любой системе при соблюдении следующих условий: а) на систему не действуют никакие иные внешние силы, кроме сил гравитационного поля; б) размеры системы не слишком велики, так что в каждый момент времени напряженности гравитационного поля во всех точках системы одинаковы; в) система движется поступательно. Эти условия реализуются, например, в свободно падающем лифте, в искусственных спутниках Земли и космических кораблях, совершающих свободный полет, т. е. движущихся с выключенными двигателями.

4°. Закон всемирного тяготения Ньютона и построенная на его основе *нерелятивистская теория поля тяготения* являются приближенными. Эта теория до-

статочной точно описывает движение тела в поле тяготения только в тех случаях, когда поле сравнительно слабое, т. е. его потенциал $|\phi| \ll c^2$, где c — скорость света в вакууме, а скорость тела $v \ll c$.

Современная теория тяготения, основанная на теории относительности, была сформулирована А. Эйнштейном и названа им *общей теорией относительности*. Она представляет собой объединенную теорию пространства, времени и тяготения. Согласно этой теории геометрические свойства (метрика) четырехмерного пространства-времени не являются неизменными, а зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и энергии. Поле тяготения «искривляет» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяет ход времени в различных точках этого пространства, т. е. вызывает отклонение метрики пространства-времени от метрики «плоского» пространства-времени, описываемого псевдоевклидовой геометрией и рассматриваемого в специальной теории относительности. В связи с этим в гравитационном поле элементарный интервал ds между двумя мировыми точками имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k = \\ = g_{00}(dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + \dots + g_{33}(dx^3)^2,$$

где $x^0 = ct$ — временная координата, x^1 , x^2 и x^3 — пространственные координаты, а $g_{ik} = g_{ki}$ — метрический тензор искривленного 4-х мерного пространства-времени. Это выражение никаким преобразованием координат нельзя привести во всем пространстве-времени к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

характерному для «плоского» (псевдоевклидова) пространства-времени. Такое приведение возможно только для бесконечно малой окрестности какой-либо одной мировой точки.

Мировая линия, соответствующая движению свободной материальной точки в гравитационном поле, представляет собой геодезическую линию в четырехмерном пространстве-времени, т. е. линию, вдоль кото-

рой интеграл $\int ds$ между какими-либо двумя мировыми точками имеет экстремальное значение. Вследствие «кривизны» пространства-времени геодезические линии в нем не являются прямыми. Соответственно материальная точка, подверженная действию гравитационного поля, движется в реальном трехмерном пространстве не прямолинейно и не равномерно.

Расчет поля тяготения в теории Эйнштейна сводится к нахождению зависимостей g_{ik} от пространственных координат и времени для заданной системы тел, создающих поле. Система уравнений гравитационного поля нелинейна относительно g_{ik} . Поэтому для гравитационных полей не выполняется принцип суперпозиции. Он приближенно верен лишь при наложении достаточно слабых гравитационных полей, к которым применима нерелятивистская теория.

12. ВНЕШНЕЕ ТРЕНИЕ

1°. Различают два основных типа трения — внутреннее и внешнее. *Внутренним трением* или вязкостью называют явление возникновения касательных сил, препятствующих перемещению частей жидкости или газа друг по отношению к другу. *Внешним трением* называют взаимодействие между телами, возникающее в месте их соприкосновения и препятствующее их относительному перемещению. В зависимости от характера относительного движения тел различают: *трение скольжения*, возникающее при поступательном перемещении одного тела по поверхности другого, и *трение качения*, возникающее тогда, когда одно тело катится по поверхности другого. В чистом виде трение качения имеет место только в том случае, если линия или точка соприкосновения трущихся тел совпадает с мгновенной осью вращения катящегося тела. Во всех остальных случаях трение качения сопровождается трением скольжения.

2°. Внешнее трение, происходящее между движущимися телами, называют *кинематическим*. Внешнее трение между взаимно неподвижными телами называют *трением покоя*. Оно проявляется в том, что для возникновения относительного перемещения двух сопри-

касающихся тел к одному из них нужно приложить внешнюю силу $F > F_0$, где F_0 — так называемая *предельная сила трения покоя*. Отсутствие взаимного перемещения тел при $F < F_0$ называют *явлением застоя*. Оно широко используется в технике для передачи усилий от одних деталей машин к другим (ременные передачи, фрикционные муфты и т. д.).

Трение скольжения между телами, поверхности которых не подвергаются смазке, называют *сухим трением*, а трение между обильно и непрерывно смазываемыми телами — *жидкостным трением*.

В зависимости от толщины слоя смазки между трущимися телами и степени шероховатости их поверхностей различают несколько переходных случаев трения скольжения: *полусухое, граничное, полужидкостное*.

3°. Сила трения скольжения в случае сухого трения в основном вызывается механическим зацеплением между неровностями поверхностей тел и сцеплением между молекулами обоих тел в областях непосредственного соприкосновения. В приближенных расчетах можно считать, что сила F трения скольжения прямо пропорциональна силе N нормального давления между поверхностями трущихся тел (*закон Амонтона — Кулона*):

$$F = fN,$$

где f — безразмерный коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств материала тел. В действительности коэффициент трения зависит от множества других факторов: качества обработки поверхностей трущихся тел, наличия на них загрязнений, скорости скольжения и т. д. Поэтому его определяют на основе экспериментальных данных, полученных для случаев, сходных с рассматриваемой задачей. Коэффициент f_0 , соответствующий предельной силе трения покоя, обычно больше коэффициента кинематического трения.

Часто вместо коэффициента трения f пользуются *углом трения* φ , связанным с f соотношением $\operatorname{tg} \varphi = f$. Угол $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f_0$ равен тому наименьшему углу наклона плоскости к горизонту, при котором лежащее на ней тело начинает скользить вниз под действием силы тяжести.

Более точным является двухчленный закон трения, установленный на основе учета влияния сил притяжения между молекулами трущихся тел:

$$F = \mu(N + Sp_0),$$

где μ — истинный коэффициент трения, p_0 — добавочное давление, вызванное силами молекулярного притяжения, а S — общая площадь всех областей непосредственного контакта между телами.

4°. Под действием нормальной силы N , приложенной к лежащему на горизонтальной поверхности круговому цилиндру радиусом r (рис. 1.2.7), цилиндр деформируется. При этом образуется целая площадка контакта цилиндра с поверхностью. Поэтому для осуществления качения цилиндра по поверхности к нему нужно прикладывать опрокидывающий момент $M = F'r$, создаваемый парой сил — силой тяги F' , приложенной к оси O вращения цилиндра, и силой трения качения $F = -F'$, приложенной на поверхности контакта цилиндра. В первом приближении трение качения можно рассчитывать по закону Кулона:

$$M = kN \quad \text{и} \quad F = \frac{kN}{r},$$

где k — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины и зависящий от материала контактирующих тел, состояния их поверхности и других факторов. На катящийся цилиндр действует момент трения $M_{\text{тр}} = kN$, создаваемый парой сил N и нормальной реакцией $R_n = -N$.

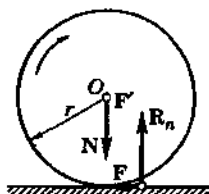


Рис. 1.2.7

13. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

1°. Относительное ускорение a_r точки равно разности между ее абсолютным ускорением a_a и суммой переносного a_e и кориолисова a_k ускорений:

$$a_r = a_a - (a_e + a_k).$$

Поэтому уравнение относительного движения материальной точки, обладающей массой m , в произвольной неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$ma_r = ma_a - (ma_e + ma_k).$$

Выбирая за абсолютную систему отсчета какую-нибудь инерциальную систему и учитывая, что для последней справедлив второй закон Ньютона ($ma_a = F$), получаем:

$$ma_r = F + F_e + F_k$$

где F — результирующая всех сил, действующих на материальную точку со стороны других тел, а $F_e = -ma_e$ и $F_k = -ma_k$ — *переносная* и *кориолисова силы инерции*.

2°. Уравнение относительного движения материальной точки в произвольной неинерциальной системе отсчета формально подобно уравнению движения этой точки в инерциальной системе ($ma = F$). Отличие состоит лишь в необходимости введения в правую часть уравнения двух дополнительных сил инерции. Принципиальное различие между силами инерции и обычными силами взаимодействия тел состоит в том, что для первых нельзя указать, действие каких конкретно тел на материальную точку ими описывается. Указанные выше силы инерции не следует смешивать с *даламберовой силой инерции* $F_d = -ma$, где a — ускорение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета. Введение этой силы инерции чисто формально: оно позволяет придать уравнению динамики точки в инерциальной системе отсчета форму уравнения статики: $F + F_d = 0$, где F — равнодействующая всех сил, приложенных к точке. В то время как переносная и кориолисова силы инерции реально действуют на точку в неинерциальной системе отсчета и могут быть измерены с помощью обычных методов (например, пружинным динамометром), даламберова сила инерции на точку не действует и поэтому не может быть измерена.

3°. Силы инерции пропорциональны массам материальных точек и при прочих равных условиях сообщают этим точкам одинаковые относительные ускорения. Таким же свойством обладают силы тяготения: в одной и той же точке гравитационного поля эти силы, подобно силам инерции, пропорциональны массам материаль-

ных точек и всем им сообщают одинаковые ускорения, равные напряженности поля. Следовательно, свободное движение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению по отношению к инерциальной системе отсчета, совершающемуся под действием некоторого дополнительного («эквивалентного») гравитационного поля. Это утверждение называют *принципом эквивалентности*. Например, силам инерции, которые возникают в системе отсчета, движущейся поступательно с постоянным ускорением ($a_e = a_0 = \text{const}$), эквивалентно однородное гравитационное поле с постоянной напряженностью $g = -a_0$.

Принцип эквивалентности отнюдь не означает тождественности сил инерции и «истинных» сил тяготения. Действительно, напряженности «истинных» гравитационных полей, создаваемых телами, стремятся к нулю по мере удаления от этих тел. Между тем напряженность гравитационного поля, «эквивалентного» силам инерции, этому условию не удовлетворяет. Так, в рассмотренном выше примере она одинакова во всех точках пространства, а в случае вращающейся системы отсчета гравитационное поле, «эквивалентное» центробежным силам инерции, даже неограниченно возрастает по мере удаления от оси вращения системы. «Эквивалентное» поле можно полностью исключить путем соответствующего выбора системы отсчета: в инерциальных системах отсчета силы инерции, а следовательно, и «эквивалентное» им гравитационное поле отсутствуют. «Истинные» гравитационные поля существуют и в инерциальных системах отсчета. Поэтому невозможно полностью исключить эти поля во всем пространстве путем изменения выбора системы отсчета и введения соответствующего поля сил инерции. Такую замену можно осуществить лишь локально, т. е. для столь малой области поля тяготения, в пределах которой это поле можно считать однородным, и для столь малого промежутка времени, в течение которого поле можно считать постоянным. Итак, «истинное» гравитационное поле эквивалентно полю сил инерции, возникающему при ускоренном движении, только в ограниченной области пространства и в течение ограниченного промежутка времени (*локальный принцип эквивалентности*).

Глава 3

РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1. ЭНЕРГИЯ

1°. *Энергией* называют скалярную физическую величину, являющуюся единой мерой различных форм движения вещества и полей и соответствующих им взаимодействий. Энергия системы количественно характеризует систему в отношении возможных в ней превращений движения, которые происходят благодаря взаимодействию частей системы как друг с другом, так и с внешними телами (внешней средой). Энергия системы — функция состояния системы относительно выбора исходного состояния и системы отсчета.

Для количественной характеристики качественно различных форм движения, рассматриваемых в физике, вводятся соответствующие им виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и др.

2°. Энергия системы может изменяться только в процессе взаимодействия системы с внешней средой. Об этом свидетельствует *закон сохранения и превращения энергии*: при любых процессах, происходящих в изолированной системе, ее полная энергия не изменяется.

Изолированной системой называют систему, которая никак не взаимодействует с внешней средой, т. е. не обменивается с ней энергией.

Этот закон связан с однородностью времени и является одним из важнейших законов природы.

Если система не изолированная, то изменение ее энергии благодаря внешним воздействиям численно равно и противоположно по знаку алгебраической сумме изменений энергии всех внешних тел и полей, взаимодействующих с системой.

3°. Для макроскопической системы возможны три качественно различные способы обмена энергией с внешней средой — путем совершения работы, путем теплообмена и путем обмена веществом (массообмена).

Изменение энергии тела, осуществленное первым способом, называют *работой*, совершенной над этим телом. Соответственно изменение энергии тела, осуществленное вторым способом, называют *количеством теплоты*, сообщенной телу.

Передача энергии путем совершения работы производится в процессе силового взаимодействия тел. Поэтому можно говорить, что работа, совершенная над рассматриваемым телом, есть не что иное, как работа сил, приложенных к этому телу со стороны всех других (внешних) тел, с которыми оно взаимодействует. Работа, совершаемая над телом, может непосредственно пойти на увеличение любого вида энергии этого тела.

Передача энергии путем теплообмена между телами обусловлена различием температур этих тел и может осуществляться как при непосредственном контакте тел — теплопроводность и конвективный теплообмен — так и посредством испускания и поглощения электромагнитного излучения — теплообмен излучением. Энергия, получаемая телом путем теплообмена, может непосредственно пойти только на увеличение его внутренней энергии.

2. РАБОТА

1°. Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. *Элементарная работа* δA силы F равна скалярному произведению силы на элементарное (малое) перемещение dr точки ее приложения:

$$\delta A = F dr = F ds \cos \alpha = F_{\tau} ds,$$

или, в декартовых координатах,

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где r — радиус-вектор точки приложения силы, x , y и z — ее декартовы координаты, F_x , F_y и F_z — проекции вектора силы на оси координат, α — угол между векторами F и dr ; $ds = |dr|$ — элементарная длина пути точки вдоль траектории, $F_{\tau} = F \cos \alpha$ — проекция силы F на касательную к траектории.

Элементарная работа обозначена через δA , а не dA , так как в общем случае она не является полным дифференциалом, т. е. криволинейный интеграл от δA вдоль произвольной замкнутой траектории точки приложения силы не равен нулю, в то время как этот интеграл от полного дифференциала должен быть тождественно

равен нулю. Например, работа сил трения вдоль замкнутой траектории тела может быть не равна нулю.

Для материальной точки, на которую действует сила F ,

$$\delta A = Fv dt = vdp,$$

где v и p — скорость и импульс материальной точки.

2°. Если на механическую систему одновременно действуют силы $F_1, F_2, \dots, F_n$, то элементарная работа δA , совершаемая над системой за малый промежуток времени dt , равна алгебраической сумме элементарных работ всех сил:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n F_i dr_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i dt,$$

где dr_i и v_i — элементарное перемещение и скорость точки приложения силы F_i . Суммарная работа всех внутренних сил при движении твердого тела тождественно равна нулю.

3°. В случае поступательного движения твердого тела все векторы dr_i одинаковы и равны dr . Поэтому элементарная работа всех внешних сил, действующих на тело, равна элементарной работе главного вектора внешних сил на перемещении dr :

$$\delta A = \sum_{i=1}^n F_i dr = F dr = F v_C dt = v_C dp,$$

где v_C и $p = mv_C$ — скорость центра масс и импульс тела массы m .

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной точки O — начала координат, то элементарная работа всех n сил, действующих на тело,

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i) \cdot \omega dt = M \omega dt = M d\varphi,$$

где M — главный момент системы сил относительно точки O , $d\varphi = \omega dt$ — вектор элементарного поворота, ω — мгновенная угловая скорость. Эта же формула

справедлива при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O .

4°. Работа A силы F на конечном участке s траектории перемещения ее точки приложения равна алгебраической сумме элементарных работ этой силы на всех бесконечно малых участках траектории:

$$A = \int_0^s F dr = \int_0^s F_{\tau} ds.$$

Если $F_{\tau} = \text{const}$, то $A = F_{\tau} s$.

В случае действия на твердое тело системы сил $F_1, F_2, \dots, F_k$, вызывающих поступательное движение тела,

$$A = \sum_{i=1}^k \int_0^s F_i dr = \int_0^s F dr = \int_0^s F_{\tau} ds,$$

где F — главный вектор системы сил, а F_{τ} — его проекция на элементарное перемещение dr тела.

5°. Если зависимость F_{τ} от s задана графически (рис. 1.3.1), то работа A силы F на участке траектории между точками $B(s_1)$ и $C(s_2)$ пропорциональна площади S , заштрихованной на рис. 1.3.1:

$$A = k_1 k_2 S,$$

где k_1 и k_2 — масштабы s и F_{τ} , принятые при построении графика и показывающие, соответственно, скольким единицам пути равна единица длины оси абсцисс и скольким единицам силы равна единица длины оси ординат.

6°. Мощностью N силы F называют физическую величину, характеризующую быстроту совершения работы этой силой и равную отношению элементарной работы δA к промежутку времени dt , за который она совершена:

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

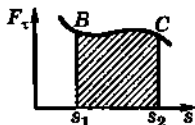


Рис. 1.3.1

Мощность силы равна скалярному произведению этой силы на скорость перемещения ее точки приложения:

$$N = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = F_{\tau}v,$$

где F_{τ} — проекция силы $\mathbf{F}$ на направление вектора $\mathbf{v}$. В том случае, когда тело с массой m движется под действием силы $\mathbf{F}$ поступательно, $F_{\tau} = m\dot{v}$ и $N = m\dot{v}v$.

7°. В случае произвольного движения абсолютно твердого тела результирующая мощность равна алгебраической сумме мощностей всех сил, действующих на тело:

$$N = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^k \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость движения точки приложения силы $\mathbf{F}_i$.

Если твердое тело движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}$, то $N = \mathbf{F}\mathbf{v}$, где $\mathbf{F}$ — главный вектор внешних сил.

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки O или неподвижной оси, проходящей через точку O ,

$$N = M\omega,$$

где M — главный момент внешних сил относительно точки O , ω — мгновенная угловая скорость тела.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ И СИЛЫ СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

1°. Стационарное поле, действующее на материальную точку M с силой $\mathbf{F}$, называют *потенциальным полем*, если работа силы $\mathbf{F}$ вдоль любой проведенной в поле замкнутой траектории L точки приложения силы равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M . Соответственно силу $\mathbf{F}$ называют *потенциальной (консервативной) силой*.

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение (т. е. элементарная работа силы $\mathbf{F}$) было полным дифференциалом:

лом некоторой скалярной функции координат $Y(x, y, z)$, называемой *силовой функцией*:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dY.$$

Отсюда

$$F_x = \frac{dY}{dx}, F_y = \frac{dY}{dy}, F_z = \frac{dY}{dz},$$

или

$$\mathbf{F} = \frac{dY}{dx} \mathbf{i} + \frac{dY}{dy} \mathbf{j} + \frac{dY}{dz} \mathbf{k} = \text{grad } Y.$$

Потенциальная сила $\mathbf{F}$ равна градиенту силовой функции Y .

Примеры.

1. Для гравитационного взаимодействия двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии R , силовая функция равна

$$Y = G \frac{m_1 m_2}{R}.$$

2. Для электростатического взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии R , силовая функция равна

$$Y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{R}.$$

2°. В случае нестационарного поля сила $\mathbf{F}$, действующая со стороны поля на помещенную в него материальную точку M , зависит как от ее положения в поле, так и от времени: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t)$. Нестационарное поле называют *потенциальным полем*, а силу $\mathbf{F}$ — *нестационарной потенциальной силой*, если для произвольного замкнутого контура L , проведенного в поле, выполняется условие:

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{r} \equiv 0,$$

где значения силы $\mathbf{F}$ в разных точках контура L берутся в один и тот же момент времени, т. е. при вычислении интеграла предполагается, что обход всего контура осуществляется мгновенно (время t — фиксированный параметр).

Нестационарная потенциальная сила так же, как и стационарная, равна градиенту силовой функции:

$$\mathbf{F} = \text{grad } Y.$$

Однако в этом случае силовая функция зависит не только от координат материальной точки в поле, но и от времени. Поэтому элементарная работа силы $\mathbf{F}$ не равна полному дифференциалу силовой функции $Y(x, y, z, t)$:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = dY - \frac{dY}{dt} dt.$$

3°. Работа A_{1-2} потенциальной силы при конечном перемещении материальной точки в стационарном потенциальном поле из положения 1 в положение 2 равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях материальной точки:

$$A_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = Y_2 - Y_1.$$

Работа A_{1-2} не зависит от того, каким образом материальная точка перемещалась в стационарном потенциальном поле (например, по какой траектории, быстро или медленно и т. п.).

В случае нестационарной потенциальной силы эта формула верна лишь для мгновенного процесса переноса точки ее приложения, так как в противном случае подынтегральное выражение

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial z} dz$$

не является полным дифференциалом функции $Y(x, y, z, t)$.

4°. Типичным примером непотенциальных сил могут служить диссипативные силы — силы, зависящие от скоростей точек механической системы и совершающие отрицательную суммарную работу при любых перемещениях механической системы. Таковы, например, силы трения скольжения и силы сопротивления движению тел в жидкостях и газах.

К непотенциальным силам относятся также *гироскопические силы* — силы, зависящие от скоростей материальных точек, на которые они действуют, и направ-

ленные перпендикулярно к этим скоростям. Работа гироскопических сил всегда равна нулю. Например, гироскопической силой является магнитная сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу.

Механическую систему называют *консервативной системой*, если все действующие на нее непотенциальные силы (внешние и внутренние) работы не совершают, а все внешние потенциальные силы стационарны.

4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1°. *Механической энергией* W называют энергию механического движения и взаимодействия тел. Она равна сумме кинетической W_k и потенциальной W_n энергий:

$$W = W_k + W_n.$$

2°. *Кинетическая энергия тела* является мерой его механического движения и измеряется той работой, которую может совершить это тело при его торможении до полной остановки. Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы m точки на квадрат скорости v ее движения:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{pv}{2}.$$

В случае плоского движения, заданного в полярных координатах (ρ, φ) ,

$$W_k = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2).$$

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в его состав, и выражается следующим интегралом:

$$W_k = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV,$$

где dm — масса малого элемента тела, dV , ρ и v — объем, плотность и модуль скорости этого элемента, а m и V — масса и объем всего тела.

В случае поступательного движения тела со скоростью v :

$$W_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то его кинетическая энергия равна половине произведения момента инерции тела J относительно оси вращения на квадрат угловой скорости ω :

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int_m \rho^2 dm = \frac{L^2}{2J} = \frac{L\omega}{2},$$

где ρ — расстояние от элемента тела массой dm до оси вращения, L — проекция момента импульса на ось вращения.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью ω , равна

$$W_k = \frac{L\omega}{2},$$

где L — момент импульса тела относительно точки O .

Если J_1 , J_2 и J_3 — главные моменты инерции тела для точки O , а ω_1 , ω_2 и ω_3 — проекции вектора ω на главные оси инерции тела, проведенные через точку O , то кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O , равна

$$W_k = \frac{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2}{2}.$$

3°. В самом общем случае кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью v_C центра масс кинетической энергии W'_k системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс (*теорема Кенига*):

$$W_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m v_C^2}{2} + W'_k,$$

где

$$W'_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i'^2}{2}, \quad v_i' = v_i - v_C,$$

а $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса всей системы.

В частности, для твердого тела массы m

$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где J_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения вокруг центра масс, а ω — угловая скорость тела. В общем случае мгновенная ось перемещается в теле, и J_C изменяется с течением времени; $J_C = \text{const}$ в случае плоского движения тела (например, при скатывании кругового цилиндра или шара с наклонной плоскости).

Пользуясь системой координат, жестко связанной с телом, начало которой находится в центре масс C тела, выражение для кинетической энергии твердого тела можно представить в форме:

$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}{2};$$

здесь J_1, J_2, J_3 — главные центральные моменты инерции тела; а проекции вектора ω на главные центральные оси инерции тела равны

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\phi},$$

где ψ, θ и φ — углы Эйлера, $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$.

4°. *Потенциальной энергией* называют часть энергии механической системы, зависящую от конфигурации системы, т. е. от взаимного расположения частиц системы и их положения во внешнем силовом поле. Ее измеряют той работой, которую совершают потенциальные силы (внешние и внутренние), действующие на все частицы системы, при переходе от рассматриваемой конфигурации системы к такой, которую называют *нулевой конфигурацией* и для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Выбор нулевой конфигурации, т. е. начала отсчета потенциальной энергии, совершенно произволен, так как в любом опыте можно измерить только изменение по-

тенциальной энергии, но не ее абсолютное значение. В каждой конкретной задаче этот выбор производится так, чтобы максимально упростить ее решение.

Потенциальная энергия W_{Π} материальной точки в потенциальном поле связана с силовой функцией Y соотношением:

$$dW_{\Pi} = -dY \quad \text{и} \quad W_{\Pi} = -Y + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Сила F , действующая на материальную точку в потенциальном поле, равна взятому с обратным знаком градиенту потенциальной энергии этой материальной точки в поле:

$$F = -\text{grad } W_{\Pi} = -\left(\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} i + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} j + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} k\right) = -\nabla W_{\Pi},$$

так что проекции силы на оси декартовых координат равны

$$F_x = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z},$$

а $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ — оператор Гамильтона (оператор набла).

Элементарная работа потенциальной силы

$$\delta A = F dr = -\left(\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} dy + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z} dz\right).$$

В случае нестационарных потенциальных сил потенциальная энергия материальной точки зависит не только от координат этой точки, но еще и от времени: $W_{\Pi} = W_{\Pi}(x, y, z, t)$. Поэтому

$$\delta A = F dr = -\left(dW_{\Pi} - \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial t} dt\right).$$

5°. Потенциальная энергия системы

$$W_{\Pi} = W_{\Pi}^{\text{внеш}} + W_{\Pi}^{\text{внутр}}.$$

Здесь $W_{\Pi}^{\text{внеш}}$ — внешняя потенциальная энергия системы, обусловленная действием на нее внешних потенциальных сил, т. е. сил, приложенных со стороны тел,

не входящих в состав системы, а $W_n^{\text{внутр}}$ — внутренняя потенциальная энергия системы, обусловленная потенциальными силами взаимодействия между всеми ее частями. В общем случае $W_n^{\text{внутр}}$ зависит от координат всех n материальных точек, входящих в состав системы: $W_n^{\text{внутр}} = f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$, а $W_n^{\text{внеш}}$ может также зависеть явно от времени t : $f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t)$. Это связано с тем, что внешние тела, действующие на рассматриваемую систему, могут двигаться относительно системы отсчета (закон этого движения в каждой конкретной задаче предполагается заданным, а также считается, что все изменения поля внешних тел мгновенно распространяются по всему полю).

Если $F_i^{\text{внеш}} = F_i(\mathbf{r}_i, t)$ — результирующая всех внешних потенциальных сил, действующих на i -ю материальную точку системы, то

$$\frac{dW_n^{\text{внеш}}}{dt} = \frac{\partial W_n^{\text{внеш}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i),$$

где $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i -й точки. В случае стационарного внешнего силового поля

$$\frac{dW_n^{\text{внеш}}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad dW_n^{\text{внеш}} = - \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i) dt.$$

Внутренняя потенциальная энергия системы равна алгебраической сумме потенциальных энергий W_{ik} взаимодействия всевозможных пар точек системы:

$$W_n^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n W_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1, k \neq i}^n W_{ik},$$

где $W_{ik} = - \int \mathbf{F}_{ik} d\mathbf{r}_{ik} = - \int \mathbf{F}_{ki} d\mathbf{r}_{ki} = W_{ki}$, $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ и $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ — потенциальные силы взаимодействия i -й и k -й точек системы. В случае твердого тела $W_n^{\text{внутр}} = \text{const}$ и можно считать, что $W_n = W_n^{\text{внеш}}$.

Примеры.

1. Потенциальная энергия упруго деформированного тела (потенциальная энергия недеформированного тела принимается равной нулю) равна

$$W_{\pi} = \int_V w_{\pi} dV,$$

где w_{π} — объемная плотность потенциальной энергии, равная энергии деформации единицы объема тела ($w_{\pi} = \frac{dW_{\pi}}{dV}$), а интегрирование проводится по всему объему V

тела. В простейшем случае линейного растяжения или сжатия изотропного тела вдоль оси Ox в нем возникают потенциальные силы упругости, равнодействующая F которых по закону Гука равна $F = -kx$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от формы и размеров тела, а также от упругих свойств его материала, x — вектор деформации, совпадающей по направлению с вызвавшей ее внешней силой. Так как $F_x = -kx$, а $F_y = F_z = 0$, то

$$W_{\pi} = \frac{kx^2}{2}.$$

2. Потенциальная энергия материальной точки в поле центральных сил.

Центральная сила $F = \frac{F_r r}{r}$, где r — радиус-вектор, проведенный из центра сил O , а F_r — проекция силы на направление вектора r ; она потенциальна, если F_r зависит только от расстояния r до центра O , т. е. если $F_r = F_r(r)$. Потенциальная энергия материальной точки, на которую действует потенциальная центральная сила F , зависит от расстояния r между точкой и центром O по закону

$$W_{\pi} = \int_r^R F_r(r) dr,$$

где R — расстояние от центра сил до точки поля, в которой потенциальная энергия материальной точки принимается равной нулю. Чаще всего полагают $R = \infty$, т. е. полагают $W_{\pi}(\infty) = 0$.

Частные случаи поля центральных сил:

а) потенциальная энергия материальной точки массы m в центральном гравитационном поле Земли

$$W_{\pi} = -\frac{GmM}{r} \quad (r > R_0),$$

где M и R_0 — масса и радиус Земли, $W_{\pi}(\infty) = 0$;

б) потенциальная энергия точечного электрического заряда q в центральном электростатическом поле другого точечного заряда Q :

$$W_{\pi} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, r — расстояние между зарядами и $W_{\pi}(\infty) = 0$.

5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1°. Элементарное изменение кинетической энергии системы n материальных точек равно алгебраической сумме элементарных работ всех сил (внешних и внутренних), действующих на точки системы:

$$dW_k = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ — результирующая всех сил, приложенных к i -й материальной точке.

Элементарное изменение механической энергии системы

$$dW = \frac{\partial W_{\pi}}{\partial t} dt + \sum \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{r}_i,$$

где W_{π} — потенциальная энергия системы, а $\mathbf{f}_i$ — результирующая всех непотенциальных сил, действующих на i -ю материальную точку системы.

Это уравнение выражает **закон изменения механической энергии**: изменение механической энергии системы равно сумме работ, совершаемых всеми действующими на систему непотенциальными силами, и изменения

потенциальной энергии системы вследствие нестационарности внешних потенциальных сил.

Если непотенциальные силы на систему не действуют или не совершают работы, то полная производная по времени от механической энергии системы равна частной производной по времени от потенциальной энергии

$$\text{этой системы: } \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W_{\pi}}{\partial t}.$$

2°. Систему тел (материальных точек) называют *консервативной*, если все внешние силы, действующие на эти тела, являются стационарными и потенциальными, а все внутренние силы потенциальны. Потенциальная энергия консервативной системы не зависит явно от времени. Поэтому

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad W = W_{\kappa} + W_{\pi} = \text{const},$$

т. е. выполняется *закон сохранения механической энергии*: механическая энергия консервативной системы не изменяется с течением времени. В частности, сохраняется механическая энергия замкнутой консервативной системы.

3°. Систему тел называют *диссипативной системой*, если в ней действуют диссипативные силы. Эти силы вызывают в системе *диссипацию энергии* — процесс преобразования механической энергии в другие виды энергии (например, в энергию беспорядочного теплового движения молекул или других частиц системы). Если в замкнутой системе действуют только диссипативные силы, то механическая энергия системы постепенно уменьшается.

6. УДАР

1°. *Ударом* называют явление конечного изменения скоростей твердых тел за весьма малый промежуток времени τ , происходящее при их столкновениях. В процессе деформации тел при ударе возникают *мгновенные (ударные) силы*, величина которых весьма значительна. Для системы соударяющихся тел мгновенные силы являются внутренними силами. Их импульсы за время τ продолжительности удара называют *ударными импульсами*. Если в процессе удара влиянием внешних

сил можно пренебречь и считать, что система соударяющихся тел является замкнутой, то в ней выполняются законы сохранения импульса и момента импульса. Рассматривая соударяющиеся тела как систему, состоящую из n материальных точек, получаем:

$$\sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n m_i u_i$$

и

$$\sum_{i=1}^n r_i \times m_i v_i = \sum_{i=1}^n r_i \times m_i u_i,$$

где v_i и u_i — скорости материальной точки с массой m_i , соответственно до и после удара, а r_i — радиус-вектор этой точки.

2°. Общую нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называют *линией удара*. Удар называют *прямым*, если скорости центров масс соударяющихся тел перед ударом параллельны линии удара. В противном случае удар называют *косым*. Удар называют *центральный*, если при ударе центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

Пр и м е р. Прямой центральный удар двух тел, движущихся поступательно. Скорости тел до удара v_1, v_2 и после него u_1, u_2 направлены вдоль одной прямой — оси Ox , проходящей через центры масс тел. Проекции этих скоростей на ось Ox связаны соотношениями:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - km_2)v_{1x} + m_2(1+k)v_{2x}}{m_1 + m_2},$$

$$u_{2x} = \frac{m_1(1+k)v_{1x} + (m_2 - km_1)v_{2x}}{m_1 + m_2},$$

$$k = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}.$$

Величину k называют *коэффициентом восстановления*. Она равна отношению модулей относительных скоростей тел после и до удара и зависит только от уп-

ругих свойств соударяющихся тел. Уменьшение кинетической энергии тел в результате удара равно

$$-\Delta W_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{1x} - v_{2x})^2 (1 - k^2).$$

Эта часть механической энергии системы преобразуется в ее внутреннюю энергию. Если ударные силы потенциальны, то удар называют *вполне упругим* и $k = 1$. Удар называют *абсолютно неупругим*, если после него тела движутся с одинаковой скоростью, т. е. $u_{1x} = u_{2x}$ и $k = 0$. Во всех остальных случаях удар называют *неупругим* и $0 < k < 1$.

Глава 4

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

1°. *Моментом инерции тела* относительно оси называют величину, являющуюся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равную сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний от той же оси. Моменты инерции тела относительно осей прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$J_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV,$$

$$J_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV,$$

$$J_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV,$$

где m , ρ и V — масса, плотность и объем тела, а x , y и z — координаты малого элемента тела объемом dV и массой dm . Для однородного тела момент инерции относительно оси прямо пропорционален плотности тела и зависит от формы и размеров тела, а также от его расположения относительно оси.

Величины $r_x = \sqrt{\frac{J_{xx}}{m}}$, $r_y = \sqrt{\frac{J_{yy}}{m}}$ и $r_z = \sqrt{\frac{J_{zz}}{m}}$ называют радиусами инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz соответственно.

Для дискретной системы n материальных точек

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i, \quad J_{yy} = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i,$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

2°. *Теорема Гюйгенса—Штейнера*: момент инерции J_a тела относительно произвольной оси a равен сумме момента инерции J_C этого тела относительно оси a' , параллельной оси a и проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между осями a и a' (аналогично для произвольной системы материальных точек):

$$J_a = J_C + md^2.$$

Таким образом, момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр инерции, меньше момента инерции относительно любой параллельной ей оси.

3°. *Центробежными моментами инерции тела* по отношению к осям прямоугольной системы координат (Ox , Oy , Oz) называют следующие выражения:

$$J_{xy} = \int_m xy \, dm = \int_V xy \, \rho dV,$$

$$J_{xz} = \int_m xz \, dm = \int_V xz \, \rho dV,$$

$$J_{yz} = \int_m yz \, dm = \int_V yz \, \rho dV.$$

Для системы n материальных точек

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i,$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i.$$

4°. Моменты инерции твердого тела J_a относительно всевозможных осей a , проходящих через какую-либо точку O , связаны с моментами инерции этого тела по отношению к осям координатной системы (Ox, Oy, Oz) , начало которой совпадает с O , следующим соотношением:

$$J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где α, β и γ — углы, образуемые осью a соответственно с осями Ox, Oy и Oz .

Ось Ox называют *главной осью инерции тела* в точке O , если центробежные моменты инерции J_{xy} и J_{xz} одновременно равны нулю. Через каждую точку O тела можно провести три жестко связанные с телом взаимно перпендикулярные главные оси инерции Ox', Oy' и Oz' так, что

$$J_a = J_1 \cos^2 \alpha' + J_2 \cos^2 \beta' + J_3 \cos^2 \gamma',$$

где α', β' и γ' — углы, образуемые осью a с осями Ox', Oy' и Oz' , а J_1, J_2 и J_3 — моменты инерции тела по отношению к главным осям инерции в точке O , называемые *главными моментами инерции* тела.

5°. Если через точку O твердого тела провести всевозможные оси a и вдоль каждой из них отложить отрезки OA , равные $\frac{1}{\sqrt{J_a}}$, то геометрическое место точек A

будет представлять собой эллипсоид, называемый *эллипсоидом инерции* тела в точке O . Оси эллипсоида инерции совпадают с главными осями инерции тела в точке O . Уравнения эллипсоида инерции в системах координат (Ox, Oy, Oz) и (Ox', Oy', Oz') имеют вид

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1,$$

$$J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = 1.$$

Центральным эллипсоидом инерции твердого тела называют эллипсоид инерции, соответствующий центру масс этого тела. Оси центрального эллипсоида инерции тела называют *главными центральными осями инерции*, а моменты инерции тела относительно этих осей — *главными центральными моментами инерции*.

Главная центральная ось инерции является главной осью инерции во всех точках тела, принадлежащих этой оси.

Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из его главных центральных осей инерции.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O , называют *телом вращения в динамическом смысле*, если его эллипсоид инерции для точки O представляет собой эллипсоид вращения. Ось вращения эллипсоида инерции называют *осью динамической симметрии тела*.

6°. Главные центральные моменты инерции некоторых однородных тел простейшей формы (m — масса тела):

1) прямолинейный тонкий стержень длиной l вдоль оси Oz :

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} ml^2, \quad J_{zz} = 0;$$

2) прямоугольный параллелепипед со сторонами a , b и c , параллельными соответственно осям Ox , Oy и Oz :

$$J_{xx} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2), \quad J_{yy} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2),$$

$$J_{zz} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2);$$

3) полый прямой круговой цилиндр высотой H и радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными R_1 и R_2 (Oz — ось цилиндра):

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{m}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2),$$

$$J_{zz} = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

Для сплошного цилиндра ($R_2 = 0$; $R_1 = R$):

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{m}{12} (3R^2 + H^2), \quad J_{zz} = \frac{m}{2} R^2.$$

Для боковой поверхности тонкостенного полого цилиндра ($R_1 = R_2 = R$):

$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{m}{12} (6R^2 + H^2), \quad J_{zz} = mR^2;$$

4) полый шар с радиусами внешней и внутренней поверхностей, равными R_1 и R_2 :

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5} m \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Для сплошного шара ($R_2 = 0$; $R_1 = R$):

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5} m R^2,$$

для тонкостенной сферы ($R_1 = R_2 = R$):

$$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{3} m R^2$$

и шарового сектора (Oz' — ось симметрии):

$$J_{z'} = \frac{mh}{20} (3R - h),$$

где R — радиус шаровой поверхности, h — высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору.

Для шарового сегмента (Oz' — ось симметрии):

$$J_{z'} = \frac{mh}{20} \frac{20R^2 - 15Rh + 3h^2}{3R - h};$$

5) прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H (Oz' — ось конуса):

$$J_{x'} = J_{y'} = \frac{3m}{20} \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right), \quad J_{z'} = \frac{3}{10} m R^2.$$

Для боковой поверхности тонкостенного полого конуса:

$$J_{z'} = \frac{1}{2} m R^2;$$

6) усеченный прямой круговой конус высотой H и радиусами оснований R_1 и R_2 (Oz' — ось конуса):

$$J_{z'} = \frac{3m}{10} \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Для боковой поверхности тонкостенного усеченного конуса:

$$J_{z'} = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2);$$

7) прямая прямоугольная пирамида высотой H , стороны основания a и b параллельны, соответственно, осям Ox' и Oy' :

$$J_{x'} = \frac{m}{20} \left(b^2 + \frac{3}{4} H^2 \right), \quad J_{y'} = \frac{m}{20} \left(a^2 + \frac{3}{4} H^2 \right),$$

$$J_{z'} = \frac{m}{20} (a^2 + b^2);$$

8) эллипсоид с полуосями a , b и c , параллельными соответственно осям Ox' , Oy' , Oz' :

$$J_{x'} = \frac{m}{5} (b^2 + c^2), \quad J_{y'} = \frac{m}{5} (a^2 + c^2),$$

$$J_{z'} = \frac{m}{5} (a^2 + b^2);$$

9) кольцо со средним радиусом R с круговым поперечным сечением радиусом r (тор); ось Oz' перпендикулярна к плоскости, в которой лежат центры поперечных сечений:

$$J_{x'} = J_{y'} = \frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2), \quad J_{z'} = m \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right).$$

2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

1°. *Моментом импульса (моментом количества движения) материальной точки относительно некоторой точки (полюса) называют векторную величину L_i , равную векторному произведению радиуса-вектора r_i материальной точки, проведенного из полюса, на импульс материальной точки $p_i = m_i v_i$:*

$$L_i = r_i \times m_i v_i.$$

Моментом импульса или *кинетическим моментом* системы материальных точек относительно полюса называют вектор L , равный геометрической сумме моментов импульса относительно того же полюса всех n точек системы:

$$L = \sum_{i=1}^n r_i \times m_i v_i.$$

Момент импульса тела относительно полюса равен

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV,$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и ρ — соответственно радиус-вектор, скорость и плотность малого элемента тела, имеющего массу dm и объем dV .

2°. Центр масс C системы материальных точек обладает тем свойством, что моменты импульса этой системы относительно C для абсолютного движения точек ($\mathbf{L}_C$) и для их относительного движения ($\mathbf{L}_{C'}$) по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в точке C одинаковы: $\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_{C'}$, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i,$$

где $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C$ — скорости абсолютного и относительного движений точки с массой m_i , положение которой относительно C определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C$. Моменты импульса системы относительно ее центра масс ($\mathbf{L}_C$) и неподвижного полюса ($\mathbf{L}$) связаны соотношением

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{L} - m \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C = \mathbf{L} - \mathbf{r}_C \mathbf{p},$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы, $\mathbf{v}_C$ — абсолютная скорость центра инерции по отношению к полюсу, а $\mathbf{p} = m \mathbf{v}_C$ — импульс системы.

3°. Моментом импульса системы материальных точек (тела) относительно оси a называется величина L_a , равная проекции на ось a вектора $\mathbf{L}$ момента импульса системы (тела) относительно любого полюса, принадлежащего этой оси. Моменты импульса системы n

материальных точек относительно осей неподвижной прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$L_x = \sum_{i=1}^n (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) m_i,$$

$$L_y = \sum_{i=1}^n (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) m_i,$$

$$L_z = \sum_{i=1}^n (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) m_i,$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i -й материальной точки системы, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} — проекции ее скорости v_i на оси координат.

Для тела проекции вектора момента импульса равны

$$L_x = \int (y v_z - z v_y) dm,$$

$$L_y = \int (z v_x - x v_z) dm,$$

$$L_z = \int (x v_y - y v_x) dm,$$

где x, y, z — координаты малого элемента тела массой dm , а v_x, v_y, v_z — проекции скорости этого элемента на оси координат.

Момент импульса тела или системы материальных точек относительно произвольной оси a , проходящей через начало координат, равен

$$L_a = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma,$$

где α, β, γ — углы, образуемые осью a с осями координат Ox, Oy, Oz .

4°. При вращении твердого тела вокруг неподвижной точки полюса O с угловой скоростью ω момент импульса тела L относительно полюса пропорционален модулю угловой скорости ($L \sim \omega$), но в общем случае не совпадает с ω по направлению. Связь между проекциями

векторов $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси неподвижной декартовой системы координат с началом в точке O имеет вид

$$L_x = J_{xx}\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z,$$

$$L_y = -J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y - J_{yz}\omega_z,$$

$$L_z = -J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y - J_{zz}\omega_z.$$

Здесь J_{xx} , J_{yy} и J_{zz} — моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy и Oz , а $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$ и $J_{yz} = J_{zy}$ — центробежные моменты инерции тела. Если x , y и z — координаты малого элемента тела массой dm , то

$$J_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad J_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm,$$

$$J_{zz} = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

$$J_{xy} = \int_m xy dm, \quad J_{xz} = \int_m xz dm, \quad J_{yz} = \int_m yz dm.$$

Векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$, в отличие от их проекций на оси координат, не зависят от ориентации этих осей относительно тела. Если оси координат совпадают с главными осями инерции тела в точке O , то все центробежные моменты инерции равны нулю.

5°. При вращении тела вокруг неподвижной оси a момент импульса тела относительно этой оси равен произведению момента инерции тела J_a относительно этой оси на модуль угловой скорости тела (если принять за положительное направление оси a направление вектора $\boldsymbol{\omega}$): $L_a = J_a \omega$.

3. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

1°. *Закон изменения момента импульса*: производная по времени от момента импульса $\mathbf{L}$ механической системы относительно неподвижной точки (полюса O) равна главному моменту $\mathbf{M}^{\text{внеш}}$ относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{\text{внеш}}.$$

В частности, для твердого тела это уравнение выражает *основной закон динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки*.

В проекциях на оси неподвижной прямоугольной декартовой системы координат с началом в полюсе O закон изменения момента импульса системы записывается в виде:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}},$$

где L_x, L_y, L_z и $M_x^{\text{внеш}}, M_y^{\text{внеш}}, M_z^{\text{внеш}}$ — моменты импульса системы и главные моменты внешних сил относительно соответствующих осей координат.

2°. Уравнение динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O , в жестко связанной с телом подвижной системе координат (x', y', z') , начало которой находится в точке O , имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{\text{внеш}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ — момент импульса тела и главный момент приложенных к нему внешних сил относительно точки O , $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения тела, а $\frac{d\mathbf{L}}{dt} =$

$$= \frac{dL_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dL_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dL_{z'}}{dt} \mathbf{k}'$$
 — относительная производная по времени от вектора $\mathbf{L}$, $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ — орты подвижной системы. Если оси подвижной системы координат совпадают с главными осями инерции тела в точке O , то уравнения движения тела в проекциях на эти оси имеют вид

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1,$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = M_2,$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3,$$

где J_1, J_2 и J_3 — главные моменты инерции тела в точке O , ω_1, ω_2 и ω_3 — проекции вектора угловой скорости

тела на главные оси инерции, $\dot{\omega}_i = \frac{d\omega_i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$), а $M_1,$

M_2 и M_3 — моменты всех внешних сил относительно тех же осей. Эти уравнения называют *динамическими уравнениями Эйлера*.

3°. Основной закон динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(J_z \omega_z) = M_z^{\text{внеш}},$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси Oz . Если тело не деформируется, то $J_z = \text{const}$ и

$$J_z \varepsilon_z = M_z^{\text{внеш}},$$

где $\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}$ — угловое ускорение тела.

4°. Свободное твердое тело в общем случае одновременно участвует в двух движениях — поступательном со скоростью v_C центра масс тела и вращательном вокруг центра масс с угловой скоростью ω . Векторы v_C и ω удовлетворяют следующим двум *дифференциальным уравнениям движения свободного твердого тела*:

$$m a_C = F^{\text{внеш}} \quad \text{и} \quad \frac{dL'_C}{dt} = M_C^{\text{внеш}},$$

где m — масса тела, a_C — ускорение центра масс, $F^{\text{внеш}}$ — главный вектор внешних сил, $M_C^{\text{внеш}}$ — главный момент внешних сил относительно центра масс C , а $L'_C = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v}' \, dm$, где $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{v}'$ — радиус-вектор и скорость малого элемента тела массой dm в поступательно движущейся системе координат с началом в точке C .

Для описания вращения твердого тела вокруг его центра масс справедливы также динамические уравнения Эйлера, в которых J_i , ω_i и M_i ($i = 1, 2, 3$) — главные центральные моменты инерции тела, проекции угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции и главные моменты внешних сил относительно тех же осей.

4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

1°. *Закон сохранения момента импульса:* момент импульса замкнутой механической системы относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени, т. е.

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L = \text{const.}$$

Если замкнутая система состоит из n материальных точек, а неподвижная точка принята за начало координат неподвижной инерциальной системы отсчета, то

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \text{const.},$$

где $\mathbf{r}_i$, m_i и $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ — радиус-вектор, масса и скорость i -й материальной точки системы.

В проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат закон сохранения момента импульса записывается в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) &= \text{const.}, \\ \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) &= \text{const.}, \\ \sum_{i=1}^n m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Закон сохранения момента импульса — один из фундаментальных законов природы, связанный с изотропностью пространства.

2°. Из закона изменения момента импульса следует, что момент импульса замкнутой системы относительно ее центра масс не изменяется с течением времени:

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C \dot{=} 0 \quad \text{и} \quad L_C = L'_C = \text{const},$$

где для системы, состоящей из n материальных точек,

$$L_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{v}_i,$$

$$L'_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_C).$$

В проекциях на оси $O'x'$, $O'y'$ и $O'z'$ подвижной системы, перемещающейся поступательно так, что ее начало O' всегда совпадает с центром масс, закон сохранения момента импульса записывается в виде системы уравнений:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (v'_i v'_{iz} - z'_i v'_{iy}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (z'_i v'_{ix} - x'_i v'_{iz}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (x'_i v'_{iy} - y'_i v'_{ix}) = 0.$$

3°. Если момент внешних сил относительно центра масс твердого тела равен нулю, то вращение тела вокруг центра масс называют *свободным (инерционным) вращением*. Оно описывается следующими тремя уравнениями, вытекающими из уравнений Эйлера:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = 0,$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = 0,$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = 0,$$

где J_1 , J_2 и J_3 — главные центральные моменты инерции тела, а ω_1 , ω_2 и ω_3 — проекции вектора угловой

скорости тела на главные центральные оси. При этом центр масс тела движется по закону

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — главный вектор системы внешних сил, m — масса тела.

4°. Свободное вращение тела называют *стационарным*, если вектор ω угловой скорости тела постоянен. Необходимым и достаточным условием такого движения является вращение тела вокруг одной из главных центральных осей. Однако практически стационарное свободное вращение осуществляется только вокруг главных центральных осей (с наибольшим и наименьшим моментами инерции), называемых *свободными осями* тела, тогда как свободное вращение относительно третьей оси является неустойчивым.

5°. Если механическая система не замкнута, но главный момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной точки O тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно этой точки не изменяется с течением времени.

Момент импульса незамкнутой механической системы относительно неподвижной оси a не изменяется, если равен нулю главный момент внешних сил относительно этой оси: если $M_a^{\text{внеш}} = 0$, то $L_a = \text{const}$. В частности, для тела, вращающегося вокруг оси Oz неподвижной системы координат, $J_z \omega_z = \text{const}$, если $M_z^{\text{внеш}} = 0$.

5. ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

1°. Силу, действующую на движущуюся материальную точку или тело, называют *центральной*, если ее линия действия все время проходит через одну и ту же неподвижную точку O , называемую *центром силы*:

$$\mathbf{F} = F_r \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра O в точку приложения силы $\mathbf{F}$; F_r — проекция силы на направление радиуса-вектора. Примерами центральных сил

являются силы тяготения между материальными точками и силы электростатического взаимодействия между точечными электрическими зарядами, для которых F_r обратно пропорционально r^2 .

2°. При движении материальной точки под действием центральной силы ее момент импульса относительно центра O силы не изменяется:

$$\frac{dL}{dt} = M = 0, \quad L = r \times mv = \text{const.}$$

Поэтому точка движется в плоскости

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0,$$

перпендикулярной к L и проходящей через точку O . Секторная скорость точки постоянна (*второй закон Кеплера*):

$$2\sigma = r^2 \dot{\phi} = \frac{L}{m},$$

где r и ϕ — полярные координаты точки в плоскости ее движения (декартовы координаты точки ξ и η).

3°. Если центральная сила, действующая на рассматриваемую материальную точку, зависит только от r : $F_r = F(r)$, то эта сила является потенциальной.

Потенциальная, кинетическая и полная энергии точки равны:

$$W_{\pi}(r) = - \int F_r(r) dr,$$

$$W_k = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

$$W = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + W_{\pi}(r).$$

Связь между полярными координатами точки и временем имеет вид:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [W - W_{\pi}(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]}}.$$

$$\phi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[W - W_{\pi}(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

Вторая формула определяет уравнение траектории (орбиты) материальной точки, а первая — закон движения точки вдоль этой траектории.

4°. Полная энергия W точки в процессе движения не изменяется. Поэтому область возможных значений полярного радиуса r точки определяется из условия

$$\frac{L^2}{2mr_*^2} + W_{\pi}(r_*) = W,$$

где r_* — экстремальные значения r , т. е. $r_{\text{макс}}$ и $r_{\text{мин}}$. Если $r_{\text{макс}}$ — конечная величина, то движение называют *финитным*. При этом траектория точки заключена внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{\text{мин}}$ и $r = r_{\text{макс}}$. Все траектории финитного движения точки замкнуты, если потенциальная энергия W_{π} пропорциональна $\frac{1}{r}$ или r^2 . Если максимальное значение r не ограничено, то движение называют *инфинитным*.

5°. *Задача Кеплера* — движение материальной точки под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра силы:

$$F = -\frac{\beta}{r^2} r \quad \text{и} \quad W_{\pi} = -\frac{\beta}{r},$$

где β — постоянная величина. Если $\beta < 0$, то точка отталкивается от центра (кулоновское взаимодействие одноименных точечных зарядов); если $\beta > 0$, то точка притягивается к центру (гравитационное взаимодействие материальных точек и кулоновское взаимодействие разноименных точечных зарядов).

Траектория точки — коническое сечение, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos \psi} \quad (\beta > 0),$$

$$r = \frac{\rho}{-1 + e \cos \psi} \quad (\beta < 0),$$

где $\rho = \frac{L^2}{m|\beta|}$ — параметр орбиты, $e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{m\beta^2}}$ — эксцентриситет орбиты, W — полная энергия точки, а L — ее момент импульса относительно центра.

1-й случай. $\beta > 0$. Центр силы лежит в фокусе орбиты материальной точки. Расстояние от него до ближайшей точки орбиты, называемой *перигелием*, равно

$$r_{\min} = \frac{\rho}{1+e}.$$

Если $W > 0$, то $e > 1$, и орбита имеет форму гиперболы; если $W = 0$, то $e = 1$, т. е. орбита — парабола; если $W < 0$, то $e < 1$ — орбита эллиптическая (рис. 1.4.1), полуоси которой равны:

$$a = \frac{\rho}{1-e^2} = \frac{\beta}{2|W|}, \quad b = \frac{\rho}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|W|}}.$$

Период обращения точки по эллиптической орбите:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^3}{\beta}}.$$

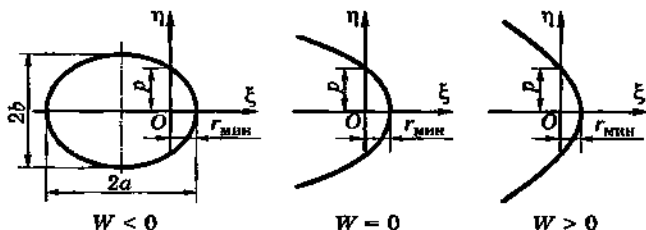


Рис. 1.4.1

2-й случай. $\beta < 0$. Полная энергия точки

$$W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{|\beta|}{r} \geq 0.$$

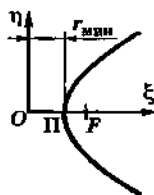


Рис. 1.4.2

Поэтому движение всегда инфинитно, а траектория имеет вид гиперболы ($W > 0$) или параболы ($W = 0$). Центр силы O и фокус орбиты F расположены на ее оси симметрии по разные стороны от перигелия Π (рис. 1.4.2), причем

$$r_{\min} = \frac{\rho}{e-1}.$$

Примеры.

1. Движение планет в гравитационном поле Солнца: $\beta = GmM > 0$, где m — масса планеты, M — масса Солнца, G — постоянная тяготения. Движение планет финитное, т. е. $W < 0$. Поэтому справедливы следующие два закона:

1) планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце (*первый закон Кеплера*);

2) отношение кубов больших полуосей орбит к квадратам времен обращения для всех планет Солнечной системы одинаково (*третий закон Кеплера*):

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} - \frac{\beta}{m} = GM = \text{const.}$$

2. Движение тел в гравитационном поле Земли: $\beta = -GmM = -g_0 m R_0^2$, где m — масса тела, M — масса Земли, g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли, радиус которой равен R_0 (влияние суточного вращения Земли не учитывается).

Первой космической или круговой скоростью v_1 называют скорость, которую нужно сообщить телу для превращения его в спутник Земли, обращающийся по круговой орбите ($e = 0$) радиусом R_0 :

$$v_1 = \sqrt{g_0 R_0} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Второй космической или параболической скоростью v_2 называют наименьшую скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической ($e = 1$), т. е. чтобы тело преодолело притяжение Земли и превратилось в спутник Солнца:

$$v_2 = \sqrt{2g_0 R_0} = 11,2 \text{ км/с.}$$

Примечание. Влияние сопротивления атмосферы при вычислении v_1 и v_2 не учитывается.

6. ГИРОСКОП

1°. *Гироскопом* называют симметричное твердое тело, которое вращается вокруг какой-либо фиксированной точки O , лежащей на оси динамической симметрии тела. Точку O называют *точкой подвеса гироскопа*. Гироскоп называют *уравновешенным*, если точка подвеса совпадает с его центром тяжести (центром масс C). В противном случае гироскоп называют *тяжелым*. Момент силы тяжести тяжелого гироскопа относительно точки подвеса отличен от нуля и существенно влияет на движение гироскопа.

Если точка подвеса O гироскопа неподвижна, а ориентация в пространстве мгновенной оси вращения гироскопа ничем не ограничена, то гироскоп имеет три степени свободы. Если эта ось может занимать любые положения лишь в некоторой неподвижной плоскости, проходящей через точку O , то гироскоп обладает двумя степенями свободы.

2°. Инерционное вращение уравновешенного гироскопа, имеющего три степени свободы.

Кинетическая энергия уравновешенного гироскопа и его момент импульса L относительно неподвижной точки подвеса O (центра масс C) постоянны. Из уравнений инерционного вращения твердого тела вокруг его центра масс при $J_1 = J_2$ следует, что

$$\dot{\omega}_3 = 0, \quad \omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0,$$

т. е. ω_3 , $\omega_1^2 + \omega_2^2$ и $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ имеют постоянные значения.

Возможны два случая:

$$1) \omega_1 = \omega_2 = 0, \text{ так что } \omega = \omega_3 \text{ и } \omega = \frac{L}{J_3} = \text{const.}$$

При инерционном вращении уравновешенного гироскопа вокруг оси динамической симметрии ориентация этой оси по отношению к осям неподвижной инерциальной системы отсчета не изменяется с течением времени.

2) $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$, т. е. мгновенная ось вращения гироскопа не совпадает с его осью динамической симметрии Oz' .

Ось Oz' равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz , совпадающей с вектором L , описывая круговую коническую поверхность с вершиной в точке C с углом раствора 2θ , определяемым из условия

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{J_1}{J_3} \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Такое движение называют *регулярной прецессией*, а угол — *углом нутации*. Угловая скорость прецессии равна

$$\Omega = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sin \theta} = \omega_3 \sqrt{\left(\frac{J_3}{J_1}\right)^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Если $\omega_1^2 + \omega_2^2 \ll \omega_3^2$, то угол нутации при регулярной прецессии мал, и ось Oz' практически совпадает с неподвижной осью Oz .

3°. Влияние внешних сил на движение гироскопа, имеющего три степени свободы.

В приближенной теории гироскопа предполагается, что он быстро вращается с собственной угловой скоростью ω вокруг оси динамической симметрии Oz' , которая в свою очередь под действием приложенных к ней внешних сил медленно движется вокруг неподвижной точки подвеса O . Это движение оси гироскопа называется *прецессией*. Векторы ω и $L = J_3 \omega$ называют *собственной угловой скоростью* и *собственным моментом импульса гироскопа*.

Если внешняя сила F приложена в точке A оси Oz' (рис. 1.4.3), то ее момент M относительно точки O равен

$$M = r_a \times F = \frac{r_a}{J_3 \omega_3} L \times F,$$

где r_a — радиус-вектор точки A , ω_3 — проекция собственной угловой скорости ω гироскопа на ось Oz' . В соответствии с основным законом динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, скорость изменения момента импульса гироскопа равна

$$\frac{dL}{dt} = \frac{r_a}{J_3 \omega_3} L \times F.$$

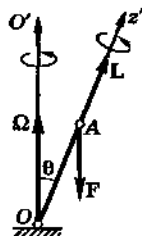


Рис. 1.4.3

Векторы $d\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, под действием силы $\mathbf{F}$, приложенной к оси Oz' гироскопа, вектор $\mathbf{L}$ и ось гироскопа прецессируют вокруг мгновенной оси OO' , параллельной силе $\mathbf{F}$. Угловая скорость прецессии

$$\Omega = -\frac{r_a}{J_3 \omega_3} F.$$

Вектор

$$\mathbf{M}_g = -\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega} = J_3(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega})$$

называют *гироскопическим моментом*. Гироскопический момент приложен к внешнему телу, вызывающему прецессию гироскопа с угловой скоростью Ω .

Если $\Omega = \text{const}$ и угол θ между векторами $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ тоже постоянен, то прецессию называют *регулярной*. Как показывает точная теория, в случае регулярной прецессии гироскопический момент равен

$$\mathbf{M}_g = J_3(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) (1 + \cos \theta).$$

Эта формула совпадает с приближенной в следующих случаях:

а) $\omega \gg \Omega$ (исходное положение приближенной теории);

б) $\theta = 90^\circ$;

в) $J_3 = J_1 = J_2$ (сферический гироскоп).

Пример. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа, обусловленная его силой тяжести: $\mathbf{M}_g = \mathbf{P} \times \mathbf{r}_C$, где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{P}$ — сила тяжести. Прецессия происходит вокруг вертикальной оси, образующей угол θ с осью гироскопа. Угловая скорость прецессии определяется из уравнения

$$J_3 \omega \Omega \left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3} \cos \theta \right) = P r_C.$$

Регулярная прецессия возможна при условии

$$J_3^2 \omega^2 + 4(J_3 - J_1) P r_C \cos \theta > 0,$$

Имеются две угловые скорости прецессии:

$$\Omega = \frac{-J_3 \omega \pm \sqrt{J_3^2 + 4(J_3 - J_1) P r_C \cos \theta}}{2(J_3 - J_1) \cos \theta}.$$

Если собственная угловая скорость гироскопа достаточно велика, то

$$\Omega_1 = \frac{P r_C}{J_3 \omega} \text{ — медленная прецессия,}$$

$$\Omega_2 = \frac{J_3 \omega}{(J_1 - J_3) \cos \theta} \text{ — быстрая прецессия.}$$

4°. Для осуществления регулярной прецессии тяжелого гироскопа (или уравновешенного гироскопа, подверженного действию постоянной силы) необходимо соблюдение строго определенных начальных условий его движения. В противном случае возникает *псевдoreгулярная прецессия*, при которой угол нутации θ периодически изменяется. Чем больше собственная угловая скорость ω гироскопа, тем меньше размах колебаний величины угла θ и соответствующего им движения гироскопа, называемого *нутацией*.

Если ось динамической симметрии тяжелого гироскопа, имеющего три степени свободы, расположена вертикально, а его центр масс находится выше точки опоры, то вращение гироскопа вокруг этой оси будет устойчивым, если собственная угловая скорость гироскопа

удовлетворяет условию $\omega > \frac{2(PJ_1 r_C)^{1/2}}{J_3}$. Такой ги-

роскоп называют «*спящим волчком*».

5°. Уменьшение числа степеней свободы гироскопа с трех до двух приводит к качественному изменению поведения гироскопа при внешних воздействиях. Так, например, «*спящий волчок*» полностью теряет свою устойчивость независимо от величины его собственной угловой скорости.

Внешняя сила F , приложенная к оси Oz' динамической симметрии гироскопа с двумя степенями свободы и направленная в плоскости, перпендикулярной к второй оси Ox его вращения, вызывает свободное вращение гироскопа вокруг оси Ox в направлении действия силы. Это связано с тем, что под влиянием силы F и собственного вращения гироскопа в неподвижно закрепленных подшипниках оси Ox возникает пара сил, которая приложена к гироскопу и создает момент M , совпадающий по направлению с силой F и вызывающий поворот в том же направлении оси Oz' .

Благодаря суточному вращению Земли ось динамической симметрии гироскопа с двумя степенями свободы, беспрепятственно вращающегося вокруг вертикальной оси, устанавливается в плоскости географического меридиана так, что угол между угловыми скоростями Земли и гироскопа острый. Это свойство гироскопа впервые было использовано Фуко для экспериментального доказательства существования суточного вращения Земли.

Глава 5

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. *Обобщенными координатами* механической системы называют независимые параметры $q_1, q_2, \dots, q_l$ полностью определяющие конфигурацию этой системы, т. е. положение всех ее точек по отношению к системе отсчета.

Обобщенными скоростями системы называют производные по времени от обобщенных координат системы:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, l).$$

2°. *Числом степеней свободы* механической системы называют число s независимых возможных движений этой системы. Для голономной системы число степеней свободы равно числу обобщенных координат этой системы: $s = l$. В случае неголономной системы $s = l - k$, где k — число неголономных связей, наложенных на эту систему. В дальнейшем рассматриваются только голономные системы.

3°. *Виртуальными (возможными) перемещениями* механической системы называют всякое бесконечно малое изменение конфигурации системы, согласующееся со связями, наложенными на систему в рассматриваемый момент времени t . Если связи стационарны, то действительное перемещение системы за бесконечно

малый промежуток времени dt совпадает с одним из ее виртуальных перемещений. В случае нестационарных связей действительное перемещение системы не совпадает ни с одним из виртуальных, так как за время dt условия, накладываемые связями, изменяются.

Виртуальное перемещение $\delta \mathbf{r}_k$ k -й материальной точки системы, обладающей s степенями свободы, равно

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

где δq_i — бесконечно малые приращения обобщенных координат, соответствующие виртуальному перемещению системы и называемые *изохорными вариациями обобщенных координат*.

4°. Элементарная работа (*виртуальная работа*), совершаемая на виртуальном перемещении силами, действующими на все n материальных точек голономной системы с s степенями свободы, равна

$$\delta A = \sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i,$$

где $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{R}_k$; $\mathbf{F}_k^{(a)}$ и $\mathbf{R}_k$ — результирующие, соответственно, активных сил и реакций связей, приложенных к k -й материальной точке. Величину

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \right)$$

называют *обобщенной силой*, сопряженной с обобщенной координатой q_i .

Связи называют *идеальными*, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k^{ид} \delta \mathbf{r}_k = 0.$$

Это условие справедливо, например, для тела, скользящего по абсолютно гладкой поверхности или катящегося без скольжения по абсолютно шероховатой поверхности.

В случае идеальных связей обобщенные силы выражаются только через активные силы:

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \left(F_k^{(a)} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right).$$

Если все силы $F_k^{(a)}$ потенциальные (консервативные), то

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

где U — полная (внешняя и внутренняя) потенциальная энергия системы.

В общем случае

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q'_i,$$

где $Q'_i = \sum_{k=1}^n \left(f_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right)$ — обобщенная непотенциальная сила, f_k — результирующая всех непотенциальных сил, действующих на k -ю материальную точку системы.

5°. Функцией Лагранжа (лагранжианом) L называют разность между кинетической T и потенциальной U энергиями системы. Она является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t).$$

Здесь под q и $\dot{q}$ понимают всю совокупность s обобщенных координат и s обобщенных скоростей голономной системы.

Кинетическая энергия голономной системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2 = a + \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где $a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial t} \right)^2$; $a_i = \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \right)$; $a_{ij} = a_{ji} =$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial q_i} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right)$; m — масса k -й точки системы, а

r_k и $v_k = \frac{dr_k}{dt}$ — радиус-вектор и скорость этой точки.

В случае свободной системы или системы со стационарными связями $\frac{\partial r_k}{\partial t} = 0$ и $a = a_i = 0$, т. е. кинетическая энергия системы не зависит явно от времени и является однородной функцией второй степени от обобщенных скоростей:

$$T = \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = T(q, \dot{q}).$$

Этот результат справедлив, в частности, для консервативных систем, так как эти системы либо свободны, либо подчинены стационарным идеальным связям. Потенциальная энергия и функция Лагранжа любой консервативной системы также не зависят явно от времени:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q).$$

Примеры.

1. Материальная точка массой m движется в поле центральных сил. Функция Лагранжа в декартовых координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

в цилиндрических координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}),$$

в сферических координатах:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - U(r).$$

2. В системе из двух материальных точек массами m_1 и m_2 , имеющих радиус-вектор относительного движения $\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1) - \mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ и центр масс с радиусом-вектором $\mathbf{r}_C(x_C, y_C, z_C)$, функция Лагранжа

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

6°. *Обобщенный импульс* p_i , сопряженный с обобщенной координатой q_i , есть частная производная от функции Лагранжа L (или от кинетической энергии T) по обобщенной скорости $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

Примеры.

1. Для материальной точки массой m обобщенные импульсы, сопряженные с координатами x, y, z , совпадают с проекциями импульса в декартовых координатах:

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

2. Обобщенный импульс p_φ , сопряженный с координатой φ в цилиндрических координатах, является моментом импульса относительно оси Oz :

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

2. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

1°. Если движение голономной системы описывается обобщенными координатами $q_1, \dots, q_s$ и обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$, то уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где T — кинетическая энергия системы, а Q_i — обобщенная сила.

Эти уравнения называют *уравнениями Лагранжа второго рода*. Если движение происходит в потенциальном поле, то уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - U) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0. \end{aligned}$$

Примеры.

1. Материальная точка массой m , движущаяся в потенциальном поле, описывается уравнениями Лагранжа, тождественными с уравнениями движения Ньютона:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

где

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

2. Уравнения Лагранжа для координат центра масс замкнутой системы двух тел:

$$\ddot{x}_C = \ddot{y}_C = \ddot{z}_C = 0.$$

Центр масс движется прямолинейно и равномерно совершенно независимо от относительного движения обоих тел.

3. Уравнения Лагранжа для относительного движения замкнутой системы двух материальных точек:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

где U — взаимная потенциальная энергия точек ($U =$

$$U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})), \quad x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2 \quad \text{и} \quad z = z_1 - z_2.$$

Таким образом, задача об относительном движении замкнутой системы двух взаимодействующих материальных точек сводится к задаче о движении во внешнем потенциальном силовом поле $F = -\text{grad } U$ одной ма-

териальной точки массой $m_{\text{пр}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, называемой *приведенной массой*.

2°. Если силы, действующие на голономную систему, непотенциальны, но обобщенные силы можно представить через так называемый *«обобщенный потенциал»* $U^*(q, \dot{q})$ в форме

$$Q_i = -\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

то уравнения Лагранжа для системы также имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где $L = T - U^*$.

Например, для частицы с зарядом q и массой m , движущейся в электромагнитном поле,

$$U^* = q\varphi - q(\mathbf{A}\mathbf{v}) \quad \text{и} \quad L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q(\mathbf{A}\mathbf{v}),$$

где φ и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы поля.

3°. Уравнения Лагранжа для произвольной голономной системы, на которую действуют как потенциальные, так и непотенциальные силы, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i,$$

где Q'_i — обобщенная непотенциальная сила. В частности, для системы материальных точек, подверженной действию сил трения, которые пропорциональны скоростям движения точек,

$$Q'_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i},$$

где $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s \gamma_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ — *диссипативная функция Рэлея*,

которая представляет собой однородную квадратичную форму обобщенных скоростей. Размерные коэффициенты γ_{ij} в общем случае зависят от обобщенных координат, а их матрица симметрична: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Диссипативная функция всегда положительна и численно равна половине механической энергии, рассеиваемой системой за единицу времени.

4°. Обобщенную координату q_j называют *циклической координатой*, если функция Лагранжа L не зависит явно от q_j , т. е. $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (при этом L может зависеть от

обобщенной скорости $\dot{q}_j$). Из уравнений Лагранжа 2-го рода для консервативных систем следует, что обобщенный импульс p_j , сопряженный с обобщенной координатой q_j , не изменяется при движении системы.

5°. Решения уравнений Лагранжа второго рода для механической системы с s степенями свободы содержат $2s$ произвольных постоянных и могут быть представлены в следующем виде:

$$q_i = q_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}) \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Из этих $2s$ уравнений можно исключить время t и убедиться в том, что во всякой механической системе должны существовать функции обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, которые остаются постоянными при движении. Эти функции называют *интегралами движения*. Отыскание интегралов движения составляет основную задачу механики. Среди интегралов движения есть несколько важнейших, постоянство которых имеет глубокое происхождение, связанное со свойствами основных форм существования материи — времени и пространства. Интегралы движения аддитивны: их значения для системы, состоящей из нескольких не взаимодействующих частей, равны сумме значений для каждой части в отдельности.

3. ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

1°. *Функцией Гамильтона* голономной системы с s степенями свободы называют функцию обобщенных координат и импульсов системы, а также времени, имеющую вид

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L,$$

где все $\dot{q}_i$ и функция Лагранжа L выражены через обобщенные координаты и импульсы.

Для консервативной системы функции Лагранжа и Гамильтона не зависят явно от времени и $\frac{dH}{dt} = 0$, т. е. $H = \text{const.}$ Кроме того, в этом случае

$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

по теореме Эйлера для однородных функций второй степени. Поэтому

$$H = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T + U.$$

Функция Гамильтона консервативной системы есть ее полная механическая энергия.

Примеры.

1. Для частицы с массой m в потенциальном поле $U(x, y, z)$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

2. В случае линейного гармонического осциллятора

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad U = \frac{ax^2}{2},$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{ax^2}{2},$$

где a — положительный коэффициент, равный $\frac{d^2U}{dx^2}$.

3. Планета с массой m движется по эллиптической орбите в поле тяготения Солнца. В полярных координатах

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\phi = m\rho^2\dot{\phi},$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\phi^2 \right).$$

Потенциальная энергия планеты:

$$U(\rho) = -G \frac{mM}{\rho},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, ρ — расстояние от планеты до Солнца.

Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\varphi^2 \right) - G \frac{mM}{\rho}.$$

2°. Каноническими уравнениями движения Гамильтона для голономной системы с s степенями свободы, на которую действуют только потенциальные силы, называют совокупность $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Зная начальное состояние системы, т. е. совокупность значений q_i и p_i для $t = 0$, и проинтегрировав эти уравнения, можно определить состояние системы в произвольный момент времени t , т. е. совокупность значений $q_i(t)$ и $p_i(t)$. Канонические уравнения Гамильтона выражают классический принцип причинности.

Если q_j — циклическая координата консервативной системы, то гамильтониан системы не зависит явно от q_j :

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -p_j = 0.$$

3°. Написанные выше канонические уравнения Гамильтона справедливы также для голономной системы, обладающей «обобщенным потенциалом».

Для произвольной голономной системы канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q'_i,$$

где Q'_i — обобщенная непотенциальная сила.

4°. Для наглядного изображения изменения состояния системы вводится многомерное пространство всех обобщенных координат q_i и обобщенных импульсов p_i ($i = 1, 2, \dots, s$) рассматриваемой системы. Такое $2s$ -мерное пространство называют *фазовым (гамма-пространством)*; s -мерное подпространство обобщенных координат q_i называют *конфигурационным пространством*. Состояние системы изображается точкой в соответствующем этой системе фазовом пространстве (изобрази-

тельная, или *фазовая точка*). Изменение состояния системы отображается траекторией фазовой точки в фазовом пространстве (*фазовая траектория*). Фазовая траектория не может пересекаться сама с собой, ибо это означало бы неоднозначность решения уравнений Гамильтона. Фазовое пространство не имеет ничего общего с реальным пространством и является геометрической схемой, с помощью которой законы изменения состояния системы могут быть сформулированы на геометрическом языке.

Примеры.

1. Линейный гармонический осциллятор, движущийся около положения равновесия ($q = 0$), под действием упругой силы $F = -aq$, где a — положительный коэффициент. Решение уравнения движения

$$m\ddot{q} = -aq$$

имеет вид

$$q = A \sin(\omega t + \varphi), \quad p = m\dot{q} = m\omega A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда, φ — начальная фаза колебаний,

$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{a}{m}}$, ν — частота колебаний. Исключая время, находим уравнение фазовой траектории:

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1.$$

Фазовой траекторией является эллипс с полуосями $a = A$ и $b = m\omega A$. Фазовым пространством осциллятора является плоскость (p, q) (рис. 1.5.1).

Полная механическая энергия осциллятора равна

$$E = \frac{aA^2}{2}.$$

Ее можно связать с площадью эллипса $S = \oint p dq = \pi ab = \pi m\omega A^2$:

$$E = \frac{\omega}{2\pi} S = \nu \oint p dq.$$

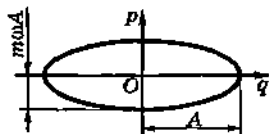


Рис. 1.5.1

Площадь эллипса имеет размерность *действия*.

2. *Плоский ротатор* представляет собой частицу, вращающуюся в плоскости на заданном расстоянии от начала координат. За обобщенную координату удобно выбрать угол φ , образуемый радиусом-вектором r с осью Ox . Функция Гамильтона H совпадает с кинетической энергией и функцией Лагранжа:

$$H = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2},$$

где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость и $J = mr^2$ — момент инерции.

Обобщенный импульс p_φ , сопряженный с координатой φ , равен

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = J\dot{\varphi},$$

т. е. p_φ есть момент импульса. Функцию Гамильтона H

можно выразить так: $H = \frac{p_\varphi^2}{2J}$ — и по каноническим уравнениям Гамильтона

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

Первое из уравнений дает $p_\varphi = L = \text{const}$, т. е. закон сохранения момента импульса. Фазовым пространством является плоскость (p_φ, φ) (рис. 1.5.2). Фазовая траектория имеет вид прямой $p_\varphi = L$.

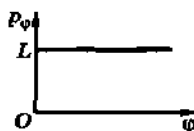


Рис. 1.5.2

4. ПОНЯТИЕ О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ

1°. Уравнения движения механической системы или условия ее равновесия могут быть получены как следствия из некоторых общих положений, называемых *вариационными принципами механики*. Вариационные принципы показывают, чем истинное движение или состояние механической системы отличается от всех кинематически возможных (т. е. допус-

каемых связями) ее движений или состояний. Вариационные принципы, выражающие это различие для движения или состояния системы в каждый данный момент времени, называют *дифференциальными*. Эти принципы являются наиболее общими в механике — они в равной мере применимы как к голономным, так и к неголономным системам. Вариационные принципы, устанавливающие различие между истинным перемещением системы за конечный промежуток времени и всеми ее кинематически возможными перемещениями, называют *интегральными*. Интегральные вариационные принципы справедливы только для голономных систем. Однако их обычно формулируют применительно к консервативным голономным системам.

2°. Основные дифференциальные вариационные принципы.

Принцип виртуальных (возможных) перемещений: для равновесия любой механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ действующих на нее активных сил при любом виртуальном перемещении системы была равна нулю (если все связи удерживающие) или меньше нуля (если среди связей есть неудерживающие), т. е.

$$\delta A^{(a)} = \sum_{k=1}^n (F_k^{(a)} \delta r_k) = \sum_{i=1}^l Q_i \delta q_i \leq 0,$$

где l — число обобщенных координат системы.

В частности, для голономной системы с s степенями свободы, подчиненной идеальным удерживающим связям, все вариации δq_i независимы и условия равновесия имеют вид

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Принцип Даламбера—Лагранжа: для истинного движения любой механической системы, подчиненной идеальным удерживающим связям, сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции на

любом виртуальном перемещении системы в каждый данный момент времени равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^n \left(F_k^{(a)} - m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \right) \delta \mathbf{r}_k = 0,$$

где $\frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}$ — ускорение k -й материальной точки массой

m_k , $m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2}$ — даламберова сила инерции.

В обобщенных координатах

$$\sum_{i=1}^l \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] - Q_i \right\} \delta q_i = 0,$$

где T — кинетическая энергия системы.

Принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера—Лагранжа можно также применять к системам, подчиненным неидеальным связям, если силы трения, соответствующие этим связям, включить в число активных сил.

3°. Действием по Гамильтону (или просто *действием*) называют величину S , равную интегралу по времени от функции Лагранжа L механической системы. Действие по Гамильтону за промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Действием по Лагранжу (укороченным действием) называют величину S_0 , равную интегралу по времени от удвоенной кинетической энергии T механической системы. Действие по Лагранжу за промежуток времени от t_1 до t_2 равно

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt.$$

Для голономной системы с s степенями свободы

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \int_{t_1}^{t_2} (H + L) dt,$$

где p_i — обобщенный импульс, сопряженный с обобщенной координатой q_i , H — функция Гамильтона системы.

В частности, для консервативной голономной системы $H = \text{const}$, и $S_0 = H(t_2 - t_1) + S$, где S — действие по Гамильтону.

4°. К интегральным вариационным принципам механики относятся различные формулировки *принципа наименьшего действия*. Наиболее распространенными являются принцип Гамильтона—Остроградского и принцип Мопертюи—Лагранжа.

Принцип Гамильтона—Остроградского: действительное перемещение консервативной голономной системы из положения $A_1(q_{i1})$ в момент времени t_1 в положение $A_2(q_{i2})$ в момент времени t_2 отличается от всех кинематически возможных перемещений этой системы из A_1 в A_2 за тот же промежуток времени $t_2 - t_1$ тем, что для него действие по Гамильтону стационарно, т. е. равна нулю первая вариация S :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0.$$

Здесь δ — символ изохронной вариации, т. е. при варьировании действия время t (в частности, t_1 и t_2) не варьируется. Кроме того, предполагается, что начальное и конечное положения A_0 и A_1 системы фиксированы, т. е. $\delta q_{i1} = \delta q_{i2} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

В случае стационарности связей системы условие стационарности действия по Гамильтону ($\delta S = 0$), как правило, означает, что действие минимально.

Из принципа Гамильтона — Остроградского можно получить канонические уравнения Гамильтона для

консервативной системы. Для этого выразим функцию Лагранжа системы $L(q, \dot{q}, t)$ через функцию Гамильтона

на $H(q, p, t)$: $L = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H$. Тогда

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0,$$

$$\delta \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^s (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i \right),$$

$$\delta H = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

и по правилу интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_i}{dt} \delta q_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Поэтому принцип Гамильтона—Остроградского можно записать в следующей форме:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Вариации δq_i и δp_i всех обобщенных координат и импульсов полностью независимы. Следовательно, в этом уравнении должны быть равны нулю коэффициенты при всех δq_i и δp_i , т. е. должны выполняться канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{и} \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Принцип Гамильтона—Остроградского легко обобщается на любую голономную механическую систему. Его математическая запись в этом случае имеет вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i dt = 0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \sum_{i=1}^s Q'_i \delta q_i \right) dt = 0,$$

где Q_i — обобщенная сила, а Q'_i — обобщенная непотенциальная сила.

Итак, для произвольной голономной системы принцип Гамильтона—Остроградского утверждает, что первая вариация действия по Гамильтону равна интегралу по времени от элементарной виртуальной работы непотенциальных сил, взятому с обратным знаком:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = - \int_{t_1}^{t_2} Q'_i \delta q_i dt.$$

Для голономной неконсервативной системы, обладающей обобщенным потенциалом U^* , принцип Гамильтона—Остроградского имеет вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \text{ где } L = T - U^*.$$

Из обобщенного принципа Гамильтона—Остроградского можно получить уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt.$$

Так как $\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_i$ и $\delta q_{i2} = \delta q_{i1} = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \end{aligned}$$

Следовательно, обобщенный принцип Гамильтона — Остроградского можно записать в следующей форме:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + Q_i \right] \delta q_i dt = 0.$$

Вариации δq_i всех обобщенных координат полностью независимы. Поэтому в написанном выше уравнении должны быть равны нулю коэффициенты при δq_i , т. е. должны выполняться уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

5°. Принцип Мопертюи—Лагранжа: действительное перемещение консервативной голономной системы из положения $A_1(q_{i1})$ в положение $A_2(q_{i2})$ отличается от всех кинематически возможных изоэнергетических перемещений этой системы из A_1 в A_2 тем, что для него укороченное действие экстремально (точнее, минимально), т. е.

$$\Delta S \equiv \Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0.$$

Здесь Δ — символ полной вариации, при нахождении которой варьируются не только q_i и $\dot{q}_i$ (как при δ -варьировании), но и время, т. е. пределы интегрирования. Кроме того, предполагается, что полная механическая энергия системы $E = H = \text{const}$, а начальное и конечное положения A_1 и A_2 системы фиксированы, т. е. $\Delta q_{i1} = \Delta q_{i2} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$).

Принцип Мопертюи—Якоби для консервативной голономной системы:

$$\Delta \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{2(E-U)} \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} dq_i dq_j} = 0.$$

Он вытекает из принципа Мопертюи—Лагранжа, так как для консервативной системы $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E-U)}$ и

$$\sqrt{2T} dt = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j} dt = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^s a_{ij} dq_i dq_j}.$$

В частности, для свободной материальной точки массой m и полной энергией E , движущейся в стационарном потенциальном силовом поле,

$$\Delta \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{2m(E-U)} ds = 0,$$

где $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия точки, ds — элемент длины пути. Это соотношение совпадает с математическим выражением принципа Ферма для распространения луча света в изотропной оптически неоднородной среде с показателем преломления $n(x, y, z) = C_1 \sqrt{E - U(x, y, z)}$, где C_1 — постоянный (неварьируемый) коэффициент пропорциональности. Таким образом, существует *оптико-механическая аналогия*: каждой задаче о движении материальной точки в стационарном потенциальном поле соответствует определенная задача геометрической оптики, и наоборот.

5. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1°. В канонических уравнениях Гамильтона обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$ и обобщенные импульсы $p_1, \dots, p_s$ голономной системы играют роль независи-

мых переменных. Преобразования этих $2s$ переменных к новым независимым переменным:

$$q'_i = q'_i(q, p, t) \text{ и } p'_i = p'_i(q, p, t)$$

называют *каноническими*, если уравнения движения системы в новых переменных также имеют вид канонических уравнений Гамильтона¹⁾:

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \text{ и } \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i} \quad (i = 1, \dots, s),$$

где $H' = H'(q', p', t)$ — новая функция Гамильтона.

2°. Старые и новые переменные и соответствующие им функции Гамильтона должны удовлетворять принципу Гамильтона—Остроградского:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^s p'_i \dot{q}'_i - H' \right) dt = 0.$$

Поэтому подынтегральные выражения могут отличаться друг от друга только на полный дифференциал некоторой функции F , называемой *производящей функцией канонического преобразования*:

$$\left[\sum_{i=1}^s p_i dq_i - H(q, p, t) dt \right] - \left[\sum_{i=1}^s p'_i dq'_i - H'(q', p', t) dt \right] = dF.$$

Производящую функцию можно записать в одном из четырех видов:

$$F_1(q, q', t); \quad F_2(q, p', t); \quad F_3(p, q', t) \quad \text{и} \quad F_4(p, p', t).$$

¹⁾ Рассматриваются системы, на которые действуют только потенциальные силы.

Если $F = F_1$, то $\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^s p'_i \dot{q}'_i - H' + \frac{dF_1}{dt}$, где

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Так как новые и старые координаты независимы, то

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad \dot{q}'_i = -\frac{\partial F_1}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Аналогично, если $F = F_2$, то

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Если $F = F_3$, то

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Если $F = F_4$, то

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_4}{\partial p'_i} \quad \text{и} \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

Если производящая функция канонического преобразования не зависит явно от времени $\left(\frac{\partial F}{\partial t} = 0\right)$, то новая функция Гамильтона системы равна старой ($H = H'$).

Примеры.

1. Любое преобразование обобщенных координат ($q'_i = f_i(q, t)$) — так называемое *точечное преобразование* — является каноническим, так как получается с помощью производящей функции

$$F_2(q, p', t) = \sum_{i=1}^s f_i(q_1, \dots, q_s, t) p'_i.$$

Следовательно, канонические уравнения Гамильтона инвариантны по отношению к выбору обобщенных координат.

2. С помощью производящей функции $F_1(q, q', t) = - \sum_{i=1}^s q_i q'_i$ осуществляется каноническое преобразова-

ние: $q'_i = p_i$ и $p'_i = -q_i$, сводящееся (с точностью до знака) к взаимному переименованию обобщенных координат и импульсов. Поэтому величины q_i и p_i часто называют канонически сопряженными.

3. Изменение величин q_i и p_i при движении системы можно рассматривать как непрерывно совершающееся каноническое преобразование, производящей функцией которого в каждый момент времени является функ-

$$\text{ция } F_2(q, p', t) = \sum_{i=1}^s q_i p'_i + H(q, p', t) dt:$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p'_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \quad \text{и} \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt;$$

так как p'_i и q'_i отличаются от p_i и q_i на бесконечно малые величины, то с точностью до величин первого порядка малости можно принять $H(q, p', t) = H(q, p, t)$ и $\frac{\partial H}{\partial p'_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, так что

$$p'_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = p_i + \dot{p}_i dt = p_i + dp_i$$

и

$$q'_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = q_i + \dot{q}_i dt = q_i + dq_i.$$

3°. При канонических преобразованиях сохраняется объем фазового пространства: $\int d\Gamma = \int d\Gamma'$, где $d\Gamma = dq_1 \dots dq_s dp_1 \dots dp_s$, $d\Gamma' = dq'_1 \dots dq'_s dq'_1 \dots dq'_s$, а интегрирование производится по произвольной области

фазового пространства переменных (q, p) и по соответствующей ей области фазового пространства переменных (q', p') .

Отсюда следует *теорема Лиувилля*: если в момент времени t_0 фазовые точки, соответствующие различным начальным состояниям системы, движение которой описывается каноническими уравнениями Гамильтона, непрерывно заполняют элемент $d\Gamma_0$ объема фазового пространства, то в любой момент времени t они непрерывно заполняют элемент $d\Gamma$ объема фазового пространства, причем $d\Gamma = d\Gamma_0$.

4°. В каждом конкретном случае для системы, гамильтониан H которой не изменяется в процессе движения, можно осуществить такое каноническое преобразование обобщенных координат и импульсов, чтобы все обобщенные координаты q'_s были циклическими.

При этом все обобщенные импульсы постоянны: $p'_i = a_i$ и

$H' = H'(a_1, \dots, a_s)$, так что $\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial a_i} = \omega_i(a_1, \dots, a_s) = \text{const}$

и $q_i = \omega_i t + \alpha_i$, где α_i — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Пример. Линейный гармонический осциллятор.

Функция Гамильтона $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E$, где m , E и

ω — масса, энергия и собственная циклическая частота осциллятора. Каноническое преобразование, осуществляемое с помощью производящей функции $F_1(q, q', t) =$

$= \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{ctg} q'$, имеет вид

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg} q' \quad \text{и} \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 q'}$$

или

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q' \quad \text{и} \quad p = \sqrt{2m\omega p'} \cos q'.$$

Новый гамильтониан

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H = p'\omega \cos^2 q' + p'\omega \sin^2 q' = \omega p'.$$

Следовательно, q' — циклическая координата, $p' = \frac{E}{\omega} = \text{const}$, $\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \omega$, $q' = \omega t + \alpha$ и $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$.

5°. Другой, более общий метод применения канонических преобразований к решению задач механики, называемый *методом Гамильтона—Якоби*, пригоден и в тех случаях, когда функция Гамильтона системы зависит от времени. Этот метод состоит в отыскании канонического преобразования, переводящего обобщенные координаты $q(t)$ и импульсы $p(t)$ к их начальным значениям: $q' = q(0) = q_0$ и $p' = p(0) = p_0$. Уравнения, связывающие старые и новые канонические переменные:

$$q(t) = f(q_0, p_0, t) \text{ и } p(t) = \varphi(q_0, p_0, t)$$

представляют собой полное решение задачи.

Из уравнений Гамильтона для q' и p' следует, что новые переменные будут, действительно, постоянными ($q' = p' = 0$), если новая функция Гамильтона $H' = 0$. Поэтому производящая функция F должна удовлетворять уравнению: $H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$. Так как все $\dot{p}_i$ постоянны, то в качестве производящей функции удобно взять функцию S типа F_2 (см. п. 2°): $S = S(q, p', t)$. Тогда $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, и функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби:

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Общее решение этого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка называют *главной функцией Гамильтона*. Она имеет вид

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — постоянные интегрирования, которые можно принять за начальные значения обобщенных импульсов ($\alpha_i = p_i(0)$). Начальные значения обобщенных координат

$$q'_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Разрешая эту систему уравнений относительно всех q_i , можно найти решение рассматриваемой задачи:

$$q_i = q_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, t) \\ (i = 1, 2, \dots, s).$$

Поскольку

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H = L,$$

главная функция Гамильтона равна неопределенному интегралу по времени от функции Лагранжа, т. е. действию по Гамильтону:

$$S = \int L dt.$$

6°. Скобками Пуассона для двух функций времени и обобщенных координат и импульсов механической системы $\varphi(q, p, t)$ и $\psi(q, p, t)$ называется выражение:

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right).$$

Свойства скобок Пуассона:

а) $\{\varphi, \psi\} = -\{\psi, \varphi\}$ (свойство антикоммутативности),

б) $\{\varphi, \varphi\} = \{\psi, \psi\} = 0$,

в) если $a = \text{const}$, то $\{\varphi, a\} = \{a, \psi\} = 0$,

г) $\{\varphi, (\psi_1 + \psi_2)\} = \{\varphi, \psi_1\} + \{\varphi, \psi_2\}$ (свойство распределительности),

д) частная производная по времени t (или по какому-либо другому аргументу) равна:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\varphi, \psi\} = \left\{ \frac{d\varphi}{dt}, \psi \right\} + \left\{ \varphi, \frac{d\psi}{dt} \right\},$$

е) тождество Якоби—Пуассона

$$\{\varphi_1 \{\varphi_2, \varphi_3\}\} + \{\varphi_2 \{\varphi_3, \varphi_1\}\} + \{\varphi_3 \{\varphi_1, \varphi_2\}\} = 0,$$

где $\{\varphi_i \{\varphi_j, \varphi_k\}\}$ — двойные скобки Пуассона.

7°. Если $f(q, p, t)$ — функция времени и обобщенных координат и импульсов голономной консерва-

тивной системы, движение которой описывается каноническими уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ и } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Если функция $f(q, p, t)$ — интеграл уравнений движения системы, то $f(q, p, t) = \text{const}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$, и функция f удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0.$$

В частности, если и $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$, то $\{f, H\} = 0$.

Из тождества Якоби—Пуассона для функций f_1, f_2 и H , где первые две — интегралы уравнений движения механической системы, следует, что функция $f_3 = \{f_1, f_2\}$ также является интегралом движения этой системы (теорема Пуассона).

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1°. Первым интегралом движения любой изолированной системы является ее полная энергия (*закон сохранения и превращения энергии*). Этот закон связан с *однородностью времени*, т. е. независимостью законов движения системы от выбора начала отсчета времени. В частности, для консервативной системы с однородностью времени связан закон сохранения полной механической энергии этой системы. Действительно, в силу однородности времени, функция Лагранжа L , определяющая закон движения консервативной системы, не зависит явно от времени и

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right).$$

С помощью уравнений Лагранжа это равенство можно представить в форме

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^s \left[\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - L = T + U = \text{const},$$

т. е. полная механическая энергия консервативной системы $E = T(q, \dot{q}) + U(q)$ является интегралом ее движения. Аддитивность энергии E системы следует из аддитивности функции Лагранжа, от которой E зависит линейно. Закон сохранения полной механической энергии справедлив для любой консервативной системы, как замкнутой, так и незамкнутой.

2°. Интегралом движения замкнутой системы является также вектор импульса системы. Закон сохранения импульса связан с *однородностью пространства*. Однородность пространства означает, что параллельный перенос в нем замкнутой механической системы как целого не изменяет механических свойств системы, т. е. оставляет ее функцию Лагранжа неизменной. Функция Лагранжа для замкнутой системы, состоящей из N материальных точек,

$$L = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \mathbf{v}_k^2 - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N),$$

где $\mathbf{r}_k$ — радиус-вектор k -й точки с массой m_k и $\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}$ — скорость этой точки. Импульс системы материальных точек

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k}.$$

Связь закона сохранения импульса с однородностью пространства проще всего показать на примере замкнутой консервативной системы. Изменение функции Лагранжа при параллельном переносе этой системы на малое расстояние, характеризуемое вектором элементарного перемещения $\delta \mathbf{r}$, равно

$$\delta L = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \delta \mathbf{r}_k = \delta \mathbf{r} \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k}.$$

Так как условие $\delta L = 0$ должно выполняться при любых значениях $\delta \mathbf{r}$, то $\sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0$, и согласно уравне-

ниям Лагранжа 2-го рода $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k}$.

$$\text{Поэтому } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} = \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0$$

и $\mathbf{p} = \text{const.}$

Импульс замкнутой системы, равный векторной сумме импульсов всех ее материальных точек, является интегралом движения системы.

3°. Интегралом движения замкнутой системы также является вектор момента импульса. Закон сохранения момента импульса связан с *изотропностью пространства*. Механические свойства замкнутой системы не изменяются при любом повороте системы как целого в изотропном пространстве. При этом функция Лагранжа системы не должна изменяться. При повороте системы изменяются направления радиусов-векторов и скоростей всех частиц, причем все векторы $\mathbf{r}_k$ и $\mathbf{v}_k$ преобразуются по одинаковому закону:

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{v} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v},$$

где $\delta \boldsymbol{\varphi}$ — вектор малого (элементарного) поворота. Его модуль равен углу $\delta \varphi$ поворота, а направление совпадает с осью поворота, в соответствии с правовинтовой системой отсчета.

Для замкнутой консервативной системы, состоящей из N материальных точек, изменение функции Лагранжа системы при ее малом повороте в изотропном пространстве равно:

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \delta \mathbf{r}_k + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} \delta \mathbf{v}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N (\mathbf{p}_k (\delta \Phi \times \mathbf{r}_k) + \mathbf{p}_k (\delta \Phi \times \mathbf{v}_k)) = \delta \Phi \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k.\end{aligned}$$

Так как $\delta \Phi$ можно выбирать произвольно, то условие $\delta L = 0$ выполняется, если

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = 0.$$

При движении замкнутой системы остается постоянной векторная величина

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \text{const},$$

называемая моментом импульса системы.

4°. Любая изолированная механическая система имеет по крайней мере семь аддитивных интегралов движения (семь уравнений законов сохранения): одно уравнение закона сохранения полной энергии, по три уравнения законов сохранения проекций векторов импульса и момента импульса на координатные оси.

Глава 6

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. *Колебаниями* или *колебательным движением* называют движения (изменения состояния), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. По своей физической природе колебания весьма раз-

нообразны. К ним относятся механические колебания (качания маятников, движения поршней двигателей внутреннего сгорания, колебания струн, стержней и пластин, вибрации фундаментов), электромагнитные колебания и др.

2°. Колебания называют *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. *Периодом колебаний* T называют тот наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно *полное колебание*. *Частотой* периодических колебаний ν называют число полных колебаний, совершающихся за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Зависимость от времени t периодически колеблющейся физической величины S имеет вид $S = S_0 + x(t)$, где $S_0 = \text{const}$, а $x(t)$ — периодическая функция времени: $x(t + T) = x(t)$.

3°. Простейшим типом периодических колебаний являются *гармонические* (синусоидальные) колебания. В этом случае

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где A , ω , φ_0 и φ_1 — постоянные величины, причем $A > 0$, $\omega > 0$ и $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$. Величину A , равную максимальному значению x , называют *амплитудой* колебаний. Выражения $\Phi = \omega t + \varphi_0$ и $\Phi_1 = \omega t + \varphi_1$ определяют значение x в данный момент времени t и называют *фазой* колебаний. В момент начала отсчета времени ($t = 0$) фаза равна *начальной фазе* φ_0 или φ_1 . Величину ω называют *циклической* или *круговой частотой*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Первая и вторая производные по времени от гармонически колеблющейся величины x также изменяются по гармоническому закону:

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Следовательно, гармонически колеблющаяся величина x удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

которое называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

4°. Гармонические колебания можно представить графически с помощью вращающегося вектора амплитуды (рис. 1.6.1). Вектор A , равный по модулю амплитуде колебаний, равномерно вращается против часовой стрелки вокруг оси O , перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω . Если в момент времени $t = 0$ угол между вектором A и осью Ox равен φ_1 , то проекция B конца этого вектора на ось Ox совершает гармонические колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi_1)$.

5°. Если одновременно совершаются два гармонических колебания одинаковой частоты и разных амплитуд:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

то результирующее колебание совершается с той же частотой по гармоническому закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

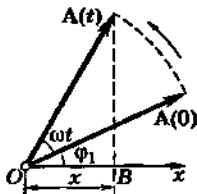


Рис. 1.6.1

Для отыскания A и φ пользуются *методом векторных диаграмм*, основанным на том, что в каждый момент времени вращающиеся векторы амплитуд складываемых колебаний (A_1 и A_2) и результирующий вектор A связаны соотношени-

ем $A = A_1 + A_2$. Все три вектора вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , так что их взаимное расположение не зависит от времени. Из рис. 1.6.2, соответствующего моменту времени $t = 0$, видно, что

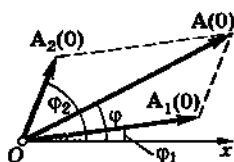


Рис. 1.6.2

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), то $A = A_1 + A_2$; если $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), то $A = |A_1 - A_2|$. В общем случае $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$.

6°. При наложении (*суперпозиции*) двух гармонических колебаний $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, имеющих разные частоты и амплитуды, результирующие колебания не являются гармоническими. Их можно представить в следующей форме:

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)],$$

где

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[\psi(t) - \varphi_1],$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \psi(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \psi(t)}$$

и

$$\psi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2.$$

С физической точки зрения такое представление результирующих негармонических колебаний имеет смысл только при наложении гармонических колебаний, частоты которых достаточно близки. В этом случае $A(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся функции времени, а колебательный процесс называют *биениями*. Величина $A(t)$ периодически изменяется в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$ с частотой $\nu_6 = |\nu_2 - \nu_1| = \frac{1}{2\pi} |\omega_2 - \omega_1|$, называемой *частотой биений*.

7°. Сложные (негармонические) периодические колебания физической величины S можно представить в виде ряда Фурье, состоящего из простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период колебаний S :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}.$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам Эйлера—Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t \, dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отыскание ряда Фурье, соответствующего заданному сложному колебанию, называют гармоническим анализом последних. Члены этого ряда, циклические частоты которых равны ω , 2ω , 3ω и т. д., называют соответственно первой (основной), второй, третьей и т. д. гармониками сложного колебания.

8°. Спектром частот колебания называют совокупность частот простых гармонических колебаний, в результате сложения которых можно получить рассматриваемое колебание. Периодические колебания имеют дискретные (линейчатые) спектры частот. Непериодические колебания, как правило, имеют непрерывные (сплошные) спектры частот. Их можно представить как результат наложения гармонических колебаний, частоты которых принимают все возмож-

ные значения в некотором интервале (в общем случае от 0 до ∞). Гармонический анализ таких колебаний состоит в представлении их в виде *интеграла Фурье*

$$S(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi) \sin \omega \xi d\xi.$$

Квазипериодическими (почти периодическими) колебаниями называют непериодические колебания, спектр частот которых — дискретный, но входящие в него частоты несоизмеримы друг с другом (их отношения выражаются иррациональными числами).

9°. Колебания вида $x = A(t) \cos [\omega t + \varphi(t)]$ называют *модулированными*, если $\left| \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega A_{\text{макс}}$ и $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll \omega$. Ко-

лебания называют *амплитудно-модулированными*, если $\varphi = \text{const}$, и *модулированными по фазе или частоте*, если $A = \text{const}$. Простейшим примером модулированных колебаний являются биения, для которых $A(t)$ и $\varphi(t)$ — периодические функции времени.

10°. *Свободными колебаниями* называют колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, в результате какого-либо начального отклонения этой системы от состояния устойчивого равновесия.

Вынужденными колебаниями называют колебания системы, вызываемые действием на нее периодических внешних сил.

11°. Систему называют *линейной*, если ее движение описывается линейными дифференциальными уравнениями. В противном случае систему называют *нелинейной*, а ее колебания — *нелинейными колебаниями*.

Колебательную систему, обладающую одной степенью свободы, называют *одномерным осциллятором (вибратором)*. Если свободные колебания этой системы являются гармоническими, то она называется *одномерным гармоническим осциллятором*. В противном случае осциллятор называется *ангармоническим*.

2. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ОДНУ СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ

А. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы соответственно равны:

$$W_k = \frac{1}{2} b(q) \dot{q}^2, \quad W_n = W_n(q),$$

где q — обобщенная координата, $b(q) \geq 0$.

В состоянии устойчивого равновесия ($q = q_0$) потенциальная энергия имеет минимум, так что

$$\left(\frac{dW_n}{dq} \right)_{q=q_0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2W_n}{dq^2} \right)_{q=q_0} = \beta_0 > 0.$$

Если потенциальную энергию отсчитывать от значения в состоянии $q = q_0$, то $W_n(q_0) = 0$, и ряд Тейлора для $W_n(q)$ имеет вид

$$W_n(q) = \beta_0 \frac{(q - q_0)^2}{2!} + \left(\frac{d^3W_n}{dq^3} \right)_{q=q_0} \frac{(q - q_0)^3}{3!} + \dots$$

Колебания называют *малыми*, если в правой части этого равенства всеми членами, кроме первого, можно пренебречь, так что

$$W_n(q) = \frac{\beta_0}{2} (q - q_0)^2 = \frac{\beta_0 x^2}{2}$$

и

$$W_k(q) = \frac{1}{2} b(q_0) \dot{q}_0^2 = \frac{b_0 \dot{x}^2}{2},$$

где $x = q - q_0$ — смещение системы из состояния устойчивого равновесия.

2°. Дифференциальное уравнение малых колебаний системы имеет вид

$$b_0 \ddot{x} + \beta_0 x = 0.$$

Величина $-\beta_0 x = -\frac{dW_{\text{п}}}{dx}$ представляет обобщенную силу F_x , сопряженную с обобщенной координатой x .

Обобщенную силу $F_x = -\beta_0 x$, где $\beta_0 > 0$, называют *квазиупругой силой*, а величину β_0 — *коэффициентом квазиупругой силы*.

3°. Малые колебания системы являются гармоническими:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Их циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta_0}{b_0}}$ определяется свойствами системы и называется *собственной циклической частотой* колебаний консервативной системы.

Период колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{b_0}{\beta_0}}$. Амплитуда A и начальная фаза φ_1 определяются из начальных условий. Например, если в момент времени $t = 0$ $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$, то

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

Амплитуда свободных колебаний консервативной системы не зависит от времени. Поэтому такие колебания называют *незатухающими*.

4°. Кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний системы являются периодически

функциями времени с периодом $T' = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{b_0}{\beta_0}}$:

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} \beta_0 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1) = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Полная механическая энергия гармонических колебаний системы

$$W = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 = \text{const.}$$

Примеры.

1. *Пружинный маятник* — тело, совершающее прямолинейные колебания вдоль оси Ox под действием упругой силы $F = -kx$ (k — коэффициент жесткости пружины); $\beta_0 = k$, $W_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ и $b_0 = m$ — масса тела. Циклическая частота и период колебаний равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2. *Математический маятник* — материальная точка M , подвешенная к неподвижной точке на невесомой нерастяжимой нити (или стержне) и совершающая движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1.6.3):

$$W_k = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2, \quad b_0 = m l^2,$$

$$W_{\pi} = mgl(1 - \cos \alpha) = 2 mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

В случае малых колебаний $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$,

$$W_{\pi} \approx \frac{mgl\alpha^2}{2}, \quad \beta_0 = mgl.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При произвольных значениях угла отклонения α колебания математического маятника являются нелинейными.

3. *Циклоидальный маятник* — материальная точка M , движущаяся под действием силы тяжести вдоль циклоиды, ось которой вертикальна, а выпуклость обра-

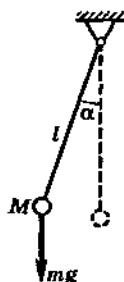


Рис. 1.6.3

щена вниз (рис. 1.6.4). Если за начало отсчета потенциальной энергии точки принять ее значение в вершине циклоиды O' и за обобщенную координату — длину s дуги циклоиды, отсчитываемую от точки O' , то

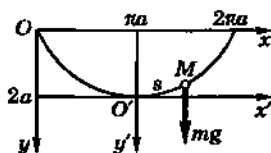


Рис. 1.6.4

$$W_{\kappa} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 \quad \text{и} \quad W_{\pi} = \frac{mg}{8a} s^2,$$

так что

$$b_0 = m \quad \text{и} \quad \beta_0 = \frac{mg}{4a},$$

где a — параметр циклоиды (радиус производящей окружности). Колебания возможны, если полная энергия маятника $W = W_{\kappa} + W_{\pi} < 2mga$. Колебания циклоидального маятника *изохронны*, т. е. их период не зависит от амплитуды колебаний и всегда равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

4. *Физический маятник* — абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси O , не проходящей через его центр тяжести C (рис. 1.6.5):

$$W_{\kappa} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2, \quad b_0 = J,$$

$$W_{\pi} = mg d(1 - \cos \alpha) = 2 mg d \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

где α — угол отклонения из положения равновесия, J — момент инерции тела относительно оси качания O , d — расстояние от оси O до центра тяжести C .

В случае малых колебаний $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $W_{\pi} \approx \frac{1}{2} mg d \alpha^2$ и $\beta_0 = mgd$. Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}.$$



Рис. 1.6.5

Приведенной длиной $l_{\text{пр}}$ физического маятника называют длину математического маятника, имеющего такой же период колебаний: $l_{\text{пр}} = \frac{J}{md} > d$, так как по теореме Штейнера — Гюйгенса $J = J_C + md^2 > md^2$. Точку O_1 , лежащую на линии OC на расстоянии $OO_1 = l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка подвеса O и центр качания O_1 обладают взаимностью: при переносе точки подвеса в точку O_1 точка O становится центром качания, так что период колебаний маятника не изменяется.

5. Крутильный маятник — твердое тело, подвешенное на вертикальном невесомом упругом стержне (нити), верхний конец которого закреплен неподвижно, а ось Oz совпадает с одной из свободных осей тела (рис. 1.6.6). Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при его кручении вокруг оси Oz .



Рис. 1.6.6

В случае малых колебаний $W_k = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$ и

$W_n = \frac{1}{2} c \alpha^2$, так что $b_0 = J$ и $\beta_0 = c$, где α — угол поворота маятника вокруг оси Oz из положения равновесия, J — момент инерции маятника относительно оси Oz , c — крутильная жесткость стержня. Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}.$$

В случае однородного круглого стержня $c = \frac{\pi d^4 G}{32l}$, где d и l — диаметр и длина стержня, а G — модуль сдвига материала стержня.

Б. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

1°. Затухающими колебаниями называют колебания, энергия которых уменьшается с течением времени. Затухание свободных колебаний механической системы обусловлено диссипацией ее энергии вследствие действия на систему непотенциальных сил сопротивления (трения).

Если в системе отсутствует сухое трение, то для случая малых колебаний можно считать, что обобщенная сила трения равна $F_{\text{тр}} = -r\dot{x}$, где $r > 0$ — обобщенный коэффициент трения. Тогда дифференциальное уравнение малых затухающих колебаний системы имеет вид

$$b_0\ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = 0,$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\delta = \frac{r}{2b_0}$ — коэффициент затухания, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta_0}{b_0}}$ — циклическая частота свободных колебаний системы в отсутствие трения.

2°. Если $\delta > \omega_0$, то имеет место аperiodическое движение (aperиодическое затухание), уравнение которого

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где $\alpha_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ и $\alpha_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий. Если $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, то

$$C_1 = -\frac{\alpha_2 x_0 + \dot{x}_0}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad C_2 = -\frac{\alpha_1 x_0 + \dot{x}_0}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

В зависимости от начальных условий возможны два типа периодического движения системы (рис. 1.6.7).

Движение типа *a* осуществляется в тех случаях, когда x_0 и $\dot{x}_0$ противоположны по знаку $|\dot{x}_0| > \alpha_1 |x_0|$. Во

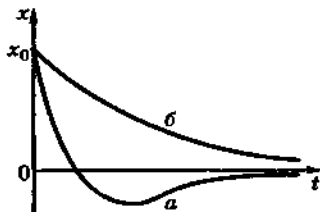


Рис. 1.6.7

всех остальных случаях осуществляется движение типа б. Система, выведенная из состояния равновесия, асимптотически, т. е. при $t \rightarrow \infty$, возвращается в это состояние.

3°. Если $\delta < \omega_0$, то система совершает затухающие колебания:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 и φ_0 — постоянные величины, определяемые из начальных условий, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственная циклическая частота колебаний диссипативной системы. Величину $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$ называют амплитудой затухающих колебаний. Значения амплитуды для моментов времени $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t$ и т. д. образуют убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен $e^{-\delta \Delta t}$. Зависимость x от t при $\varphi_0 = 0$ изображена на рис. 1.6.8.

4°. Периодом (условным периодом) затухающих колебаний называют промежуток времени между двумя последовательными состояниями системы, при которых колеблющаяся величина x проходит через равновесное значение, изменяясь в одном и том же направлении (например, возрастая):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

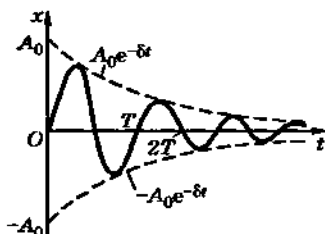


Рис 1.6.8

5°. *Логарифмическим декрементом затухания* ϑ называют натуральный логарифм отношения амплитуд колебаний в моменты времени t и $t + T$:

$$\vartheta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Промежуток времени τ , за который амплитуда уменьшается в $e \approx 2,71...$ раз, называют *временем релаксации по амплитуде*: $\tau = \frac{1}{\delta}$, $\vartheta = \frac{T}{\tau}$.

6°. Зависимость полной энергии механической системы от времени имеет вид

$$W(t) = \frac{1}{2} b_0 A_0^2 e^{-2\delta t} [\omega_0^2 - \delta^2 \cos(2\omega t + 2\varphi_0) - \delta \omega \sin(2\omega t + 2\varphi_0)],$$

$$\frac{dW}{dt} = -r\dot{x}^2 = -2\Phi,$$

где $\Phi = \frac{1}{2} r\dot{x}^2$ — диссипативная функция.

7°. Если затухание механических колебаний системы обусловлено сухим трением и $|F_{\text{тр}}| = \text{const}$, то циклическая частота ω затухающих колебаний совпадает с циклической частотой ω_0 свободных колебаний той же системы

в отсутствие трения $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{\beta_0}{b_0}} \right)$. Убывание амплитуды

происходит по закону арифметической прогрессии: за каждую половину цикла колебания амплитуда уменьшается на одинаковую величину $\frac{2|F_{\text{тр}}|}{\beta_0}$. Колебания прекра-

щаются, как только амплитуда становится меньше $\frac{|F_{\text{тр}}|}{\beta_0}$.

В. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1°. Дифференциальное уравнение *малых* вынужденных колебаний записывается следующим образом:

$$b_0 \ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = F(t),$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{b_0} F(t),$$

где $F(t)$ — обобщенная периодическая внешняя сила, сопряженная с обобщенной координатой x . Силу $F(t)$,

вызывающую вынужденные колебания системы, называют *возмущающей* или *вынуждающей силой*.

2°. Общее решение этого уравнения равно сумме его частного решения x_1 и общего решения x_2 соответствующего однородного уравнения (т. е. при $F(t) = 0$):

$$x = x_1 + x_2.$$

Решение $x_2 = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ характеризует свободные затухающие колебания системы, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2 = 0$.

Поэтому по истечении некоторого промежутка времени после начала вынужденных колебаний, соответствующего *переходному режиму*, величиной x_2 можно пренебречь и считать, что при установившихся вынужденных колебаниях $x = x_1$.

3°. Если возмущающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t,$$

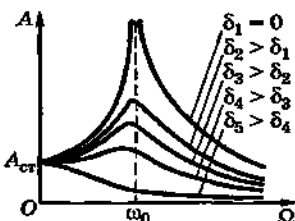


Рис. 1.6.9

то установившиеся вынужденные колебания также являются гармоническими, причем совершаются с той же циклической частотой Ω :

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi_1),$$

где

$$A = \frac{F_0}{b_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

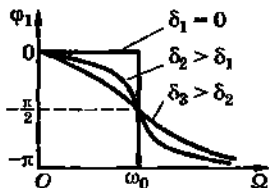


Рис. 1.6.10

Кривые зависимости от Ω амплитуды A и угла φ_1 сдвига фазы вынужденных колебаний приведены на рис. 1.6.9 и 1.6.10. При $\Omega \ll \omega_0$

амплитуда $A \approx A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{b_0 \omega_0^2} = \frac{F_0}{\beta_0}$ — статическая деформация системы под действием постоянной силы F_0 . Если $\Omega \gg \omega_0$, то $A = \frac{F_0}{b_0 \Omega^2}$. Максимальное значение амплитуды $A_{\text{макс}}$ соответствует циклической частоте

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

которая несколько меньше собственной циклической частоты ω колебаний системы ($\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$),

$$A_{\text{макс}} = \frac{F_0}{2\delta b_0 \omega}.$$

Из этой формулы следует, что при $\delta \rightarrow 0$ $A_{\text{макс}} \rightarrow \infty$. Однако такая экстраполяция неправильна, так как с возрастанием амплитуды колебания перестают быть малыми и к ним неприменима рассмотренная выше теория.

4°. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении циклической частоты возмущающей силы к значению Ω_0 называют *резонансом*, а величину Ω_0 — *резонансной циклической частотой*. Кривые зависимости A от Ω , показанные на рис. 1.6.9, называют *резонансными кривыми*.

Увеличение коэффициента затухания δ приводит к сглаживанию резонансных кривых и уменьшению $A_{\text{макс}}$, т. е. к значительному ослаблению явления резонанса.

При $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ резонанс полностью исчезает. В приближенных расчетах резонанса в системах с малым затуханием можно считать, что $\Omega_0 \approx \omega_0$.

5°. Зависимость полной энергии механической системы от времени имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi + \dot{x} F_0 \cos \Omega t,$$

где $\Phi = \frac{r\dot{x}^2}{2}$ — диссипативная функция, а $\dot{x} F_0 \cos \Omega t$ — мощность внешнего источника энергии, вызывающего вынужденные колебания системы.

6°. Если на систему действует произвольная возмущающая сила $F(t)$, период которой равен T , то эту силу можно разложить в ряд Фурье, т. е. представить в виде суммы гармоник, циклические частоты которых кратны основной циклической частоте $\frac{2\pi}{T}$.

Вынужденные колебания системы, вызываемые силой $F(t)$, являются результатом наложения колебаний системы под действием каждой из гармоник в отдельности. Наиболее сильно влияют на систему те гармоники силы $F(t)$, циклические частоты которых близки к резонансной циклической частоте Ω_0 системы.

3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Если система обладает s степенями свободы, то ее положение относительно системы отсчета полностью определяется значениями s независимых обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, \dots, s$). В состоянии устойчивого равновесия ($q_i = q_{i0}$) потенциальная энергия W_{π} системы имеет минимальное значение $W_{\pi 0}$, которое в силу условности начала отсчета W_{π} в дальнейшем принято равным нулю. В случае малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия ее потенциаль-

ная энергия выражается следующей положительно определенной квадратичной формой от обобщенных координат:

$$W_{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s \beta_{ik} x_i x_k,$$

где $x_i = q_i - q_{i0}$, $x_k = q_k - q_{k0}$, а β_{ik} — постоянные вещественные коэффициенты, причем

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} = \left(\frac{\partial^2 W_{\Pi}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0}.$$

Кинетическая энергия W_K системы выражается также положительно определенной квадратичной формой от обобщенных скоростей:

$$W_K = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s b_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k,$$

где b_{ik} — постоянные вещественные коэффициенты, причем

$$b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 W_K}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0}.$$

2°. Функция Лагранжа системы равна

$$L = \dot{W}_K - W_{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^s (b_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \beta_{ik} x_i x_k).$$

Движение системы описывается s уравнениями Лагранжа второго рода, которые имеют вид

$$\sum_{k=1}^s (b_{ik} \ddot{x}_k + \beta_{ik} x_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.1)$$

3°. Неизвестные функции времени x_k следует искать в форме

$$x_k = A_k e^{i\omega t},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Соотношения между постоянными коэффициентами A_k определяются из системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^s (\beta_{ik} - \omega^2 b_{ik}) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.2)$$

Необходимым условием существования отличных от нуля решений этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega^2 b_{11} & \beta_{12} - \omega^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} - \omega^2 b_{1s} \\ \beta_{21} - \omega^2 b_{21} & \beta_{22} - \omega^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} - \omega^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} - \omega^2 b_{s1} & \beta_{s2} - \omega^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} - \omega^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение степени s относительно ω^2 называют *характеристическим* или *вековым*. Оно имеет s вещественных положительных корней ω_l^2 ($l = 1, 2, \dots, s$). Величины ω_l называют *собственными*, или *главными циклическими частотами системы*.

4°. Для каждого корня ω_l^2 из уравнений (6.2) можно найти соответствующую систему значений A_k : $A_k = A_k(\omega_l^2)$. Общее решение системы (6.1) имеет вид

$$x_k = \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (6.3)$$

где C_l, φ_l — независимые вещественные постоянные, определяемые из начальных условий:

$$\begin{aligned} x_k(0) &= \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \cos \varphi_l, \\ \dot{x}_k(0) &= - \sum_{l=1}^s A_k(\omega_l^2) C_l \omega_l \sin \varphi_l \end{aligned}$$

($k = 1, 2, \dots, s$).

Из (6.3) следует, что колебания обобщенной координаты x_k являются результатом наложения s гармонических колебаний, каждое из которых имеет, вообще говоря, произвольные амплитуды и начальные фазы, но вполне определенные циклические частоты ω_l .

5°. Выражения $\theta = C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l)$, где $l = 1, 2, \dots, s$, называют *нормальными* или *главными координатами* механической системы. Они связаны с координатами x_k линейным однородным преобразованием:

$$x_k = \sum_{l=1}^s A_{kl}(\omega_l^2) \theta_l \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

В свою очередь,

$$\theta_l = \sum_{k=1}^s a_{lk} x_k \quad (l = 1, 2, \dots, s),$$

где a_{lk} — постоянные вещественные коэффициенты.

Кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные через нормальные координаты, имеют вид сумм квадратов:

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \beta_l \dot{\theta}_l^2, \quad W_k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s b_l \dot{\theta}_l^2.$$

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s (b_l \dot{\theta}_l^2 - \beta_l \theta_l^2) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s b_l (\dot{\theta}_l^2 - \omega_l^2 \theta_l^2),$$

где $\omega_l = \sqrt{\beta_l / b_l}$ — собственная циклическая частота системы, соответствующая нормальной координате θ_l . Обычно вместо нормальных координат θ_l пользуются *нормированными нормальными координатами* $Q_l = \sqrt{b_l} \theta_l$.

Тогда $L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s (\dot{Q}_l^2 - \omega_l^2 Q_l^2)$. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, s).$$

6°. Для системы с двумя степенями свободы, соответствующими обобщенным координатам x_1 и x_2 ,

$$W_k = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{x}_1^2 + 2b_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + b_{22} \dot{x}_2^2),$$

$$W_n = \frac{1}{2} (\beta_{11} x_1^2 + 2\beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{22} x_2^2).$$

Нормальные (ненормированные) координаты системы θ_1 и θ_2 связаны с x_1 и x_2 соотношениями:

$$x_1 = \gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2,$$

$$x_2 = \theta_1 + \theta_2,$$

$$\theta_1 = \frac{x_1 - \gamma_2 x_2}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

$$\theta_2 = \frac{x_1 - \gamma_1 x_2}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

где γ_1 и γ_2 удовлетворяют уравнениям:

$$b_{11}\gamma_1\gamma_2 + b_{12}(\gamma_1 + \gamma_2) + b_{22} = 0,$$

$$\beta_{11}\gamma_1\gamma_2 + \beta_{12}(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_{22} = 0.$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы, выраженные в нормальных координатах θ_1 и θ_2 , имеют вид

$$W_k = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2),$$

$$W_n = \frac{1}{2} (\beta_1 \theta_1^2 + \beta_2 \theta_2^2),$$

где

$$b_l = b_{11}\gamma_l^2 + 2b_{12}\gamma_l + b_{22},$$

$$\beta_l = \beta_{11}\gamma_l^2 + 2\beta_{12}\gamma_l + \beta_{22}$$

$$(l = 1, 2).$$

Квадраты собственных циклических частот системы равны

$$\omega_l^2 = \frac{\beta_l}{b_l} = \frac{\beta_{11}\gamma_l^2 + 2\beta_{12}\gamma_l + \beta_{22}}{b_{11}\gamma_l^2 + 2b_{12}\gamma_l + b_{22}} \quad (l = 1, 2).$$

Примеры.

1. Двойной плоский маятник (рис. 1.6.11). Потенциальная энергия:

$$W_{\text{п}} = m_1 g l_1 (1 - \cos \alpha) + \\ + m_2 g [l_1 (1 - \cos \alpha_1) + l_2 (1 - \cos \alpha_2)].$$

В случае малых колебаний $\sin \frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1}{2}$

и $\sin \frac{\alpha_2}{2} \approx \frac{\alpha_2}{2}$,

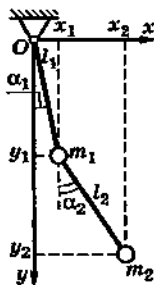


Рис. 1.6.11

$$W_{\text{п}} = \frac{m_1 m_2}{2} g l_1 \alpha_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \alpha_2^2,$$

$$\beta_{11} = (m_1 + m_2) g l_1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \beta_{22} = m_2 g l_2.$$

Кинетическая энергия:

$$W_{\text{к}} = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

где

$$x_1 = l_1 \sin \alpha_1, \quad y_1 = l_1 \cos \alpha_1,$$

$$x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2, \quad y_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2.$$

В случае малых колебаний

$$W_{\text{к}} = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\alpha}_2^2,$$

$$b_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2, \quad b_{12} = m_2 l_1 l_2, \quad b_{22} = m_2 l_2^2.$$

Уравнения Лагранжа для малых колебаний имеют вид:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1 + m_2) g \alpha_1 = 0,$$

$$l_1 \ddot{\alpha}_1 + l_2 \ddot{\alpha}_2 + g \alpha_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 - \omega^2(m_1 + m_2)l_1^2 & -\omega^2 m_2 l_1 l_2 \\ -\omega^2 m_2 l_1 l_2 & m_2 gl_2 - \omega^2 m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Квадраты собственных циклических частот ω_1 и ω_2 равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left\{ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \right\}.$$

Общее решение имеет вид:

$$\alpha_1 = \left(\frac{g}{\omega_1^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} \right) C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ + \left(\frac{g}{\omega_2^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} \right) C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2 = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

2. Плоское движение материальной точки под действием двух взаимно перпендикулярных квазиупругих сил F_1 и F_2 . В прямоугольной декартовой системе координат xOy , начало которой совпадает с положением равновесия материальной точки, а оси Ox и Oy направлены вдоль линий действия соответственно силы F_1 и силы F_2 , уравнения движения точки имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \beta_1 x = 0, \\ m\ddot{y} + \beta_2 y = 0, \end{cases}$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты квазиупругих сил F_1 и F_2 . Координаты x и y являются нормальными, и их зависимость от времени имеет вид

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{\beta_1}{m}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{\beta_2}{m}}$ — собственные циклические частоты.

Таким образом, движение точки является результатом наложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Траектория точки заключена внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям Ox и Oy и соответственно равны $2A_1$ и $2A_2$, а центр совпадает с точкой O . Если отношение частот ω_1 и ω_2 — число рациональное, то траектории замкнуты и их называют *фигурами Лиссажу*. Вид фигур Лиссажу зависит от $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\frac{A_2}{A_1}$ и от приведенной разности начальных

фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \varphi_2$ (рис. 1.6.12). Отношение частот

$\frac{\omega_2}{\omega_1}$ равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу с горизонтальной и вертикальной сторонами прямоугольника, в который она вписывается.

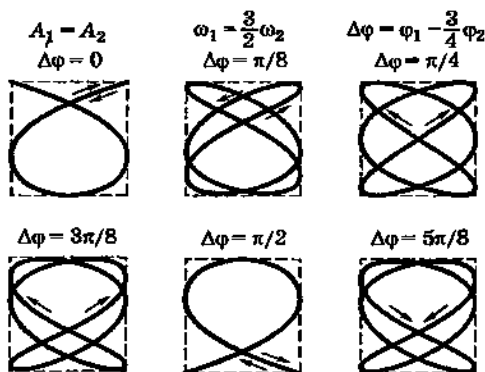


Рис. 1.6.12

Если $\omega_1 = \omega_2$, то фигуры Лиссажу имеют форму эллипса:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Такие колебания называют *эллиптически поляризованными*. На рис. 1.6.13 показаны частные слу-

чаи эллиптически поляризованных колебаний. При $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0; \pm 1; \dots$) эллипс приведен к осям Ox и Oy . Если, кроме того, $A_1 = A_2$, то траектория точки имеет вид окружности.

Такие колебания называют *циркулярно поляризованными* (поляризованными по кругу). Если $\varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), то эллипс вырождается в отрезок прямой, и колебания называют *линейно поляризованными*.

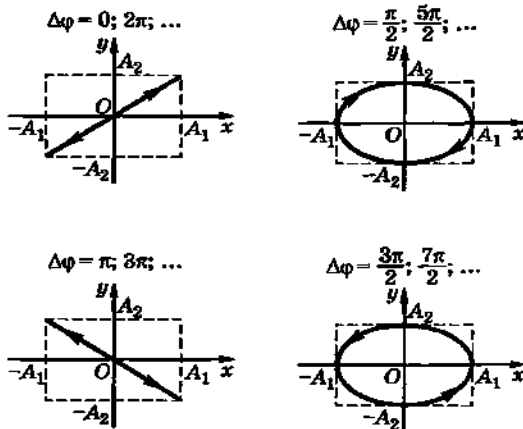


Рис. 1.6.13

3. Два одинаковых математических маятника с упругой связью (рис. 1.6.14). Если массой пружины B можно пренебречь, то в случае малых колебаний

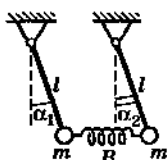


Рис. 1.6.14

$$W_k = \frac{ml^2}{2} (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2)$$

и

$$W_{\pi} = \frac{mgl}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{2} al^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

где a — коэффициент упругости пружины, m — масса маятника.

Произведя замену переменных: $\theta_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ и $\theta_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$, получим

$$W_k = ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad \text{и} \quad W_{\text{п}} = mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2\alpha l^2 \theta_2^2.$$

Координаты θ_1 и θ_2 являются нормальными. Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0,$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{m} \right) \theta_2 = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — циклическая частота колебаний свободных маятников. Собственные циклические частоты системы равны ω_0 и $\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2\alpha}{m}}$; $\theta_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\theta_2 = A_2 \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{m\omega_0^2}} t + \varphi_2\right)$.

Б. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

1°. Если в системе отсутствует сухое трение, то в случае малых колебаний можно считать, что обобщенные силы трения $F_{i,\text{тр}}$, соответствующие обобщенным координатам q_i , являются линейными функциями

обобщенных скоростей: $F_{i,\text{тр}} = - \sum_{k=1}^s \alpha_{ik} \dot{x}_k$, где s — чис-

ло степеней свободы системы, x_k — отклонения ее обобщенных координат q_k от их равновесных значений q_{k0} , α_{ik} — обобщенные коэффициенты трения ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$), которые можно считать постоянными.

Зависимость полной механической энергии W системы от времени имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi,$$

где $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$ — диссипативная функция системы,

являющаяся существенно положительной, так как механическая энергия W в процессе свободных колебаний системы непрерывно убывает.

2°. Уравнения Лагранжа для системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_{\text{тр}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Пользуясь для функции Лагранжа выражением (6.1), получаем:

$$\sum_{k=1}^s (b_{ik} \ddot{x}_k + \alpha_{ik} \dot{x}_k + \beta_{ik} x_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.1')$$

3°. Решение этой системы однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка проводится аналогично тому, как это сделано для системы (6.1); неизвестные функции $x_k(t)$ следует искать в форме $x_k = A_k e^{\lambda t}$. Соотношения между постоянными коэффициентами A_k определяются из системы однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^s (\beta_{ik} + \alpha_{ik} \lambda + b_{ik} \lambda^2) A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.4)$$

Характеристическое уравнение, служащее для определения значений λ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} + \lambda \alpha_{11} + \lambda^2 b_{11} & \beta_{12} + \lambda \alpha_{12} + \lambda^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} + \lambda \alpha_{1s} + \lambda^2 b_{1s} \\ \beta_{21} + \lambda \alpha_{21} + \lambda^2 b_{21} & \beta_{22} + \lambda \alpha_{22} + \lambda^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} + \lambda \alpha_{2s} + \lambda^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} + \lambda \alpha_{s1} + \lambda^2 b_{s1} & \beta_{s2} + \lambda \alpha_{s2} + \lambda^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} + \lambda \alpha_{ss} + \lambda^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Оно имеет $2s$ корней, которые, в силу вещественности коэффициентов β_{ik} , α_{ik} и b_{ik} , являются либо вещественными, либо попарно комплексно сопряженными, т. е. $\lambda_l = \mu_l + i\omega_l$ и $\lambda_l^* = \mu_l - i\omega_l$, причем $\mu_l < 0$, а $\omega_l \geq 0$.

Значения $A_k = A_k(\lambda_l)$, получаемые из системы (6.4) для каждой пары комплексно сопряженных корней, являются комплексно сопряженными:

$$A_k(\lambda_l) = \gamma_{kl} + i\delta_{kl}, \quad A_k(\lambda_l^*) = \gamma_{kl} - i\delta_{kl} = A_k^*(\lambda_l)$$

Общее решение системы (6.1'), в случае, когда все корни λ_l разные и комплексно сопряженные, имеет вид

$$x_k = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \operatorname{Re} \left\{ A_k(\lambda_l) C_l e^{i\omega_l t} \right\},$$

где C_l — комплексные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (т. е. значений x_k и $\dot{x}_k$ при $t=0$), а символ Re означает вещественную часть комплексной функции, стоящей в фигурных скобках.

Если корень λ_l веществен ($\omega_l = 0$), то ему в выражении для $x_k(t)$ соответствует аperiodическая составляющая $e^{\lambda_l t} A_k(\lambda_l) \operatorname{Re}\{C_l\}$. Если все корни λ_l вещественны, то движение системы будет полностью аperiodическим.

В. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. В нормированных нормальных координатах Q_l дифференциальные уравнения движения системы распадутся на s независимых уравнений для одномерных вынужденных колебаний, соответствующих каждой из нормальных координат Q_l :

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = f_l(t) \quad (l = 1, 2, \dots, s),$$

где ω_l и $f_l(t) = \sum_{k=1}^s F_k(t) \frac{A_k(\omega_l^2)}{\sqrt{b_l}}$ — собственная циклическая частота колебаний системы и обобщенная внешняя сила, соответствующие нормальной координате Q_l , $F_k(t)$ — обобщенная внешняя (возмущающая) сила, сопряженная с обобщенной координатой x_k .

Условием возникновения резонанса является наличие среди гармоник силы $f_1(t)$ такой, циклическая частота которой близка к ω_1 .

2°. Для системы с двумя степенями свободы, соответствующими обобщенным координатам x_1 и x_2 , связь между обобщенными возмущающими силами $F_k(t)$ и $f_1(t)$ имеет вид

$$f_1(t) = \frac{\gamma_1 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_1}},$$

$$f_2(t) = \frac{\gamma_2 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_2}},$$

где γ_i и b_i имеют тот же смысл, что на стр. 144.

Пример. Двойной пружинный маятник (рис. 1.6.15). Колебания совершаются под действием возмущающей силы $F(t)$. Кинетическая и потенциальная энергии маятника равны:

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2), \quad W_{\pi} = \frac{1}{2} [a_1 x_1^2 + a_2 (x_2 - x_1)^2],$$

где x_1 и x_2 — смещения материальных точек m_1 и m_2 из положений их устойчивого равновесия;

$$b_{11} = m_1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = m_2;$$

$$\beta_{11} = a_1 + a_2, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -a_2, \quad \beta_{22} = a_2.$$

Из уравнений, приведенных на стр. 144, следует, что:

$$\gamma_1 = k + \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad \gamma_2 = k - \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}},$$

$$\text{где } k = \frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1} \frac{a_1 + a_2}{2a_2};$$

$$b_1 = m_1 p_1, \quad b_2 = m_1 p_2, \quad \beta_1 = a_1 n_1, \quad \beta_2 = a_1 n_2,$$

$$p_1 = 2 \left(k^2 + \frac{m_2}{m_1} + k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right),$$

$$p_2 = 2 \left(k^2 + \frac{m_2}{m_1} - k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}} \right),$$

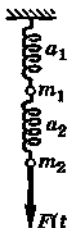


Рис. 1.6.15

$$\begin{aligned}
n_1 &= \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \left(2k^2 + \frac{m_2}{m_1} + 2k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right) + \\
&\quad + \frac{a_2}{a_1} \left(1 - 2k - 2 \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right), \\
n_2 &= \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) \left(2k^2 + \frac{m_2}{m_1} - 2k \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right) + \\
&\quad + \frac{a_2}{a_1} \left(1 - 2k + 2 \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right).
\end{aligned}$$

Квадраты собственных циклических частот равны:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{n_1}{p_2}, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 \frac{n_2}{p_2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{a_1}{m_1}$. Так как $F_1(t) = 0$ и $F_2(t) = F(t) = F_0 \cos \Omega t$, то

$$f_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_1}} \cos \Omega t, \quad f_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_2}} \cos \Omega t.$$

Уравнения движения в нормированных нормальных координатах:

$$\ddot{Q}_l + \omega_0^2 Q_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_l}} \cos \Omega t \quad (l = 1, 2).$$

Общее решение имеет вид

$$Q_l = A_l \cos(\Omega t + \varphi_l) + B_l \cos(\omega_l t + \psi_l),$$

где второй член характеризует свободные колебания системы, а A_l и φ_l , в соответствии с формулами для одномерных вынужденных колебаний, равны

$$A_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_l}(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \quad \operatorname{tg} \varphi_l = 0.$$

Неизвестные функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ равны:

$$x_1 = \frac{\gamma_1 Q_1}{\sqrt{m_1 p_1}} + \frac{\gamma_2 Q_2}{\sqrt{m_1 p_2}}, \quad x_2 = \frac{Q_1}{\sqrt{m_1 p_1}} + \frac{Q_2}{\sqrt{m_1 p_2}}.$$

4. КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ОДНУ СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ

А. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. Дифференциальное уравнение колебаний нелинейной системы в общем случае имеет вид

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0.$$

2°. Колебательную систему называют *автономной*, если время явно не входит в уравнение движения:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (6.5)$$

Дифференциальное уравнение колебаний автономной консервативной системы не содержит обобщенной скорости $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (6.6)$$

и описывает свободные колебания.

Автономную неконсервативную систему называют *диссипативной*, если ее движение носит характер затухающих колебаний. Если автономная неконсервативная система может совершать периодические колебания, то она называется *автоколебательной*, а ее колебания — *автоколебаниями*. Амплитуда и частота автоколебаний определяются только свойствами самой системы.

3°. Колебательную систему называют *неавтономной*, если время t явно входит в дифференциальное уравнение движения. Вынужденными колебаниями неавтономной системы называются процессы, происходящие в системе, если заданная периодическая функция времени $F(t)$ входит слагаемым в дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t).$$

Правую часть уравнения называют *приведенной возмущающей силой*. В зависимости от вида функции $f(x, \dot{x})$ различают вынужденные колебания недиссипативных систем, диссипативных систем или автоколебательных систем.

Параметрическими называют колебания, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x} + [a + P(t)]x = 0,$$

где $P(t)$ — заданная периодическая функция времени.

Б. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. В дифференциальном уравнении (6.6) $f(x)$ представляет собой восстанавливающую силу, приведенную к единице массы системы и нелинейно зависящую от координаты x системы.

Зависимость $f(x)$ называют *квазиупругой характеристикой* системы. При $f(x) = -f(-x)$ квазиупругую характеристику называют *симметричной*. В зависимости от знака второй производной $\frac{d^2f}{dx^2}$ симметричную квазиупругую характеристику называют:

жесткой, если при $x > 0$ $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ (рис. 1.6.16, а),

мягкой, если при $x > 0$ $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$ (рис. 1.6.16, б).

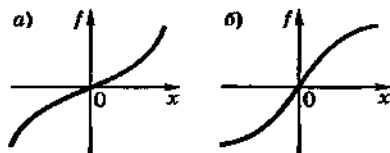


Рис. 1.6.16

2°. Свободные колебания консервативной системы являются периодическими, но *ангармоническими*. Период свободных колебаний зависит от амплитуды колебаний и при симметричной квазиупругой характеристике равен

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\int_x^A f(x') dx'}},$$

где A — амплитуда колебаний.

Примеры.

1. Квазиупругая кубическая характеристика: $f(x) = x^3$.
Период колебаний равен

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \frac{7,316}{A}.$$

2. Математический маятник при больших углах отклонения α (см. рис. 1.6.3). Квазиупругая характеристика:

$$f(\alpha) = \frac{g}{l} \sin \alpha.$$

Период колебаний выражается эллиптическим интегралом:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^A \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}},$$

где A — наибольший угол отклонения (амплитуда колебаний). Выражение для периода T можно представить в виде степенного ряда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{A}{2} + \dots \right].$$

3°. Приближенная формула для периода свободных колебаний при любом виде симметричной квазиупругой характеристики:

$$T = 2\pi A^2 \sqrt{\frac{A}{5 \int_0^A f(x) x^3 dx}}.$$

В. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. При не слишком значительном рассеянии механической энергии период свободных затухающих колебаний приближенно равен периоду $\frac{2\pi}{\omega_0}$ свободных коле-

баний соответствующей консервативной системы, а движение системы в течение одного периода приближенно описывается уравнением

$$x = A \cos \omega_0 t,$$

где A — зависящая от времени амплитуда колебаний. Кривая $A = A(t)$ представляет собой огибающую графика колебаний.

2°. При нелинейно-вязком трении приведенная сила неупругого сопротивления имеет вид

$$R = k|\dot{x}|^{n-1} \dot{x},$$

где k и $n \neq 1$ — постоянные для системы. Уравнение огибающей для системы с линейной квазиупругой характеристикой имеет вид

$$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + \frac{n-1}{2} k S (\omega_0 A_0)^{n-1} t}},$$

где A_0 — отклонение системы при $t = 0$,

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \psi \, d\psi.$$

Значения S даны в таблице:

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
S	4,000	3,500	3,142	2,874	2,666	2,493	2,356

3°. Внутреннее трение в материале при циклическом деформировании характеризуется явлением гистерезиса (рис. I.6.17). Приведенная сила неупругого сопротивления равна

$$R = \pm b A^n \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

где b и n — постоянные системы, а знаки плюс и минус со-

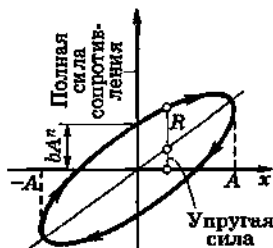


Рис. I.6.17

ответствуют восходящей и нисходящей ветвям петли гистерезиса. При $n = 1$ уравнение огибающей затухающих колебаний имеет вид

$$A = A_0 e^{-\frac{bt\omega_0}{2\pi}};$$

уравнение огибающей затухающих колебаний при $n \neq 1$:

$$A = \frac{A_0}{n-1 \sqrt{1 + (n-1) b A_0^{n-1} \frac{\omega_0 t}{2\pi}}}.$$

Г. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Дифференциальное уравнение колебаний недиссипативной системы при действии гармонической возмущающей силы имеет вид

$$\ddot{x} + f(x) = F_0 \sin \Omega t,$$

где F_0 — амплитуда возмущающей силы, отнесенная к единице массы, Ω — циклическая частота.

2°. В случае кубической симметричной квазиупругой характеристики

$$f(x) = \omega_0^2 x + \beta x^3,$$

уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t$$

имеет приближенное решение

$$x = A \sin \Omega t + \frac{\beta A^3}{32\omega_0^2} (\sin \Omega t - \sin 3\Omega t),$$

содержащее, кроме основной гармоники, также гармонику с тройной циклической частотой. Амплитуда колебаний определяется из кубического уравнения

$$(\Omega^2 - \omega_0^2) A - \frac{3}{4} \beta A^3 + F_0 = 0.$$

При малых значениях циклической частоты Ω уравнение имеет один действительный корень, а при больших частотах — три действительных корня; каждому

из них соответствуют колебания с определенной амплитудой. Многозначность решения означает, что при данной циклической частоте возмущающей силы возможны колебания с разными амплитудами, однако не все возможные виды колебаний устойчивы. На рис. 1.6.18, а изображена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты возмущающей силы для $\beta > 0$. Пунктиром показаны неустойчивые решения, лишенные физического значения.

Последовательность изменения амплитуды вынужденных колебаний при медленном изменении циклической частоты возмущающей силы отмечена на рис. 1.6.18, а стрелками. При увеличении Ω амплитуда A колебаний возрастает, следуя верхней ветви графика. Как только начинается уменьшение циклической частоты Ω , сразу происходит «срыв» амплитуды на нижнюю ветвь графика. Дальнейшее уменьшение значений Ω приводит к новому «перескоку» амплитуды на верхнюю ветвь графика.

3°. Кроме колебаний с циклическими частотами Ω , 3Ω и т. д. (Ω — циклическая частота возмущающей силы), в нелинейных системах возможны *субгармонические колебания*, циклические частоты которых в целое число раз меньше циклической частоты возмущающей силы.

4°. При действии полигармонической возмущающей силы типа $F_1 \sin \Omega_1 t + F_2 \sin \Omega_2 t$, кроме колебаний с циклическими частотами Ω_1 и Ω_2 , возникают колебания с комбинационными циклическими частотами $\Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_1 - \Omega_2$. Наибольшее значение имеют низкочастотные комбинационные колебания, соответствующие циклической частоте $\Omega_1 - \Omega_2$ (эти колебания также иногда называются субгармоническими).

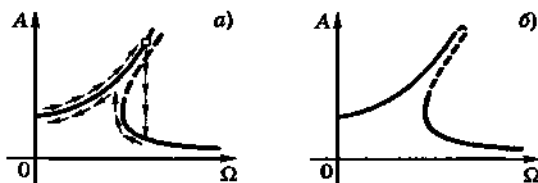


Рис. 1.6.18

Д. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

1°. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний нелинейной системы с вязким сопротивлением и кубической квазиупругой характеристикой имеет вид

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t.$$

2°. Амплитуду колебаний приближенно находят из уравнения

$$(\Omega^2 - \omega_0^2) A - \beta A^3 \pm F_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{F_0^2} (A\Omega)^2} = 0.$$

Зависимость $A(\Omega)$ для $\beta > 0$ имеет вид, изображенный на рис. 1.6.18, б. Пунктиром отмечены неустойчивые решения.

Е. АВТОКОЛЕБАНИЯ

1°. Для исследования характера движения сложных (в частности, автоколебательных) систем используется понятие о фазовой плоскости — плоскости переменных x и $v = \dot{x}$. Каждому мгновенному состоянию системы, характеризуемому величинами x и v , на фазовой плоскости соответствует одна точка, называемая фазовой или изображающей точкой. Каждому процессу движения системы отвечает определенная кривая на фазовой плоскости, называемая фазовой траекторией.

2°. Фазовые траектории являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}, \quad (6.7)$$

в котором $f(x, v) = f(x, \dot{x})$ — функция, входящая в дифференциальное уравнение (6.7) движения автономной системы. Точки фазовой плоскости, в которых $f(x, v) = 0$ и $v = 0$, называют *особыми точками*. Особым точкам соответствуют состояния равновесия системы. Все другие точки фазовой плоскости называют *обыкновенными точками*. Через каждую обыкновенную точку проходит одна и только одна фазовая траектория.

3°. Особая точка, через которую не проходит ни одна из фазовых траекторий и которую окружают замкнутые фазовые траектории, называется *центром* (рис. 1.6.19); центру соответствует состояние устойчивого равновесия.

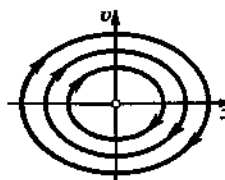


Рис. 1.6.19

Если вблизи особой точки фазовые траектории являются гиперболами, а через саму особую точку проходят только две фазовые траектории, то такая точка называется *седлом* (рис. 1.6.20); седлу соответствует состояние неустойчивого равновесия.

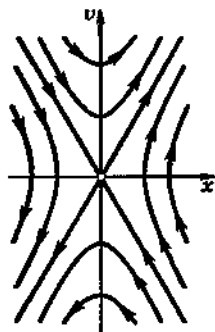


Рис. 1.6.20

Если вблизи особой точки фазовые траектории имеют вид спиралей, навивающихся на эту точку или свивающихся с нее, то эта точка называется *фокусом*, причем в первом случае (рис. 1.6.21, а) равновесие устойчиво, а во втором случае (рис. 1.6.21, б) равновесие неустойчиво.

Если в окрестности особой точки фазовые траектории имеют параболический вид и все проходят через

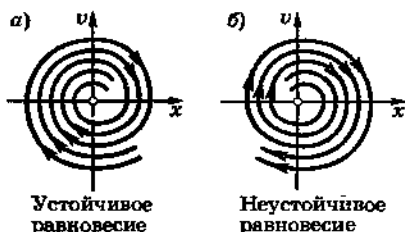


Рис. 1.6.21

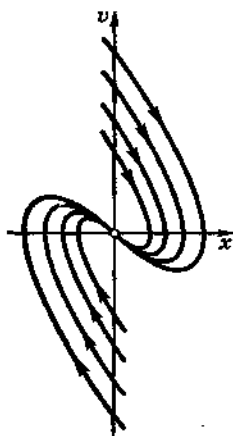


Рис. 1.6.22

нее, то такую точку называют **узлом** (рис. 1.6.22). Если фазовые траектории входят в узел, то ему соответствует состояние устойчивого равновесия, а если фазовые траектории выходят из узла, то ему соответствует состояние неустойчивого равновесия.

Пример. Движение математического маятника при произвольных начальных условиях. Фазовые траектории изображены на рис. 1.6.23. Точки оси абсцисс $0; \pm 2\pi$ являются центрами, а точки $\pm \pi$ — седлами. При достаточно больших начальных скоростях фазовые траектории носят волнообразный характер и нигде не пересекают ось абсцисс; этим траекториям соответствуют убегающие движения

маятника, т. е. неограниченное увеличение угла отклонения маятника.

4°. **Предельным циклом** называют такую замкнутую кривую C , на которую навиваются или с которой свиваются спиральные фазовые траектории, находящиеся вблизи кривой C . Если окрестные фазовые траек-

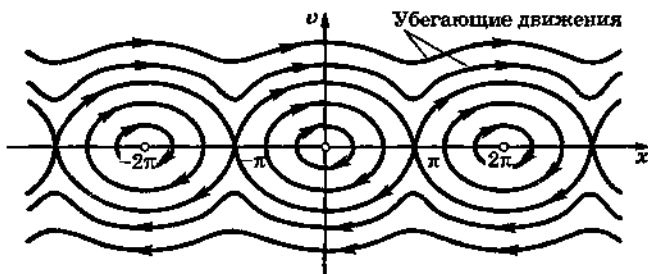


Рис. 1.6.23

тории навиваются на кривую C , то она называется устойчивым предельным циклом (рис. 1.6.24), а если свиваются с нее, то — неустойчивым предельным циклом. Если фазовые траектории, лежащие по одну сторону от кривой C , навиваются на нее, а лежащие по другую сторону от этой кривой свиваются с нее, то она называется *полуустойчивым предельным циклом*.



Рис. 1.6.24

5°. Предельные циклы нелинейных автономных систем имеют следующие отличия от замкнутых фазовых траекторий, описывающих колебания консервативных систем и окружающих особую точку типа центра: 1) предельные циклы являются изолированными кривыми, тогда как замкнутые фазовые траектории для консервативных систем образуют непрерывное семейство; 2) движение по предельному циклу не зависит от начальных условий; для консервативных систем именно начальные условия осуществляют выделение той или иной фазовой траектории из непрерывного семейства.

6°. Если имеется несколько предельных циклов, образующих concentрическую систему, то устойчивые предельные циклы чередуются с неустойчивыми предельными циклами; при этом особая точка, расположенная внутри семейства предельных циклов, может рассматриваться как стянутый в точку предельный цикл.

7°. *Мягким самовозбуждением* называют переход системы из состояния неустойчивого равновесия к движению по устойчивому предельному циклу (рис. 1.6.25). *Жестким самовозбуждением* называют переход системы из состояния устойчивого равновесия к движению по устойчивому предельному циклу; для этого необходимо достаточно большое начальное возмущение, способное «забросить» начальную фазовую точку за кон-

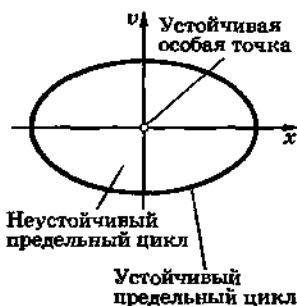


Рис. 1.6.25

тур неустойчивого предельного цикла, расположенного между устойчивой особой точкой и устойчивым предельным циклом (рис. 1.6.25).

8°. Квазилинейными называют механические системы, движение которых описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

содержащим малый параметр μ . Переход к «безразмерному времени» $\tau = \omega_0 t$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right), \quad (6.8)$$

в котором

$$f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{\omega_0^2} f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Приближенное решение уравнения (6.8) имеет вид

$$x = \rho \cos(\tau - \theta),$$

где ρ и θ — медленно меняющиеся функции времени, определяемые уравнениями установления:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho),$$

в которых

$$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi \, d\xi, \quad (6.9)$$

$$\Psi(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi \, d\xi.$$

Здесь $f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi)$ — результат подстановки в функцию $f(x, \frac{dx}{d\tau})$ выражения $\rho \cos \xi$ вместо x и выражения $-\rho \sin \xi$ вместо $\frac{dx}{d\tau}$.

Пример. Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \rho^2)\dot{x}.$$

По формулам (6.9) находим:

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho}{8}(4 - \rho^2), \quad \Psi(\rho) = 0.$$

Уравнения установления имеют вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\mu\rho}{8}(4 - \rho^2), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

Закон изменения амплитуды ρ во времени:

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu\tau}}},$$

где C — постоянная, зависящая от начальных условий.

При $\tau \rightarrow \infty$ величина ρ стремится к значению $\rho = 2$, и движение устанавливается по предельному циклу. Закон движения имеет вид:

$$x = 2 \cos \tau.$$

Раздел II

ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. *Молекулярной физикой* называют раздел физики, в котором изучаются физические свойства и агрегатные состояния тел в зависимости от их молекулярного строения, сил взаимодействия между частицами, образующими тела, и характера теплового движения этих частиц. Для теоретического исследования указанных вопросов используются два взаимно дополняющих друг друга метода — статистический и термодинамический.

2°. *Статистический метод* состоит в изучении свойств макроскопических систем на основе анализа, с помощью методов математической статистики, закономерностей теплового движения огромного числа микрочастиц, образующих эти системы.

3°. *Термодинамический метод* состоит в изучении свойств системы взаимодействующих тел путем анализа условий и количественных соотношений происходящих в системе превращений энергии. Эти вопросы изучаются в разделе теоретической физики, называемой *термодинамикой* (*феноменологической термодинамикой*).

Термодинамический метод, в отличие от статистического, не связан с какими-либо конкретными представлениями о внутреннем строении тел и характере движения образующих их частиц. Термодинамика оперирует с макроскопическими характеристиками изучаемых ею объектов, основываясь на нескольких экспериментально установленных положениях — *законах (началах) термодинамики*, которые обладают весьма большой общностью. Поэтому термодинамический ме-

тод используется для теоретического анализа общих закономерностей самых разнообразных явлений.

4°. *Термодинамической системой* называют совокупность макроскопических объектов (тел и полей), обменивающихся энергией как друг с другом, так и с внешней средой, т. е. с внешними по отношению к системе телами и полями.

Термодинамическую систему называют *замкнутой* или *изолированной*, если отсутствует всякий обмен энергией между нею и внешней средой. Систему называют *изолированной в тепловом отношении* или *адиабатически изолированной*, если отсутствует теплообмен между нею и окружающей средой. Термодинамическую систему, обменивающуюся энергией с внешней средой только путем теплообмена, называют *изолированной в механическом отношении*. Систему называют *закрытой*, если между ней и внешней средой нет обмена веществом (*массообмена*). В противном случае систему называют *открытой*.

5°. *Гомогенной* называют термодинамическую систему, внутри которой нет поверхностей раздела, отделяющих друг от друга макроскопические части системы, различающиеся по своим свойствам и составу. Термодинамическую систему, не удовлетворяющую этому условию, называют *гетерогенной*. Гомогенными системами являются, например, смеси газов, жидкие и твердые растворы, а также всякое химически однородное тело, находящееся целиком в каком-либо одном агрегатном состоянии. Примерами гетерогенных систем являются тающий лед, влажный пар, многие сплавы и горные породы. Систему называют *физически однородной*, если ее состав и физические свойства одинаковы для всех макроскопических частей этой системы, равных по объему. Примером такой системы может служить газ, на который не действует внешнее силовое поле.

Фазой называют совокупность всех гомогенных частей термодинамической системы, которые в отсутствие внешнего силового воздействия являются физически однородными. Например, влажный пар состоит из двух фаз — кипящей жидкости и сухого насыщенного пара.

Компонентами (независимыми компонентами) термодинамической системы называют различные вещества, наименьшее число которых достаточно для образования всех фаз системы.

Раствором называют гомогенную систему (твердую, жидкую или газообразную), состоящую из двух или большего числа химически чистых веществ. Один из компонентов раствора (обычно тот, который содержится в наибольшем количестве) называют *растворителем*, а остальные компоненты — *растворенными веществами*.

6°. Состояние термодинамической системы определяют совокупностью значений ее *термодинамических параметров (параметров состояния)* — всех физических величин, характеризующих макроскопические свойства системы (ее плотность, энергию, вязкость, поляризацию, намагниченность и т. д.). Два состояния системы считают разными, если для них численные значения хотя бы одного из термодинамических параметров неодинаковы. Состояние системы называют *стационарным*, если оно не изменяется во времени. Стационарное состояние системы называют *равновесным*, если его неизменность во времени не обусловлена протеканием какого-либо внешнего по отношению к системе процесса.

Термодинамические параметры системы взаимосвязаны. Поэтому равновесное состояние системы можно однозначно определить, указав значения ограниченного числа этих параметров. *Основными параметрами* состояния являются давление, температура и удельный (или молярный) объем.

В термодинамике различают внешние и внутренние параметры состояния системы. *Внешними параметрами состояния* называют параметры, зависящие только от обобщенных координат внешних тел, с которыми взаимодействует система. Примером внешнего параметра для газа является его объем, зависящий от положения внешних тел — стенок сосуда. Для газа, находящегося в гравитационном или каком-либо другом внешнем силовом поле, внешним параметром является также напряженность этого поля. *Внутренними параметрами состояния* называют параметры, зависящие как от обобщенных координат внешних тел, так и от усредненных значений координат и скоростей частиц, образующих систему. Внутренними параметрами являются, например, давление и энергия системы.

7°. *Давлением* называют физическую величину p , равную пределу отношения нормальной силы ΔF_n , дей-

ствующей на участок поверхности тела площадью ΔS , к величине ΔS при ΔS , стремящейся к нулю:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}.$$

Удельным объемом v называют величину, обратную плотности ρ : $v = \frac{1}{\rho}$. Для однородного тела удельный объем равен отношению его объема к массе.

Количество вещества в системе оценивают количеством содержащихся в ней одинаковых структурных элементов (атомов, молекул, ионов или других частиц). В Международной системе единиц (СИ) за единицу количества вещества принят *моль*. Количество одинаковых частиц, содержащихся в одном их моле, называют *постоянной (числом) Авогадро* $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Молярной массой химически однородного вещества называют величину $\mu = \frac{M}{\nu}$, где M — масса, а ν — число молей рассматриваемого вещества. *Молярным объемом* называют величину $V_\mu = \frac{V}{\nu}$, где V — объем, занимаемый ν молями вещества; $V_\mu = \mu v = \frac{\mu}{\rho}$.

8°. Температурой называют физическую величину, характеризующую степень нагретости тела. В состоянии термодинамического равновесия все тела, образующие систему, имеют одинаковую температуру. Измерение температуры можно производить только косвенным путем, основываясь на зависимости от температуры таких физических свойств тел, которые поддаются непосредственному измерению. Применяемые для этого тела (вещества) называют *термометрическими*, а устанавливаемую с их помощью шкалу температуры — *эмпирической*.

Основной недостаток эмпирических шкал температуры состоит в их зависимости от специфических особенностей конкретных термометрических веществ. В качестве исходных значений, служащих при построении шкалы температуры для установления начала от-

счета температуры и ее единицы — *градуса*, применяют температуры перехода химически чистых веществ из одного агрегатного состояния в другое, например температуры плавления льда t_0 и кипения воды t_K при нормальном атмосферном давлении, равном 101325 Н/м^2 . Величины t_0 и t_K в зависимости от типа шкалы имеют следующие значения:

а) по шкале Цельсия (стоградусной шкале): $t_0 = 0^\circ\text{C}$, $t_K = 100^\circ\text{C}$;

б) по шкале Фаренгейта: $t_0 = 32^\circ\text{F}$, $t_K = 212^\circ\text{F}$.

Связь между температурами, выраженными в градусах Цельсия и Фаренгейта, имеет вид

$$\frac{t^\circ\text{C}}{100} = \frac{t^\circ\text{F} - 32}{180};$$

в) по шкале Кельвина: температуру T отсчитывают от абсолютного нуля ($t = -273,15^\circ\text{C}$) и называют *термодинамической* или *абсолютной температурой*. Связь между температурой по шкале Кельвина ($T \text{ К}$) и шкале Цельсия ($t^\circ\text{C}$) имеет вид

$$T \text{ К} = t^\circ\text{C} + 273,15^\circ\text{C}.$$

9°. Внутренние параметры термодинамической системы, находящейся в равновесном состоянии, зависят только от ее внешних параметров и температуры:

$$y_k = f(x_1, x_2, \dots, x_n, T), \quad (1.1)$$

где y_k — внутренний параметр, а $x_1, \dots, x_n$ — внешние параметры. Например, равновесное состояние физически однородной термодинамической системы в соответствии с *правилом фаз Гиббса* полностью определяется двумя параметрами. Поэтому равновесное давление в этой системе является функцией ее объема и температуры (масса системы предполагается фиксированной):

$$p = f_1(V, T). \quad (1.2)$$

10°. Если в уравнении (1.1) y_k представляет собой обобщенную силу, сопряженную какому-либо из внешних параметров $x_1, \dots, x_n$, то уравнение (1.1) называют *термическим уравнением состояния системы* (уравнением состояния системы). Например, уравнение (1.2) является термическим уравнением состояния физически однородной системы.

Уравнение (1.1), записанное для внутренней энергии U системы:

$$U = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, T),$$

называют *калорическим уравнением состояния системы*.

В термодинамике уравнения состояния исследуемой системы предполагаются известными из опыта. Теоретический вывод этих уравнений может быть осуществлен методами статистической физики.

11°. Термодинамическим процессом называют всякое изменение состояния термодинамической системы. **Равновесным (квазистатическим) процессом** называют термодинамический процесс, при котором система проходит непрерывный ряд равновесных состояний. **Круговым процессом или циклом** называют термодинамический процесс, в результате совершения которого система возвращается в исходное состояние.

Изопроцессами называют термодинамические процессы, протекающие при неизменном значении какого-либо параметра состояния (масса системы предполагается неизменной). **Изохорным (изохорическим) процессом** называют термодинамический процесс, протекающий при постоянном объеме системы. **Изобарным (изобарическим) процессом** называют термодинамический процесс, протекающий при постоянном давлении. **Изотермическим (изотермным) процессом** называют термодинамический процесс, протекающий при постоянной температуре.

Адиабатным (адиабатическим) процессом называют термодинамический процесс, осуществляемый системой без теплообмена с внешними телами.

Релаксацией называют процесс возвращения в состояние термодинамического равновесия системы, выведенной из этого состояния. Мерой быстроты протекания релаксации служит *время релаксации* — промежуток времени, в течение которого отклонение какого-либо параметра системы от его равновесного значения уменьшается в $e \approx 2,71$ раз.

12°. Функцией состояния называют такую физическую характеристику системы, изменение которой при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от вида соответствующего этому переходу термодинамического процесса, а целиком определяется значениями параметров начального и конечного состояний. Важнейшими функциями состояний являются *внут-*

ренная энергия U , энтальпия H , энтропия S , изохорно-изотермный потенциал (свободная энергия) F и изобарно-изотермный потенциал (потенциал Гиббса) Φ .

Экстенсивными величинами называют функции состояния термодинамической системы, зависящие от ее массы. Таковы, например, перечисленные выше функции. В уравнениях термодинамики часто используют значения экстенсивных величин, отнесенные либо к единице массы системы, либо к одному молю.

Интенсивными величинами называют функции состояния термодинамической системы, не зависящие от ее массы. Таковы, например, температура, плотность, вязкость, диэлектрическая проницаемость и т. д.

13°. Равновесные состояния физически однородной системы и совершаемые ею равновесные процессы можно изображать графически соответственно точками и кривыми на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами, вдоль осей которых откладываются параметры состояния системы или однозначно связанные с ними функции состояния. Такое графическое изображение называют *термодинамической диаграммой*. Наиболее распространенными являются диаграммы $V - p$, $S - T$ и $S - H$ (первый символ указывает величину, откладываемую по оси абсцисс, второй — по оси ординат).

Глава 2

ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1. ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

1°. *Идеальным газом* называют газ, в котором отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия. С достаточной степенью точности газы можно считать идеальными в тех случаях, когда рассматриваются их состояния, далекие от областей фазовых превращений.

2°. Для идеальных газов справедливы следующие законы.

Закон Бойля—Мариотта. При неизменных температуре и массе произведение давления и объема газа постоянно:

$$pV = \text{const.}$$

Закон Гей-Люссака. При постоянном давлении объем данной массы газа прямо пропорционален его абсолютной температуре:

$$V = \alpha V_0 T = V_0 \frac{T}{T_0},$$

где V_0 — объем газа при температуре $T_0 = 273,15$ К, $\alpha = \frac{1}{T_0}$ — коэффициент объемного расширения.

Закон Шарля. При постоянном объеме давление данной массы газа прямо пропорционально его абсолютной температуре:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0},$$

где p_0 — давление газа при температуре $T_0 = 273,15$ К.

Закон Авогадро. При одинаковых давлениях и одинаковых температурах в равных объемах различных идеальных газов содержится одинаковое число молекул, или, что то же самое, при одинаковых давлениях и одинаковых температурах моли различных идеальных газов занимают одинаковые объемы.

Так, например, при нормальных условиях ($t = 0^\circ\text{C}$ и $p = 101\,325$ Н/м² = 1 атм = 760 мм рт. ст.) молярный объем любого идеального газа $\frac{RT}{p} = V_\mu = 0,022414$ м³/моль.

Концентрацию молекул идеального газа при нормальных условиях называют числом *Ломмидта*; оно равно

$$n_0 = \frac{N_A}{V_\mu} = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

3°. Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$pV_\mu = RT, \text{ или } pV = \nu RT,$$

где p , V_μ и T — давление, молярный объем и термодинамическая температура газа, ν — число молей, R — молярная (универсальная) газовая постоянная, равная работе, совершаемой одним молем идеального газа при изобарном нагревании на один кельвин:

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Для произвольной массы m газа с молярной массой μ объем $V = \nu V_\mu = \frac{m}{\mu} V_\mu$, и уравнение состояния имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ или } pV = \nu RT.$$

Это уравнение называют *уравнением Клапейрона — Менделеева*. Поскольку $\frac{V}{m} = v$ — удельный объем газа, то

$$pv = \frac{R}{\mu} T = BT,$$

где $B = \frac{R}{\mu}$ — *удельная газовая постоянная*, зависящая от молярной массы газа.

4°. Из уравнения Клапейрона—Менделеева следует, что концентрация молекул идеального газа равна

$$n = \frac{N_A}{V_\mu} = \frac{pN_A}{RT} = \frac{p}{kT},$$

где $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — *постоянная Больцмана*, N_A — *постоянная Авогадро*.

2. СМЕСИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1°. *Смесью газов* называют совокупность нескольких разнородных газов, которые при рассматриваемых условиях не вступают друг с другом в химические реакции. Смесью газов представляет собой гомогенную термодинамическую систему.

Весовой концентрацией g_i (*весовой долей*, *весовой долевой концентрацией*) i -го газа, входящего в состав смеси, называют отношение его массы m_i к массе m всей смеси:

$$g_i = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

где N — общее число разнородных газов, образующих смесь.

Молярной концентрацией x_i (молярной долей, молярной долевой концентрацией) i -го газа называют отношение числа молей этого газа к числу молей всех газов в смеси:

$$x_i = \frac{v_i}{N},$$

$$\sum_{i=1} v_i$$

где v_i — число молей i -го газа.

2°. Парциальным давлением p_i i -го газа в смеси называют давление, под которым находился бы этот газ, если бы из смеси были удалены все остальные газы, а объем и температура сохранились прежними:

$$p_i = \frac{m_i}{\mu_i} \frac{RT}{V}, \text{ или } p_i = v_i \frac{RT}{V}. \quad (2.1)$$

где V и T — объем и температура смеси.

Закон Дальтона. Давление смеси идеальных газов равно сумме их парциальных давлений:

$$p = \sum_{i=1}^N p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^N v_i. \quad (2.2)$$

Из закона Дальтона следует, что парциальное давление i -го газа равно произведению давления смеси на молярную концентрацию этого газа: $p_i = x_i p$.

3°. Парциальным объемом V_i i -го газа в смеси называют тот объем, который имел бы этот газ, если бы из смеси все остальные газы были удалены, а давление и температура сохранились прежними:

$$V_i = v_i \frac{RT}{p}. \quad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует закон Амага: объем смеси идеальных газов равен сумме их парциальных объемов, т. е.

$$V = \sum_{i=1}^N V_i.$$

Парциальный объем i -го газа равен произведению объема смеси на молярную концентрацию этого газа: $V_i = x_i V$.

4°. При расчете параметров состояния смеси идеальных газов можно пользоваться уравнением Клапейрона — Менделеева, записанным в форме

$$pV = \frac{m}{\mu_{\text{см}}} RT$$

или

$$pV = mB_{\text{см}}T,$$

где $\mu_{\text{см}} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i} \right)^{-1}$ — молярная масса смеси, $B_{\text{см}} = \frac{R}{\mu_{\text{см}}} =$

$= R \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i}$ — удельная газовая постоянная смеси.

Г л а в а 3

ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ И ЭНТАЛЬПИЯ

1°. *Внутренней энергией* U называют энергию системы, зависящую только от ее термодинамического состояния. Для системы, не подверженной действию внешних сил и находящейся в состоянии макроскопического покоя, внутренняя энергия представляет собой полную энергию системы. В некоторых простейших случаях внутренняя энергия равна разности между полной энергией W системы и суммой кинетической энергии $W_{\text{к}}$ ее макроскопического движения и потенциальной энергии $W_{\text{п}}^{\text{внеш}}$, обусловленной действием на систему внешних силовых полей:

$$U = W - (W_{\text{к}} + W_{\text{п}}^{\text{внеш}}).$$

Внутренняя энергия системы включает в себя энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и др.), энергию взаимодействия этих частиц, энергию электронных оболочек атомов и ионов, внутриядерную энергию и т. д.

2°. Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы: ее изменение ΔU при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса и равно $\Delta U = U_2 - U_1$. Если система совершает круговой процесс, то полное изменение ее внутренней энергии равно нулю:

$$\oint dU = 0.$$

3°. Внутренняя энергия может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого U_0 , которое не может быть найдено методами термодинамики. Однако это несущественно, так как при термодинамическом анализе системы приходится иметь дело не с абсолютными значениями ее внутренней энергии, а с ее зависящими от U_0 изменениями этой энергии в различных процессах. Поэтому часто полагают $U_0 = 0$, а под внутренней энергией системы понимают только те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых процессах. Например, при не слишком высоких температурах внутреннюю энергию идеального газа можно считать равной сумме кинетических энергий хаотического движения его молекул.

4°. Внутренняя энергия гомогенной системы является аддитивной величиной: она равна сумме внутренних энергий всех ее макроскопических частей, т. е. пропорциональна массе системы. Внутренняя энергия гетерогенной системы включает в себя не только сумму внутренних энергий всех гомогенных частей системы, но также энергию молекулярного взаимодействия их поверхностных слоев. Однако в большинстве случаев внутреннюю энергию гетерогенной системы также можно считать аддитивной величиной, равной сумме внутренних энергий всех фаз системы. Это допущение неприменимо, например, для мелкодисперсных гетерогенных систем.

5°. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его термодинамической температуры T и пропорциональна массе газа m :

$$U = \int_0^T C_V dT + U_0 = m \left(\int_0^T c_V dT + u_0 \right),$$

где C_V и $c_V = C_V/m$ — теплоемкость и удельная теплоемкость газа в изохорном процессе, $u_0 = U_0/m$ — внутренняя энергия единицы массы газа при $T = 0$ К.

Внутренняя энергия смеси N идеальных газов равна сумме внутренних энергий газов, входящих в состав смеси:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^T C_{Vi} dT + U_{0i} \right),$$

где C_{Vi} — теплоемкость i -го компонента смеси в изохорном процессе.

Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса равна

$$U = \int_0^T C_V dT - v^2 \frac{a}{V} + U_0,$$

где $v = m/\mu$, m — масса газа, μ — его молярная масса, a — коэффициент Ван-дер-Ваальса.

6°. *Энтальпией H (теплосодержанием, тепловой функцией)* называют функцию состояния термодинамической системы, равную сумме ее внутренней энергии и произведения давления на объем системы:

$$H = U + pV.$$

Энтальпия идеального газа зависит только от его температуры и пропорциональна массе газа m :

$$H = \int_0^T C_p dT + H_0,$$

где C_p — теплоемкость газа в изобарном процессе, $H_0 = U_0$ — энтальпия газа при $T = 0$ К. Для одноатомных газов $H = C_p T + H_0$.

Энтальпия смеси N идеальных газов равна сумме энтальпий всех газов, входящих в состав смеси:

$$H = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^T C_{pi} dT + H_{0i} \right),$$

где C_{pi} — теплоемкость i -го компонента смеси в изобарном процессе.

Изоэнтальпийным называют термодинамический процесс, в котором энтальпия системы не изменяется.

2. РАБОТА И ТЕПЛОТА

1°. Необходимым условием совершения системой работы является перемещение взаимодействующих с ней внешних тел, т. е. изменение внешних параметров состояния системы. Элементарная работа δA , совершаемая системой над внешними телами, равна

$$\delta A = \sum_i F_i dx_i,$$

где x_i — внешние параметры состояния системы (обобщенные координаты), F_i — соответствующие им обобщенные силы. Элементарная работа $\delta A'$, совершаемая при этом внешними телами над системой, равна δA и противоположна ей по знаку: $\delta A' = -\delta A$.

2°. *Работой расширения* называют работу, совершаемую системой против сил внешнего давления. Элементарная работа расширения системы, подверженной равномерно распределенному внешнему давлению $p_{\text{вн}}$, равна $\delta A = p_{\text{вн}} dV$.

В случае равновесного (квазистатического) процесса расширения $p_{\text{вн}}$ всегда равно давлению p в системе и $\delta A = p dV$. Работа равновесного расширения системы от объема V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

На диаграмме V, p эта работа пропорциональна площади, ограниченной кривой процесса, осью абсцисс и вертикальными прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$ (заштрихованной на рис. II.3.1).

Работа, совершаемая системой, зависит от вида процесса изменения ее состояния. Например, работа расширения зависит не только от параметров начального (p_1, V_1) и конечного (p_2, V_2) состояний, но и от характера процесса 1—2. На этом основано действие всех тепловых машин.

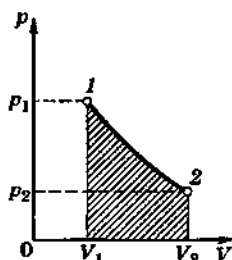


Рис. II.3.1

3°. Для перевода системы из одного состояния в другое с помощью различных термодинамических процессов ей нужно сообщать, вообще говоря, различные количества теплоты. Иными словами, теплота и работа являются функциями процесса изменения состояния системы. Поэтому элементарное количество теплоты δQ , сообщаемого системе в процессе малого изменения ее состояния, подобно элементарной работе δA не является полным дифференциалом.

3. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

1°. *Теплоемкостью C тела* называют отношение элементарного количества теплоты δQ , сообщенного телу в каком-либо процессе, к соответствующему изменению температуры тела:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Теплоемкость зависит от массы тела, его химического состава, термодинамического состояния и вида процесса сообщения теплоты.

2°. *Средней теплоемкостью $\langle C \rangle$ тела* в интервале температур от T_1 до $T_2 > T_1$ называют отношение количества теплоты Q , необходимого для повышения температуры тела от T_1 до T_2 , к $T_2 - T_1$:

$$\langle C \rangle = \frac{Q}{T_2 - T_1}.$$

Связь между средней теплоемкостью тела и его теплоемкостью имеет вид

$$\langle C \rangle = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} C dT.$$

3°. *Удельной теплоемкостью c* называют теплоемкость единицы массы однородного вещества. Для однородного тела $c = C/m$, где m — масса тела.

Для смеси N газов $c = \sum_{i=1}^N g_i c_i$, где c_i и g_i — удельная

теплоемкость и весовая концентрация i -го компонента смеси.

4°. *Атомной теплоемкостью* C_a называют теплоемкость моля атомов простого вещества: $C_a = cA$, где A — атомная масса вещества.

Молярной (мольной) теплоемкостью C_μ называют теплоемкость одного моля вещества: $C_\mu = c\mu$, где μ — молярная масса вещества.

5°. Элементарное количество теплоты δQ , сообщаемое телу для изменения его температуры от T до $T + dT$, равно

$$\delta Q = C dT.$$

В случае однородного тела $\delta Q = cm dT = \nu C_\mu dT$.

Для химически простого тела $\delta Q = \nu C_a dT$.

4. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. В термодинамике обычно рассматривают макроскопически неподвижные закрытые системы. Для таких систем закон сохранения и превращения энергии можно записать в форме

$$\Delta U = Q + A',$$

где A' — работа, совершенная над системой внешними телами, Q — количество теплоты, сообщенное системе, ΔU — изменение внутренней энергии системы.

2°. Работа A , совершаемая системой над внешними телами (против внешних сил), равна $-A'$. Следовательно,

$$Q = \Delta U + A.$$

Количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил (*первый закон термодинамики*).

Если система представляет собой периодически действующую машину, в которой газ, пар или другое рабочее тело в результате совершения кругового процесса возвращается в исходное состояние, то $\Delta U = 0$ и $A = Q$. Следовательно, нельзя построить периодически действующий двигатель, который совершал бы работу, большую подводимой к нему извне энергии (вечный двигатель первого рода невозможен).

3°. Для элементарного изменения состояния системы первый закон термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A$$

или

$$C dT = dU + \delta A,$$

где C — теплоемкость системы.

Если на систему, помимо равномерно распределенного внешнего давления, действуют другие силы, то работа δA равна сумме работы расширения, т. е. работы против внешнего давления, равной $p_{\text{вн}} dV$, и работы δA^* , совершаемой системой против других внешних сил: $\delta A = p_{\text{вн}} dV + \delta A^*$. В равновесном процессе $p_{\text{вн}}$ равно давлению p в системе, и первый закон термодинамики записывается в форме

$$C dT = dU + p dV + \delta A^*$$

или

$$C dT = dH - V dp + \delta A^*,$$

где H — энтальпия системы.

4°. Для равновесного процесса в однофазной однокомпонентной системе, подверженной только равномерному внешнему давлению, $\delta A^* = 0$, $U = f(T, V)$ и $H = f_1(T, p)$, так что

$$C dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_T + p \right] dV$$

или

$$C dT = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_T - V \right] dp.$$

Теплоемкость C_V в изохорном процессе ($V = \text{const}$) равна

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V.$$

Теплоемкость C_p в изобарном процессе ($p = \text{const}$) равна

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \\ &= C_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \end{aligned}$$

5°. Для идеального газа $U = m f(T)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$, и

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = v \frac{R}{p}, \text{ где } v \text{ — число молей газа.}$$

Уравнение Майера: $C_p - C_v = vR$, или для молярных теплоемкостей: $C_{p\mu} - C_{v\mu} = R$, удельных теплоемкостей: $c_p - c_v = \frac{R}{\mu}$.

Величину $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_{p\mu}}{C_{v\mu}} = \frac{c_p}{c_v}$ называют *показателем адиабаты*. Из уравнения Майера следует, что

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{R}{\kappa - 1} \frac{m}{\mu}, \quad C_{v\mu} = \frac{R}{\kappa - 1}, \quad c_v = \frac{R}{(\kappa - 1)\mu}; \\ C_p &= \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \frac{m}{\mu}, \quad C_{p\mu} = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}, \quad c_p = \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)\mu}. \end{aligned}$$

6°. *Тепловым эффектом* E процесса называют сумму количества теплоты Q' , отданного системой в этом процессе, и *теплового эквивалента* A^* работы, равной разности между полной работой системы в этом процессе и работой ее расширения: $E = Q' + A^*$. Так как $Q' = Q$, где Q — количество теплоты, сообщенное системе, то из первого закона термодинамики следует, что в равновесном процессе

$$E = U_1 - U_2 - \int_1^2 p dV = H_1 - H_2 + \int_1^2 V dp.$$

7°. **Закон Гесса.** Тепловой эффект реакции, протекающей в системе при постоянном объеме или при по-

стоянном давлении, не зависит от промежуточных стадий, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы. В изохорном процессе $E_V = -\Delta U = U_1 - U_2$, в изобарном процессе $E_p = -\Delta H = H_1 - H_2$.

Закон Гесса, выражающий первый закон термодинамики применительно к химическим процессам, является основным законом *термохимии*. Из него вытекает ряд следствий, которые упрощают расчет химических реакций, протекающих в системе при $p = \text{const}$ или $V = \text{const}$:

а) тепловой эффект реакции разложения химического соединения численно равен и противоположен по знаку тепловому эффекту реакции синтеза этого соединения из продуктов разложения;

б) разность тепловых эффектов двух реакций, приводящих из разных исходных состояний к одинаковым конечным состояниям, равна тепловому эффекту реакции перехода из одного начального состояния в другое. Следовательно, тепловой эффект какой-либо реакции равен алгебраической сумме тепловых эффектов при сгорании реагентов до одинаковых продуктов (для исходных веществ эти тепловые эффекты считаются положительными, для продуктов реакции — отрицательными);

в) разность тепловых эффектов двух реакций, приводящих из одного исходного состояния к разным конечным состояниям, равна тепловому эффекту реакции перехода из одного конечного состояния в другое. Следовательно, тепловой эффект какой-либо реакции равен алгебраической сумме тепловых эффектов при образовании реагентов из простых веществ (для продуктов реакции эти тепловые эффекты считаются положительными, для исходных веществ — отрицательными).

8°. *Уравнение Кирхгофа* соответственно для изохорного и изобарного тепловых эффектов:

$$\left(\frac{\partial E_V}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U_1}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial U_2}{\partial T}\right)_V = C_{V1} - C_{V2} = -\Delta C_V,$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial H_2}{\partial T}\right)_p = C_{p1} - C_{p2} = -\Delta C_p.$$

5. ПРОСТЕЙШИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1°. *Политропным (политропическим) процессом* называют термодинамический процесс, в котором удельная теплоемкость c газа постоянна. Величину

$n = \frac{c - c_p}{c - c_v}$ называют *показателем политропы*. Изопрцессы и адиабатный процесс — частные случаи политропного процесса.

2°. *Изохорой, изобарой, изотермой, адиабатой и политропой* называют линии, изображающие в какой-либо термодинамической диаграмме соответственно изохорный, изобарный, изотермический, адиабатный и политропный процессы. На рис. II.3.2, II.3.3 и II.3.4 показаны изохоры, изобары, изотермы и адибаты идеального газа в диаграммах $V - p$, $T - p$ и $V - T$. Начальное состояние газа 1 для всех процессов принято одинаковым. Зависимость теплоемкости C идеального газа в политропном процессе от показателя политропы n представлена на рис. II.3.5.

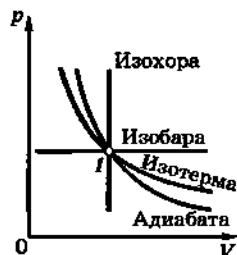


Рис. II.3.2

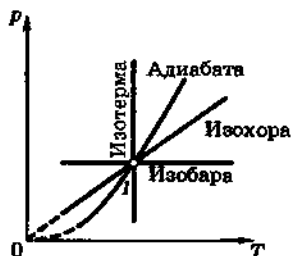


Рис. II.3.3

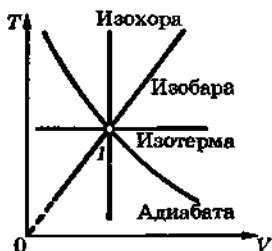


Рис. II.3.4

3°. Некоторые соотношения для политропного процесса идеального газа:

$$\frac{\delta Q}{dV} = \frac{\kappa - n}{\kappa - 1} p,$$

$$\frac{\delta Q}{dp} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} V, \quad \frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{\kappa - 1}{\kappa - n},$$

$$\frac{dU}{\delta Q} = \frac{n - 1}{n - \kappa}, \quad \frac{dH}{\delta Q} = \frac{\kappa(n - 1)}{n - \kappa}.$$

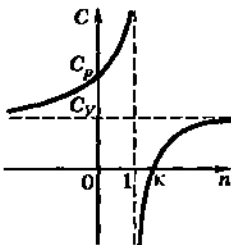


Рис. II.3.5

4°. В таблицах II.1 и II.2 приведены основные соотношения для равновесных изохорного, изобарного, изотермического, адиабатного и политропного процессов, совершаемых идеальным газом, для которого предполагается, что масса неизменна, теплоемкости C_v и C_p не зависят от температуры, а работа совершается только против внешнего давления.

В этих таблицах величины с индексами 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям газа.

Глава 4

ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

1°. *Обратимым термодинамическим процессом* называют термодинамический процесс, допускающий возможность возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения.

Необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

2°. *Необратимым термодинамическим процессом* называют термодинамический процесс, не допускаю-

Таблица II.1

Название и уравнение процесса	Связь между параметрами состояния	Работа в процессе	Количество теплоты, сообщенное в процессе
Изохорный, $V = \text{const}$	$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\delta A = 0$ $A = 0$	$\delta Q = C_V dT$ $Q = C_V (T_2 - T_1)$
Изобарный, $p = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = p(V_2 - V_1)$	$\delta Q = C_p dT$ $Q = C_p (T_2 - T_1)$
Изотермический, $T = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\delta Q = \delta A$ $Q = A$
Адиабатный, $\delta Q = 0$	$p V^\kappa = \text{const}$ $\frac{\kappa}{p T^{1-\kappa}} = \text{const}$ $\frac{1}{V T^{\kappa-1}} = \text{const}$	$\delta A = p dV = -dU$ $A = -\Delta U = C_V (T_1 - T_2) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ $A = \nu \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right] = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} \right]$	$\delta Q = 0$ $Q = 0$
Политропный, $C = \text{const}$	$p V^n = \text{const}$ $\frac{n}{p T^{1-n}} = \text{const}$ $\frac{1}{V T^{n-1}} = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$ $A = \nu \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(n-1)/n} \right] = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-n} \right]$	$\delta Q = C dT$ $Q = C (T_2 - T_1)$

Таблица II.2

Название процесса	Изменение внутренней энергии	Изменение энтальпии	Теплоемкость	Показатель политропы
Изохорный	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU + Vdp = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C_V = \nu \frac{R}{\kappa - 1}$	$n = \pm \infty$
Изобарный	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU = p dV = \delta Q$ $\Delta H = \Delta U = A = Q$	$C_p = \nu \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$	$n = 0$
Изотермический	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dH = 0$ $\Delta H = 0$	$C_T = \pm \infty$	$n = 1$
Адиабатный	$dU = C_V dT = -\delta A$ $\Delta U = -A = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT = -\kappa \delta A$ $\Delta H = -\kappa A = C_p(T_2 - T_1)$	$C_{ad} = 0$	$n = \kappa = \frac{C_p}{C_V}$
Политропный	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C = \nu \frac{R(n - \kappa)}{(\kappa - 1)(n - 1)}$	$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$

ций возможности возвращения системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения.

Все реальные процессы протекают с конечной скоростью. Они сопровождаются трением, диффузией и теплообменом при конечной разности между температурами системы и внешней среды. Следовательно, все они неравновесны и необратимы.

3°. Всякий необратимый процесс в одном направлении (прямом) протекает самопроизвольно, а для осуществления его в обратном направлении так, чтобы система вернулась в первоначальное состояние, требуется *компенсирующий процесс* во внешних телах, в результате которого состояния этих тел оказываются отличными от первоначальных. Например, процесс выравнивания температур двух соприкасающихся различно нагретых тел идет самопроизвольно, т. е. не связан с необходимостью одновременного существования каких-либо процессов в других (внешних) телах. Однако для осуществления обратного процесса увеличения разности температур тел до первоначальной нужны компенсирующие процессы во внешних телах, обуславливающие, например, работу холодильной машины.

4°. Необратимые процессы в силу их неравновесности нельзя изобразить в термодинамических диаграммах. Обычно на практике нужно знать интегральные характеристики необратимого процесса перехода системы из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2, т. е. работу $A_{\text{необр}}$, совершенную системой, и сообщенное ей количество теплоты $Q_{\text{необр}}$. Поэтому необратимый процесс может быть заменен «эквивалентным» ему обратимым процессом 1—2, который переводит систему из состояния 1 в состояние 2 таким образом, что совершаемая при этом работа $A = A_{\text{необр}}$ и получаемое системой количество теплоты $Q = Q_{\text{необр}}$. Эквивалентный обратимый процесс может быть представлен в любой термодинамической диаграмме.

Таким образом, удается условно изобразить графически необратимые процессы. Условность этого

«изображения» состоит в том, что в действительном необратимом процессе система проходит вовсе не через те состояния, которым соответствуют промежуточные точки кривой «эквивалентного» обратимого процесса.

2. КРУГОВЫЕ ПРОЦЕССЫ (ЦИКЛЫ). ЦИКЛ КАРНО

1°. *Нагревателем (теплоотдатчиком)* называют тело, сообщающее рассматриваемой термодинамической системе энергию в форме теплоты.

Холодильником (теплоприемником) называют тело, получающее от рассматриваемой термодинамической системы энергию в форме теплоты.

2°. *Рабочим телом (рабочим агентом)* называют термодинамическую систему, совершающую круговой процесс в тепловой установке. В тепловом двигателе рабочее тело, получая энергию в форме теплоты, часть этой энергии отдает в форме работы. В холодильной установке рабочее тело, получая энергию в форме работы, осуществляет передачу энергии в форме теплоты от холодного тела к телу, более нагретому.

3°. Круговые процессы изображают в термодинамических диаграммах в виде замкнутых кривых. Работа против внешнего давления, совершаемая системой в обратимом круговом процессе, пропорциональна площади, ограниченной кривой этого процесса в диаграмме $V - p$.

Прямым циклом называют круговой процесс, в котором система совершает положительную работу: $A = \oint p \, dV > 0$. В диаграмме $V - p$ прямой цикл изображают в виде замкнутой кривой, проходимой рабочим телом по часовой стрелке.

Обратным циклом называют круговой процесс, в котором работа, совершаемая системой, отрицательна: $A = \oint p \, dV < 0$. В диаграмме $V - p$ обратный цикл

изображают в виде замкнутой кривой, проходимой рабочим телом против часовой стрелки.

В тепловом двигателе рабочее тело совершает прямой цикл, а в холодильной установке — обратный цикл.

4°. Термическим (термодинамическим) коэффициентом полезного действия (КПД) η_t называют отношение работы A , совершенной рабочим телом в рассматриваемом прямом круговом процессе, к сумме Q_1 всех количеств теплоты, сообщенных при этом рабочему телу нагревателями:

$$\eta_t = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_2 — сумма количеств теплоты, отданных рабочим телом холодильникам.

Термический КПД характеризует степень совершенства преобразования внутренней энергии в механическую, происходящего в тепловом двигателе, который работает по рассматриваемому циклу.

5°. Циклом Карно называют прямой круговой процесс (рис. II.4.1), состоящий из двух изотермических процессов $1-1'$ и $2-2'$ и двух адиабатических процессов $1'-2$ и $2'-1$. В процессе $1-1'$ рабочее тело получает от нагревателя количество теплоты Q_1 , а в процессе $2-2'$ рабочее тело отдает холодильнику количество теплоты Q_2 .

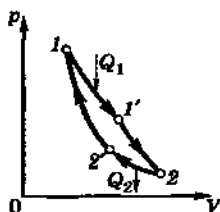


Рис. II.4.1

Теорема Карно: термический КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и является функцией только термодинамических температур нагревателя (T_1) и холодильника (T_2):

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Доказательство теоремы Карно основано на втором законе термодинамики.

6°. Из сопоставления выражений для термического КПД произвольного цикла (п. 4°) и обратимого цикла Карно следует, что в обратимом цикле Карно отношение температур нагревателя и холодильника равно отношению количеств теплоты, соответственно отданной и полученной ими за цикл:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Таким образом, для сравнения температур двух тел нужно осуществить обратимый цикл Карно, в котором эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника, и измерить Q_1 и Q_2 . Устанавливаемую таким образом шкалу температур называют *термодинамической шкалой температур*. Ее преимущество состоит в том, что в соответствии с теоремой Карно она не связана со свойствами какого-либо конкретного термометрического тела. Однако вследствие невозможности осуществления обратимого цикла Карно указанный способ сравнения температур нельзя практически реализовать, и он имеет лишь принципиальное значение.

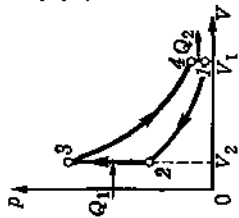
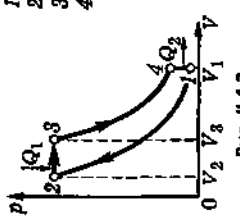
7°. Термический КПД $\eta_{\text{обр}}$ произвольного обратимого цикла не может превосходить термический КПД обратимого цикла Карно, проведенного между температурами $T_{\text{макс}}$ и $T_{\text{мин}}$:

$$\eta_{\text{обр}} \leq \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}},$$

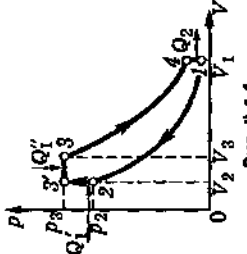
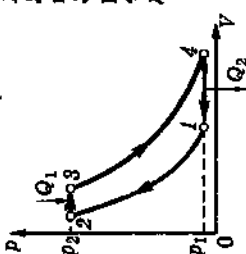
где $T_{\text{макс}}$ и $T_{\text{мин}}$ — экстремальные значения температуры нагревателей и холодильников, участвующих в осуществлении рассматриваемого цикла.

8°. Теоретические циклы поршневых тепловых двигателей описаны в табл. II.3 (с. 193—195).

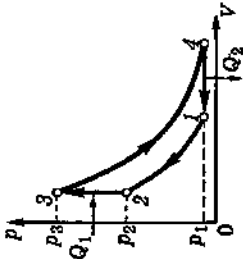
Таблица II.3

Название цикла	Схема цикла	Термический КПД цикла*
Цикл со сгоранием при $V = \text{const}$ (цикл Отто)	1—2 — адиабатное сжатие, 2—3 — изохорное нагревание, 3—4 — адиабатное расширение, 4—1 — изохорное охлаждение.  Рис. II.4.2	$\eta_i = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}}$
Цикл со сгоранием при $p = \text{const}$ (цикл Дизеля)	1—2 — адиабатное сжатие, 2—3 — изобарное нагревание, 3—4 — адиабатное расширение, 4—1 — изохорное охлаждение.  Рис. II.4.3	$\eta_i = 1 - \frac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa \epsilon^{\kappa-1} (\rho - 1)}$

Продолжение табл.

Название цикла	Схема цикла	Термический КПД цикла*
Смешанный цикл со сгоранием при $V = \text{const}$ и $p = \text{const}$ (цикл <i>Тринклера-Сабатэ</i>)	 1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изохорное нагревание, 3-4 — изобарное нагревание, 4-1 — адиабатное расширение, 1-2 — изохорное охлаждение. Рис. II.4.4	$\eta_t = 1 - \frac{\lambda p^{\kappa-1}}{\varepsilon^{\kappa-1}[(\lambda-1) + \kappa\lambda(p-1)]}$
Цикл со сгоранием при $p = \text{const}$	 1-2 — адиабатное сжатие, 2-3 — изохорное нагревание, 3-4 — адиабатное расширение, 4-1 — изохорное охлаждение. Рис. II.4.5	$\eta_t = 1 - \frac{1}{\beta^{(\kappa-1)/\kappa}}$

Окончание табл.

Название цикла	Схема цикла	Термический КПД цикла *
Цикл со сгоранием при $V = \text{const}$	1—2 — адиабатное сжатие, 2—3 — изохорное нагревание, 3—4 — адиабатное расширение, 4—1 — изобарное охлаждение.  рис. II.4.6	$\eta_t = 1 - \frac{\kappa(\lambda^{1/\kappa} - 1)}{(\lambda - 1)\beta(\kappa - 1)/\kappa}$

* Принятые обозначения: $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ — степень сжатия, $\rho = \frac{V_3}{V_2}$ — степень предварительного расширения,

ния, $\lambda = \frac{P_3}{P_2}$ — степень добавочного повышения давления, κ — показатель адиабаты сжатия и расширения,

ния, $\beta = \frac{P_2}{P_1}$ — степень повышения давления при сжатии.

9°. Термический КПД $\eta_{\text{терм, необр}}$ произвольного необратимого цикла всегда меньше термического КПД обратимого цикла Карно, проведенного между экстремальными температурами $T_{\text{макс}}$ и $T_{\text{мин}}$:

$$\eta_{\text{терм, необр}} < \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}.$$

10°. Экономичность холодильной установки характеризуется *холодильным коэффициентом* $\eta_{\text{хол}}$, равным отношению количества теплоты Q , отбираемого от охлаждаемого тела, к тепловому эквиваленту A затрачиваемой на это работы:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q}{A}.$$

Холодильный коэффициент $\eta_{\text{обр}}$ любой холодильной установки, работающей по обратимому циклу, зависит только от температур охлаждаемого тела T_0 и теплоприемника ($T > T_0$), т. е. равен холодильному коэффициенту $\eta_{\text{К}}$ установки, работающей в том же интервале температур по обратимому обратному циклу Карно:

$$\eta_{\text{обр}} = \eta_{\text{К}} = \frac{T_0}{T - T_0}.$$

Для холодильной установки, работающей по необратимому циклу,

$$\eta_{\text{необр}} < \frac{T_0}{T - T_0}.$$

3. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. Первый закон термодинамики, выражающий всеобщий закон сохранения и превращения энергии, не позволяет определить направление протекания термодинамических процессов. Например, основываясь на этом законе, можно было бы попытаться построить *вечный двигатель второго рода*, т. е. двигатель, рабочее тело которого, совершая круговой процесс, получало бы энергию в

форме теплоты от одного внешнего тела и целиком передавало ее в форме работы другому внешнему телу.

2°. Обобщение результатов многочисленных экспериментов привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода. Этот вывод называют *вторым законом термодинамики*; он имеет ряд формулировок, различных по форме, но эквивалентных по существу, в частности:

а) невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы, эквивалентной количеству теплоты, полученному от нагревателя;

б) невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему.

3°. Второй закон термодинамики указывает на существенное различие двух форм передачи энергии — теплоты и работы. Он утверждает, что процесс преобразования упорядоченного движения тела как целого в неупорядоченное движение частиц самого тела и внешней среды является необратимым. Упорядоченное движение может переходить в неупорядоченное без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов, например при трении. В то же время обратный переход неупорядоченного движения в упорядоченное, или, как часто говорят, «переход теплоты в работу», не может являться единственным результатом термодинамического процесса, т. е. всегда должен сопровождаться каким-либо компенсирующим процессом. Например, при равновесном изотермическом расширении идеальный газ совершает работу, которая полностью эквивалентна количеству теплоты, переданному газу нагревателем. Однако плотность газа при этом уменьшается, т. е. «превращение теплоты в работу» не является единственным результатом рассматриваемого процесса. Тепловой двигатель, работающий по прямому циклу Карно, совершает работу, эквивалентную лишь части полученного от нагревателя количества теплоты, так как остальная часть отдается холодильнику, состояние которого вследствие этого изменяется. В холодильной машине энергия передается в форме теплоты от холодного тела к горячему. Однако для осуществления этого процесса необходим компенсирующий процесс совершения работы внешними телами.

4. ЭНТРОПИЯ

1°. Приведенным количеством теплоты Q^* в изотермическом процессе называют отношение количества теплоты Q , полученного системой, к температуре T теплоотдающего тела: $Q^* = \frac{Q}{T}$, где $Q > 0$ при подводе к телу энергии и $Q < 0$ при отводе энергии.

Приведенное количество теплоты для произвольного процесса равно $Q^* = \int \frac{\delta Q}{T}$, где δQ — количество теплоты, сообщенное системе на элементарном участке процесса теплоотдающим телом, температура которого равна T .

2°. Приведенное количество теплоты $Q^*_{\text{обр}}$, сообщаемое системе в любом обратимом круговом процессе, равно нулю (равенство Клаузиуса):

$$Q^*_{\text{обр}} = \oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

где T — температура системы, при которой ей сообщается элементарное количество теплоты δQ , а подынтегральное выражение $\delta Q/T$, в отличие от δQ , является полным дифференциалом. Следовательно, температура системы представляет собой интегрирующий делитель для элементарного количества теплоты, сообщаемого системе в обратимом процессе.

3°. *Энтропией* называют функцию S состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты, сообщенного системе, к температуре последней:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Энтропия сложной системы равна сумме энтропий всех ее однородных частей.

По знаку изменения энтропии системы в обратимом процессе можно судить о направлении теплообмена. Для всех обычных термодинамических систем внутренняя энергия U неограниченно возрастает при $T \rightarrow \infty$, поэтому температура в равновесных состояниях может быть только положительной, так что при нагревании системы $dS > 0$, а при охлаждении $dS < 0$.

Однако существуют системы (*необычные системы*), для которых $\lim_{T \rightarrow \infty} U$ равен некоторой конечной величине

U_0 . Такие системы могут находиться в состояниях как с положительной, так и с отрицательной термодинамической температурой ($T > 0$, если $U < U_0$, и $T < 0$, если $U > U_0$). Примером такой системы может служить система ядерных спинов некоторых кристаллов (например, LiF), которую в течение времени τ , много меньшего времени релаксации τ_1 для спин-решеточного взаимодействия, можно считать изолированной и равновесной, так как время релаксации τ_2 для спин-спинового взаимодействия меньше приблизительно в 10^7 раз. Температура $T = 0$ соответствует состоянию, в котором все спины ориентированы в направлении внешнего магнитного поля; температура $T = \infty$ (или $T = -\infty$) — состоянию полной хаотичности в ориентации спинов; температура $T = -0$ — состоянию, при котором все спины ориентированы в направлении, противоположном внешнему магнитному полю, т. е. когда энергия системы спинов максимальна.

4°. Изменение энтропии в любом обратимом процессе, переводящем систему из состояния 1 в состояние 2, равно приведенному количеству теплоты, переданному системе в этом процессе:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Изоэнтروпийным процессом называют термодинамический процесс, в котором энтропия системы не изменяется. Например, в обратимом адиабатическом процессе $\delta Q = 0$ и $S = \text{const}$.

5°. Энтропия тела может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого (константы интегрирования):

$$S = \int_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} + \text{const},$$

или

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} + S_0.$$

где интегрирование производится вдоль произвольного обратимого процесса, а S_0 — энтропия тела при $T = 0$ К, значения которой не может быть определено с помощью первого и второго законов термодинамики.

6°. Энтропия физически однородной системы является функцией двух независимых параметров состояния, например p и T или T и V (масса системы предполагается неизменной). Поэтому

$$S(V, T) = \int_0^T C_V \frac{dT}{T} + S'_0$$

или

$$S(p, T) = \int_0^T C_p \frac{dT}{T} + S''_0,$$

где интегралы $\int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ и $\int_0^T C_p \frac{dT}{T}$ вычисляют соответ-

ственно для обратимых процессов изохорного и изобарного нагревания системы от $T = 0$ К до температуры T , соответствующей рассматриваемому состоянию, C_V и

C_p — теплоемкости системы в этих процессах, а $S'_0 = S(V, 0)$ и $S''_0 = S(p, 0)$, причем в соответствии с *принципом Нернста* $S'_0 = S''_0 = S_0$.

Примеры.

1. Энтропия идеального газа. По первому закону термодинамики при $\delta A^* = 0$

$$\delta Q = dU + p dV = dH - V dp,$$

где $dU = C_V dT$ и $dH = C_p dT$, так что

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp.$$

Для идеального газа $\frac{p}{T} = \nu \frac{R}{V}$ и $\frac{V}{T} = \nu \frac{R}{p}$, поэтому

$$\begin{aligned} dS &= \nu \left(C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu} \right) = \nu \left(C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right) = \\ &= \nu \left(C_{p\mu} \frac{dV_\mu}{V_\mu} + C_{V\mu} \frac{dp}{p} \right), \end{aligned}$$

где V_μ — объем одного моля газа, $C_{V\mu}$ и $C_{p\mu}$ — его молярные теплоемкости, зависящие только от температуры;

$$S = \nu \left(\int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln V_\mu + a_1 \right),$$

или

$$S = \nu \left(\int C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_2 \right),$$

или

$$S = \nu \left(C_{p\mu} \ln V_\mu + C_{V\mu} \ln p + a_3 \right),$$

где a_1 , a_2 и a_3 — постоянные интегрирования.

Для одноатомных газов $C_{V\mu}$ и $C_{p\mu}$ не зависят от температуры и

$$S = \nu (C_{V\mu} \ln T + R \ln V_\mu + a_1),$$

или

$$S = \nu (C_{p\mu} \ln T - R \ln p + a_2).$$

2. Энтропия смеси N идеальных газов равна сумме энтропий всех компонентов смеси, взятых при температуре смеси и их парциальных давлениях p_i :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \nu_i \left(\int C_{pi} \frac{dT}{T} - R \ln p_i + a_{2i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \nu_i \left(\int C_{pi} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_{2i} \right) + \Delta S_{\text{см}}, \end{aligned}$$

где p — давление смеси,

$$\Delta S_{\text{см}} = -R \sum_{i=1}^N \nu_i \ln x_i = -R \left(\sum_{i=1}^N \nu_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i \ln x_i \right)$$

— энтропия смешения, x_i — молярная концентрация i -го компонента смеси. Энтропия смешения разнородных

идеальных газов не зависит от их индивидуальных особенностей и определяется только молярными концентрациями этих газов и общим числом молей всех газов в смеси. При смешении тождественных газов ($x_i = 1$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_N = 0$) энтропия смешения равна нулю (*парадокс Гиббса*).

3. Энтропия газа Ван-дер-Ваальса

Для газа Ван-дер-Ваальса $dU = C_V dT + v^2 \frac{a}{V^2} dV$;

поэтому

$$\begin{aligned} dS &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T} \left(p + v^2 \frac{a}{V^2} \right) dV = \\ &= v \left[C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu - b} \right] \end{aligned}$$

и

$$S = v \left[\int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln (V_\mu - b) + \text{const} \right],$$

где V_μ — объем одного моля газа, а $C_{V\mu}$ — его молярная теплоемкость.

5. ОСНОВНОЕ СООТНОШЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. Из второго закона термодинамики следует, что в необратимом элементарном процессе изменение энтропии системы $dS > \frac{\delta Q}{T}$, где δQ — количество теплоты, сообщенное системе в этом процессе внешним телом, температура которого равна T .

Для произвольного элементарного процесса

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (4.1)$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства — к необратимым.

2°. Для теплоизолированной (адиабатической) системы $\delta Q = 0$, и выражение (4.1) имеет вид

$$dS \geq 0.$$

Этот результат является математической записью второго закона термодинамики, который тем самым состоит в утверждении, что энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать.

Все реальные процессы необратимы, поэтому в действительности энтропия изолированной системы может только возрастать, достигая максимума в состоянии термодинамического равновесия системы. Истолкование этого закона связано с физическим смыслом энтропии, который выясняется в статистической физике.

3°. Если система совершает круговой процесс, то изменение ее энтропии равно нулю, и алгебраическая сумма приведенных количеств теплоты, сообщенных при этом системе, равна нулю в обратимом процессе:

$$\oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

и меньше нуля в необратимом процессе:

$$\oint_{\text{необр}} \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

Последнее соотношение называют *неравенством Клаузиуса*; оно является математической записью второго закона термодинамики для необратимых процессов в неизолированной системе.

4°. *Основное соотношение термодинамики*, объединяющее в себе первый и второй законы термодинамики, получается из выражения (4.1) путем замены δQ его значением в соответствии с первым законом термодинамики:

$$T dS \geq dU + \delta A.$$

Для обратимых процессов это соотношение переходит в *термодинамическое тождество*:

$$T dS = dU + \delta A.$$

6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

1°. *Характеристической функцией* называют функцию состояния системы, посредством которой, а также ее производных, могут быть явно выражены тер-

модинамические свойства системы. В зависимости от выбора независимых переменных вид характеристической функции изменяется. Например, при независимых переменных H (энтальпия) и p (давление) или U (внутренняя энергия) и V (объем) характеристической функцией является энтропия S , а при независимых переменных S и V — внутренняя энергия U .

2°. Термодинамическим потенциалом называют характеристическую функцию, убыль которой в равновесном (обратимом) процессе, протекающем при неизменных значениях определенной пары термодинамических параметров (T и V , T и p , S и p , S и V и т. д.), равна A^* — полной работе, произведенной системой, за вычетом работы против внешнего давления.

3°. Существование термодинамических потенциалов вытекает из термодинамического тождества, согласно которому элементарная работа $\delta A^* = \delta A - p dV$ может быть определена с помощью следующих формул:

$$\delta A^* = T dS - dU - p dV, \quad (4.2)$$

$$\delta A^* = T dS - dH + V dp, \quad (4.3)$$

$$\delta A^* = -d(U - TS) - S dT - p dV, \quad (4.4)$$

$$\delta A^* = -d(H - TS) - S dT + V dp. \quad (4.5)$$

а) Независимые переменные S и V . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является внутренняя энергия U (изохорно-изоэнтропийный потенциал).

б) Независимые переменные S и p . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является энтальпия H (изобарно-изоэнтропийный потенциал).

в) Независимые переменные T и V . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является функция состояния системы $F = U - TS$, называемая энергией Гельмгольца (изохорно-изотермическим потенциалом, свободной энергией).

г) Независимые переменные T и p . Характеристической функцией и термодинамическим потенциалом является функция состояния системы

$$\Phi = H - TS = U + pV - TS,$$

называемая энергией Гиббса (изобарно-изотермическим потенциалом).

4°. Изохорно-изотермический и изобарно-изотермический потенциалы идеального газа:

$$F = -\nu [RT \ln V_\mu + \phi(T)] = -\nu \left[RT \ln \frac{V}{\nu} + \phi(T) \right],$$

$$\Phi = \nu [RT \ln p + f(T)],$$

где $\nu = m/\mu$ — число молей газа, V_μ — объем одного моля,

$$\phi(T) = -U_\mu + T \left(a_1 + \int C_{V\mu} \frac{dT}{T} \right)$$

и

$$f(T) = H_\mu - T \left(a_2 + \int C_{p\mu} \frac{dT}{T} \right)$$

— функции температуры, U_μ и H_μ — внутренняя энергия и энтальпия одного моля газа, $C_{V\mu}$ и $C_{p\mu}$ — молярные теплоемкости, a_1 и a_2 — постоянные интегрирования в выражении для энтропии.

5°. Для смеси идеальных газов изохорно-изотермический потенциал равен сумме изохорно-изотермических потенциалов всех N компонентов смеси, взятых при объеме V и температуре T смеси:

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = - \sum_{i=1}^N \nu_i \left[RT \ln \frac{V}{\nu_i} + \phi_i(T) \right].$$

Изобарно-изотермический потенциал смеси равен сумме изобарно-изотермических потенциалов всех N компонентов смеси, взятых при температуре смеси и их парциальных давлениях:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N \nu_i [RT \ln p_i + f_i(T)],$$

или

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \nu_i [RT \ln p + RT \ln x_i + f_i(T)],$$

где $x_i = \nu_i \left(\sum_{i=1}^N \nu_i \right)^{-1}$ — молярная концентрация i -го компонента, p_i — его парциальное давление.

6°. Элементарная работа

$$\delta A^* = \sum_i F_i da_i,$$

где a_i — все внешние параметры системы, кроме ее объема V , а F_i — соответствующие обобщенные силы. Поэтому уравнения (4.2)—(4.5) можно записать в виде

$$dU = T dS - p dV - \sum_i F_i da_i,$$

$$dH = T dS + V dp - \sum_i F_i da_i,$$

$$dF = -S dT - p dV - \sum_i F_i da_i,$$

$$d\Phi = -S dT + V dp - \sum_i F_i da_i.$$

Так как dU , dH , dF и $d\Phi$ — полные дифференциалы функций соответственно от независимых переменных $S, V, a_1, a_2, \dots$; $S, p, a_1, a_2, \dots$; $T, V, a_1, a_2, \dots$ и $T, p, a_1, a_2, \dots$, то

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, a_1, a_2, \dots} = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p, a_1, a_2, \dots},$$

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, a_1, a_2, \dots} = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, a_1, a_2, \dots},$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_{S, a_1, a_2, \dots} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{T, a_1, a_2, \dots},$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, a_1, a_2, \dots} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{p, a_1, a_2, \dots}.$$

Кроме того, из первого закона термодинамики и написанных выше выражений для dU и dH следует:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, a_1, a_2, \dots} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V, a_1, a_2, \dots},$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p, a_1, a_2, \dots} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p, a_1, a_2, \dots}.$$

7°. Связь между термодинамическими потенциалами и их производными:

$$U = H - pV = H + V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_s,$$

$$H = U + pV = U + p \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_s,$$

$$F = U - TS = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_v.$$

$$\Phi = H - TS = H + T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p.$$

Последние два уравнения называют *уравнениями Гиббса—Гельмгольца*. Эти уравнения могут быть представлены также в следующем виде:

а) при изохорно-изотермическом процессе

$$A^* = E_v + T \left(\frac{\partial A^*}{\partial T} \right)_v,$$

где A^* — работа, совершаемая системой в рассматриваемом процессе, E_v — тепловой эффект при изохорном процессе;

б) при изобарно-изотермическом процессе

$$A^* = E_p + T \left(\frac{\partial A^*}{\partial T} \right)_p,$$

где A^* — разность между полной работой, совершаемой системой в рассматриваемом процессе, и работой расширения системы, E_p — тепловой эффект в изобарном процессе.

Пример. Связь между электродвижущей силой обратимого гальванического элемента и тепловым эффектом протекающей в нем химической реакции.

Работа A^* затрачивается на перенос электрических зарядов: $A^* = q\mathcal{E}$, где q — перенесенный заряд, $\mathcal{E}$ — ЭДС элемента. Из уравнения Гиббса—Гельмгольца для изобарно-изотермического процесса следует

уравнение Гельмгольца для гальванического элемента:

$$\mathcal{E} = e_p + T \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p = \frac{e_{pm}}{zF} + T \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p,$$

где $e_p = \frac{E_p}{q}$ — тепловой эффект, отнесенный к единичному заряду, e_{pm} — тепловой эффект, отнесенный к одному молю прореагировавшего вещества, F — постоянная Фарадея, z — валентность иона, переносящего заряд.

Количество теплоты Q , сообщаемое извне элементу при перенесении заряда q , равно

$$Q = -E_p + q\mathcal{E} = qT \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p.$$

Теплоизолированный элемент в процессе работы охлаждается, если $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p > 0$, и нагревается, если

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_p < 0.$$

7. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. Рассматривается однофазная однокомпонентная равновесная система, на которую не действуют иные силы, кроме равномерно распределенного внешнего давления. Состояние этой системы полностью определяется заданием двух независимых параметров состояния (масса системы предполагается фиксированной).

Если элементарная работа $\delta A^* = 0$, то из уравнений (4.2)—(4.5) получим:

$$\begin{aligned} dU &= T dS - p dV, \\ dH &= T dS + V dp, \\ dF &= -S dT - p dV, \\ d\Phi &= -S dT + V dp. \end{aligned}$$

2°. Некоторые соотношения между производными термодинамических величин.

а) Независимые переменные V и T . Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p, & \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V &= C_V, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T, & \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_V &= C_V + V \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right], & \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V &= \frac{C_V}{T}, \\ \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_S &= T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V, & C_p - C_V &= -T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S &= -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \end{aligned}$$

— дифференциальное уравнение адиабаты,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = \frac{p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}{C_V}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_H = -\frac{T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}{C_V + V \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V}.$$

Примеры.

1. Идеальный газ. Уравнение состояния: $pV = \nu RT$.

Получаем следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \nu \frac{R}{V}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_V = 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\nu \frac{RT}{V^2}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = 0 \text{ и } C_p - C_V = \nu R,$$

т. е. внутренняя энергия, энтальпия и теплоемкости C_V и C_p любого идеального газа, масса которого постоянна, зависят только от температуры.

2. Газ Ван-дер-Ваальса. Уравнение состояния:

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT.$$

Получаем следующие соотношения:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_V = \frac{vR}{V-vb} \cdot \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{vRT}{(V-vb)^2} + 2v^2 \frac{a}{V^3}.$$

Поэтому $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0$, т. е. теплоемкость C_V любого газа Ван-дер-Ваальса, масса которого постоянна, зависит только от температуры;

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = v^2 \frac{a}{V^2} \quad \text{и} \quad C_p - C_V = \frac{vR}{1 + v \frac{2a(V-vb)^2}{RTV^3}}.$$

б) Независимые переменные p и T . Тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = C_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_p = C_p,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T},$$

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p, \quad C_p - C_V = -T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

— дифференциальное уравнение адиабаты,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_U = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{C_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p} \quad \text{— коэффициент Джоуля—Томсона.}$$

Пример. Идеальный газ. Уравнение состояния: $pV = \nu RT$. Так как $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \nu \frac{R}{p}$, то $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = 0$.

в) Независимые переменные p и V . Тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = \frac{C_V}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p,$$

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = - \frac{C_p}{C_V} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}$$

— дифференциальное уравнение адиабаты,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_U = \frac{p - C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H = - \frac{C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V}.$$

3°. Изобарным коэффициентом расширения называют величину α , характеризующую относительное изменение объема системы при изобарном увеличении ее температуры на единицу:

$$\alpha_t = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

где V — объем системы, T — ее температура.

Термодинамическим коэффициентом сжимаемости (изотермической сжимаемостью) называют величину β , характеризующую относительное изменение объема системы при изотермическом уменьшении ее давления на единицу:

$$\beta = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Адиабатической сжимаемостью называют величину β_s , характеризующую относительное изменение объема системы при адиабатическом уменьшении ее давления на единицу:

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s, \quad \beta_s = \frac{C_V}{C_p} \beta,$$

где C_V и C_p — теплоемкости системы в изохорном и изобарном процессах.

Термодинамическим коэффициентом давления называют величину γ_p , характеризующую относительное изменение давления системы при изохорном увеличении ее температуры на единицу:

$$\gamma_t = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \quad \text{или} \quad \gamma_t = \frac{1}{p} \frac{\alpha_t}{\beta}.$$

Термическим коэффициентом давления называют величину

$$\gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

где p_0 — давление при 0°C .

8. ДИАГРАММА $s-T$

1°. Диаграммой $s-T$ называют графическое изображение равновесных термодинамических состояний системы в прямоугольной системе координат, по оси абсцисс которой отложена *удельная энтропия* s (энтропия единицы массы системы), а по оси ординат — термодинамическая температура T . Величину s отсчитывают от ее значения в каком-либо определенном состоянии.

2°. Для однородной системы изобары и изохоры на диаграмме $s-T$ имеют вид восходящих кривых, так как

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_V = \frac{T}{c_V} > 0,$$

где c_p и c_V — удельные теплоемкости. Чем больше давление p , тем выше на диаграмме $s-T$ располагается соответствующая изобара. Чем больше удельный объем v , тем ниже на этой диаграмме располагается соответствующая изохора.

3°. Диаграмму $s-T$ широко используют для термодинамического анализа обратимых круговых процессов.

В обратимом процессе $\delta Q = T ds = mT ds$, где m — масса системы. Поэтому площадь в диаграмме $s-T$, ограниченная кривой процесса 1—2 (рис. II.4.7), осью абсцисс и ординатами $s = s_1$, $s = s_2$, пропорциональна количеству теплоты Q , которое было сообщено системе в этом процессе:

$$Q = m \int_1^2 T ds.$$

Обратимый круговой процесс изображают в диаграмме $s-T$ в виде замкнутой кривой. В прямом круговом процессе 1а2b1 (рис. II.4.8) на участке 1а2 системе сообщают количество теплоты Q_1 , а на участке 2b1 от нее отводят количество теплоты Q_2 . Величины Q_1 и Q_2 пропорциональны площадям криволинейных трапеций $s_1 1a2s_2$ и $s_1 1b2s_2$, заштрихованным соответственно вертикально и горизонтально.

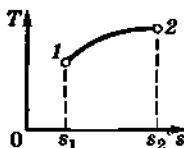


Рис. II.4.7

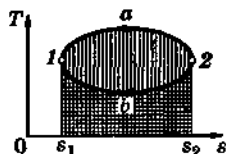


Рис. II.4.8

Площадь цикла 1а2b1 пропорциональна $Q_1 - Q_2$, т. е. работе A , совершенной системой в круговом процессе. Термический КПД η кругового процесса равен отношению площади цикла к площади криволинейной трапеции $s_1 1a2s_2$.

Обратимый цикл Карно, состоящий из двух изотермических и двух изоэнтропийных процессов, изображается в диаграмме $s-T$ в виде прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат (рис. II.4.9).

Обобщенным циклом Карно называют обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотермических

процессов и двух замыкающих цикл процессов, которые в диаграмме s — T изображают кривыми, совмещающимися друг с другом при параллельном переносе вдоль оси абсцисс (рис. II.4.10). Термический КПД

обобщенного цикла Карно равен $\eta_k = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

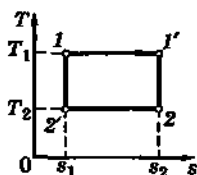


Рис. II.4.9

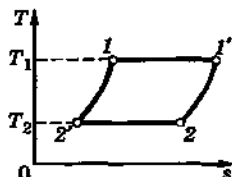


Рис. II.4.10

4°. Диаграмму s — T применяют также для анализа некоторых необратимых процессов, в частности процессов, необратимость которых вызвана необратимостью адиабатного сжатия и расширения рабочего тела.

Примеры.

1. Крутовой процесс $1-2-3-4$ (рис. II.4.11), состоящий из обратимых процессов изотермического расширения ($1-2$) и сжатия ($3-4$), обратимого адиабатного сжатия ($4-1$) и необратимого адиабатного расширения, условно изображенного пунктирной линией ($2-3$).

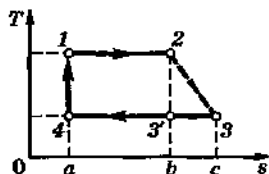


Рис. II.4.11

Количество теплоты Q_1 , сообщаемое рабочему телу нагревателем в процессе $1-2$, пропорционально площади прямоугольника $a12b$, а абсолютная величина количества теплоты Q_2 , отдаваемого рабочим телом холодильнику в процессе $3-4$, пропорциональна

площади прямоугольника $a43c$. Поэтому работа $A_{\text{необр}} = Q_1 - Q_2$, совершаемая в необратимом цикле $1-2-3-4-1$, меньше работы $A_{\text{обр}}$ в соответствующем ему обратимом цикле Карно $1-2-3'-4-1$, пропорциональной площади последнего. Разность $A_{\text{обр}} - A_{\text{необр}}$ пропорциональна площади прямоугольника $b3'3c$.

2. Процесс адиабатного сжатия идеального газа, необратимость которого обусловлена внутренним трением.

Процесс обратимого адиабатного сжатия газа от удельного объема v_1 до v_2 изображается в диаграмме $s-T$ (рис. П.4.12) изоэнтропией $1-2'$. Работа $A'_{обр}$, совершенная внешними силами в этом процессе, по первому

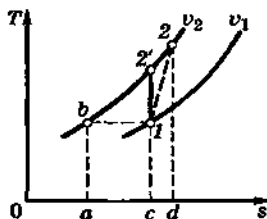


Рис. П.4.12

закону термодинамики равна приращению внутренней энергии газа:

$$A'_{обр} = m \int_{T_1}^{T_2} c_V dT = m \int_b^{2'} T ds,$$

где m — масса газа, c_V — его удельная теплоемкость в изохорном процессе. Работа $A'_{обр}$ пропорциональна площади криволинейной трапеции $ab2's$.

Вследствие трения состояние газа в конце необратимого адиабатного сжатия соответствует точке 2, а сам процесс сжатия условно изображается пунктирной линией $1-2$, проведенной так, чтобы площадь криволинейной трапеции $c12d$ была пропорциональна работе сил трения $A'_{тр}$.

Работа внешних сил в процессе $1-2$ равна

$$A'_{необр} = m \int_{T_1}^{T_2} c_V dT = m \int_b^2 T ds,$$

т. е. пропорциональна площади криволинейной трапеции $ab2d$. Работа $A'_{необр}$ больше суммы $A'_{обр} + A'_{тр}$ на величину работы, измеряемой площадью криволинейного треугольника $12'2$ и обусловленной дополнительным подогревом газа вследствие трения.

3. Процесс адиабатного расширения идеального газа, необратимость которого обусловлена внутренним трением.

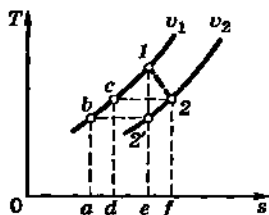


Рис. II.4.13

Работа $A_{\text{обр}}$, совершаемая газом в процессе обратимого адиабатного расширения $1-2'$ (рис. II.4.13), равна убыли внутренней энергии газа:

$$A_{\text{обр}} = m \int_b^1 T ds, \text{ т. е. пропор-}$$

циональна площади криволинейной трапеции $able$. Работа

трения $A_{\text{тр}}$ пропорциональна площади криволинейной трапеции $e12f$. Работа, совершаемая газом в необрати-

мом процессе $1-2$, равна $A_{\text{необр}} = m \int_c^1 T ds$, т. е. пропор-

циональна площади криволинейной трапеции $dc1e$. Разность $A_{\text{обр}} - A_{\text{необр}}$ меньше $A_{\text{тр}}$ на величину работы, измеряемой площадью криволинейного треугольника $122'$ (площади криволинейных трапеций $abcd$ и $e2'2f$ одинаковы, так как для идеального газа c_p не зависит от v) и соответствующей преобразованию части теплоты трения в полезную работу.

9. МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ И МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ. УСЛОВИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

1°. Всякая экстенсивная величина для гомогенной системы, состоящей из нескольких компонентов, существенным образом зависит от состава этой системы. Например, термодинамические потенциалы зависят от числа молей каждого компонента в системе:

$$U = U(S, V, v_1, v_2, \dots, v_N),$$

$$H = H(S, p, v_1, v_2, \dots, v_N),$$

$$F = F(T, V, v_1, v_2, \dots, v_N),$$

$$\Phi = \Phi(T, p, v_1, v_2, \dots, v_N),$$

где v_i — число молей i -го компонента, N — общее число компонентов.

2°. Парциальной мольной величиной $\bar{G}_i$ называют частную производную от экстенсивной величины $G(p, T, v_1, v_2, \dots, v_N)$ для гомогенной системы, состоящей из N компонентов, по числу v_i молей i -го компонента при постоянных значениях давления, температуры и числа молей всех остальных компонентов:

$$\bar{G}_i = \left(\frac{\partial G}{\partial v_i} \right)_{p, T, v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_{i+1}, \dots, v_N}.$$

Уравнения Гиббса—Дюгема:

$$G = \sum_{i=1}^N v_i \bar{G}_i \text{ и } \sum_{i=1}^N v_i d\bar{G}_i = 0 \\ (\text{при } p = \text{const и } T = \text{const})$$

или для одного моля системы

$$G_\mu = \sum_{i=1}^N x_i \bar{G}_i \text{ и } \sum_{i=1}^N x_i d\bar{G}_i = 0 \\ (\text{при } p = \text{const и } T = \text{const}),$$

где $x_i = v_i \left(\sum_{i=1}^N v_i \right)^{-1}$ — молярная концентрация i -го

компонента и $G_\mu = G \left(\sum_{i=1}^N v_i \right)^{-1}$.

Для парциальных мольных величин справедливы следующие соотношения:

$$\bar{G}_i = G_\mu + \frac{\partial G_\mu}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$\bar{G}_N = G_\mu - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k}.$$

3°. Химическим потенциалом μ_i i -го компонента гомогенной системы (или фазы гетерогенной системы) называется частная производная от любого из термодинамических потенциалов системы (фазы) по числу мо-

лей v_i этого компонента при постоянных значениях числа молей всех остальных компонентов системы (фазы) и параметров состояния, соответствующих данному термодинамическому потенциалу:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \right)_{p, T, v_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} \right)_{v, T, v_k} = \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \right)_{S, p, v_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial v_i} \right)_{S, v, v_k},\end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$.

Примечание 1. В статистической физике количество i -го компонента системы характеризуют не числом молей v_i , а числом частиц $N_i = v_i N_A$, где N_A — постоянная Авогадро. Соответственно *химическим потенциалом* i -го компонента системы называют величину μ_i , в N_A раз меньшую введенной выше:

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \right)_{p, T, N_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} \right)_{v, T, N_k} = \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \right)_{S, p, N_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial v_i} \right)_{S, v, N_k},\end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$. Иногда эту величину называют *химическим потенциалом, отнесенным к одной частице*.

На практике в качестве независимых параметров чаще всего используют давление и температуру, поэтому наиболее употребительным является первое выражение для μ_i , из которого следует, что химический потенциал представляет собой парциальное молярное значение изобарно-изотермического потенциала. В соответствии с

первым уравнением Гиббса—Дюгема $\Phi = \sum_{i=1}^N v_i \mu_i$.

Примечание 2. В статистической физике изобарно-изотермический потенциал $\Phi = \sum_{i=1}^N N_i \mu_i$, так что

для системы, состоящей из одинаковых частиц, химический потенциал равен отношению изобарно-изотермического потенциала системы к числу содержащихся в ней частиц.

Химический потенциал является интенсивной величиной, т. е. зависит от параметров состояния и состава гомогенной системы, но не зависит от ее массы.

Пример. Химический потенциал компонента смеси идеальных газов

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial F}{\partial v_i} \right)_{V, T, v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_{i+1}, \dots, v_N} = \\ &= RT \ln \frac{v_i}{V} + RT - \phi_i(T),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \right)_{p, T, v_1, \dots, v_{i-1}, \dots, v_{i+1}, \dots, v_N} = \\ &= RT \ln x_i + RT \ln p + f_i(T),\end{aligned}$$

где $\frac{v_i}{V}$ и x_i — мольно-объемная и молярная концентрации i -го компонента смеси,

$$\phi_i(T) = -U_{\mu_i} + T \left(a_{1i} + \int C_{V\mu_i} \frac{dT}{T} \right),$$

$$f_i(T) = H_{\mu_i} - T \left(a_{2i} + \int C_{p\mu_i} \frac{dT}{T} \right).$$

4°. Для обратимых процессов, совершаемых гомогенной N -компонентной системой, состав и масса которой могут изменяться и на которую не действуют иные силы, кроме равномерно распределенного внешнего давления, справедливы следующие соотношения:

$$dU = T dS - p dV + \sum_{i=1}^N \mu_i dv_i,$$

$$dH = T dS + V dp + \sum_{i=1}^N \mu_i dv_i,$$

$$dF = -S dT - p dV + \sum_{i=1}^N \mu_i dv_i,$$

$$d\Phi = -S dT + V dp + \sum_{i=1}^N \mu_i dv_i.$$

Примечание. В общем случае к правым частям этих уравнений нужно еще прибавить элементарную работу δA^* .

5°. *Изобарно-изотермический потенциал* *гомогенной системы* равен

$$\Phi = \int_{p^0}^p V dp + \Phi^0,$$

где интегрирование производится при постоянных значениях температуры и числа молей всех компонентов системы от малого давления p^0 , при котором система представляет собой смесь идеальных газов, до давления p в рассматриваемом состоянии, Φ^0 — изобарно-изотермический потенциал этой смеси идеальных газов при $p = p^0$ и температуре T системы:

$$\Phi^0 = \sum_{i=1}^N \Phi_i^0 + RT \sum_{i=1}^N v_i \ln x_i,$$

где $\Phi_i^0 = \Phi_i(p^0, T, v_i)$ — изобарно-изотермический потенциал i -го компонента, а x_i — молярная концентрация последнего.

Вычисление определенного интеграла $\int_{p^0}^p V dp$ можно

произвести алгебраически, если рассматриваемая система представляет собой смесь газов и если известно ее уравнение состояния. В общем случае этот интеграл определяется графически на основании экспериментально установленной зависимости $V = V(p)$ в изотермическом процессе. Если система находится в твердом или жидком состоянии, то зависимость $V = V(p)$ претерпевает разрывы непрерывности, обусловленные фазовыми

переходами. Однако и в этом случае $\int_{p^0}^p V dp$ может быть определен графически.

6°. Приведем выражения энтропии, энтальпии и внутренней энергии газовой смеси.

а) Энтропия:

$$S = \int_{p^0}^p \left[\frac{vR}{p} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dp + S^0,$$

$$S^0 = \sum_{i=1}^N S_i^0 - R \sum_{i=1}^N v_i \ln x_i - vR \ln \frac{p}{p^0},$$

где $v = \sum_{i=1}^N v_i$ — число молей всех газов в смеси, $x_i = \frac{v_i}{v}$ —

молярная концентрация i -го газа в смеси; интегрирование производится при постоянных значениях v_i и температуры, равной температуре T смеси в рассматриваемом состоянии (p, T) , p^0 — малое давление, при котором система является смесью идеальных газов, S_i^0 — энтропия i -го газа при давлении p^0 и температуре T :

$$S_i^0 = \int_{T_0}^T C_{pi}^0 d \ln T + S_{0i}^0,$$

где C_{pi}^0 — теплоемкость i -го компонента идеального газа в изобарном процессе, а S_{0i}^0 — энтропия этого газа в состоянии (p^0, T_0) , T_0 — произвольная стандартная температура.

б) Энтальпия:

$$H = \int_{p^0}^p \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dp + H^0,$$

$$H^0 = \sum_{i=1}^N v_i H_i^0, \quad H_i^0 = \int_{T_0}^T C_{pi}^0 dT + H_{0i}^0.$$

в) Внутренняя энергия

$$U = \int_{V_{\infty}}^V \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right] dV + U^0,$$

где интегрирование производится при постоянных значениях v_i и температуры, равной температуре T смеси, от очень большого объема системы V_{∞} , при котором она является смесью идеальных газов, до ее объема V в рассматриваемом состоянии; U^0 — внутренняя энергия системы в состоянии (V_{∞}, T) :

$$U^0 = \sum_{i=1}^N v_i U_i^0, \quad U_i^0 = \int_{T_0}^T C_{v_i}^0 dT + U_{0i}^0.$$

7°. Термодинамические потенциалы и энтропия гетерогенной системы равны суммам соответствующих функций для всех ее гомогенных частей (фаз):

$$U = \sum_{j=1}^{\Phi} U_j, \quad H = \sum_{j=1}^{\Phi} H_j, \quad F = \sum_{j=1}^{\Phi} F_j,$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\Phi} \Phi_j, \quad S = \sum_{j=1}^{\Phi} S_j,$$

где Φ — число фаз системы.

8°. Общие условия термодинамического равновесия системы.

В зависимости от характера изоляции системы условия ее термодинамического равновесия выражаются следующими способами:

а) если $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$, то
 $dS = 0$ и $S = S_{\text{макс}};$

б) если $S = \text{const}$ и $V = \text{const}$, то
 $dU = 0$ и $U = U_{\text{мин}};$

в) если $S = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то
 $dH = 0$ и $H = H_{\text{мин}};$

г) если $T = \text{const}$ и $V = \text{const}$, то
 $dF = 0$ и $F = F_{\text{мин}};$

д) если $T = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то
 $d\Phi = 0$ и $\Phi = \Phi_{\text{мин}}.$

Отсюда, в частности, следуют условия:

условие химического равновесия: в равновесной гетерогенной системе химические потенциалы любого компонента должны быть одинаковыми для всех фаз, в которых этот компонент содержится;

условие теплового равновесия: температура во всех частях равновесной системы должна быть одинаковой;

условие механического равновесия: давление во всех частях равновесной системы, на которую не действуют иные силы, кроме равномерного внешнего давления, должно быть одинаковым.

9°. Функции U , H , F и Φ для системы могут иметь несколько минимумов (при заданных значениях соответствующих им двух параметров состояния, например p и T для Φ ; V и T для F и т. д.), а энтропия S — несколько максимумов (при U , $V = \text{const}$). (Заметим, что число параметров состояния для неравновесных состояний системы больше, чем для равновесных.)

Состояние равновесия, соответствующее абсолютному максимуму S при заданных значениях U и V , абсолютным минимумам Φ (при заданных p и T) и F (при заданных V и T) и т. д., является *устойчивым*, или *истинным равновесием*. Состояния равновесия, соответствующие относительным максимумам S (относительным минимумам Φ , F , H и U), являются *неустойчивыми*, или *метастабильными*. Примерами метастабильных состояний равновесия могут служить *перегретая жидкость и пересыщенный пар*.

10°. *Принцип Ле-Шателье* (принцип смещения равновесия): если на систему, находящуюся в состоянии устойчивого равновесия, производится внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия, то равновесие смещается в том направлении, при котором эффект внешнего воздействия ослабляется.

Например, при уменьшении объема равновесной однокомпонентной системы жидкость—пар происходит конденсация части пара, в результате чего температура системы и давление повышаются.

11°. *Фазовым переходом (фазовым превращением)* называют переход вещества из одной фазы в другую. Различают два типа фазовых переходов — фазовые переходы первого и второго рода.

Фазовым переходом первого рода называют фазовый переход, сопровождающийся скачкообразным изменением внутренней энергии и плотности. Фазовые переходы первого рода всегда связаны с выделением или поглощением теплоты, называемой *теплотой (скрытой теплотой) фазового перехода*. Термодинамический потенциал Φ системы при фазовом переходе первого рода не изменяется. Примерами таких фазовых переходов служат *испарение, плавление, сублимация*, многие переходы твердого тела из одной кристаллической модификации в другую.

Фазовым переходом второго рода называют фазовый переход, при котором отсутствует скачкообразное изменение внутренней энергии и плотности. Теплота фазового перехода второго рода равна нулю. Фазовый переход второго рода сопровождается скачкообразным изменением теплоемкости и *термодинамических коэффициентов расширения и сжимаемости*. Примерами фазовых переходов второго рода являются переход жидкого гелия в *сверхтекучее состояние*, переход в *точке Кюри ферромагнитного вещества* в парамагнитное и т. д.

12°. Термодинамическими степенями свободы системы называют параметры фаз системы, находящейся в равновесии, которым можно придавать произвольные значения в том интервале, при котором число фаз не изменяется.

Правило фаз Гиббса: число термодинамических степеней свободы системы, состоящей из φ фаз и N компонентов, равно

$$f = N - \varphi + 2.$$

Так как $f \geq 0$, то число сосуществующих фаз системы удовлетворяет следующему неравенству: $\varphi \leq N + 2$.

В зависимости от числа термодинамических степеней свободы различают *безвариантные системы* ($f = 0$), *одновариантные системы* ($f = 1$), *двухвариантные системы* ($f = 2$) и т. д.

13°. Однокомпонентная система ($1 \leq \varphi \leq 3$).

При $\varphi = 3$ $f = 0$, т. е. равновесное сосуществование данных трех фаз (например, твердой, жидкой и газообразной) возможно только в одном определенном состоянии, называемом *тройной точкой*.

Для двухфазной равновесной однокомпонентной системы давление является функцией температуры. Эта зависимость выражается *уравнением Клапейрона—Клаузиуса*:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T\Delta v},$$

где r — *удельная теплота фазового перехода* из первой фазы во вторую, $\Delta v = v_2 - v_1$ — разность удельных объемов фаз.

Если вторая фаза является идеальным газом, то уравнение Клапейрона—Клаузиуса имеет вид

$$d(\ln p) = \frac{r_p}{R} d\left(\frac{1}{T}\right),$$

где $r_p = r\mu$ — *теплота испарения* для одного моля вещества, молярная масса которого равна μ .

10. ХИМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

1°. *Летучестью (активным давлением) f_i i -го компонента* гомогенной системы называют функцию давления, температуры и концентраций, связанную с химическим потенциалом μ_i этого компонента в изотермическом процессе следующим уравнением:

$$(d\mu_i)_T = RT d(\ln f_i)$$

или

$$RT \ln \frac{f_i}{f_i^0} = \mu_i - \mu_i^0,$$

где μ_i^0 и f_i^0 — соответственно химический потенциал и летучесть i -го компонента в некотором произвольно выбранном (в отношении давления и концентрации) начальном состоянии, соответствующем той же температуре, что и в рассматриваемом состоянии. Это начальное состояние называют *стандартным*.

2°. Активностью a_i i -го компонента гомогенной системы называют отношение его летучести f_i в данном состоянии к летучести f_i^0 в стандартном состоянии при той же температуре:

$$a_i = \frac{f_i}{f_i^0}, \text{ или } RT \ln a_i = \mu_i - \mu_i^0.$$

3°. Летучесть i -го компонента смеси идеальных газов равна парциальному давлению рассматриваемого газа в смеси: $f_i = p_i = x_i p$, где x_i — молярная концентрация, а p — давление смеси. Таким образом, летучесть имеет размерность давления.

Термодинамические уравнения, выведенные для изотермических процессов идеальных газов и их смесей, оказываются справедливыми для реальных газов и их смесей, если в этих уравнениях парциальные давления газов заменены их летучестями.

4°. Химическим равновесием называется равновесие системы, состоящей из химически реагирующих между собой компонентов. При химическом равновесии скорости прямой и обратной реакций одинаковы, так что состав системы не изменяется.

Способность компонентов системы вступать друг с другом в химическую реакцию называют их химическим сродством. Мерой химического сродства для реакции, протекающей в системе, температура и объем которой неизменны, является изменение ΔF изохорно-изотермического потенциала системы в процессе реакции: $\Delta F = F - F_{\text{исх}}$. Соответственно для реакции, протекающей при постоянной температуре и постоянном давлении, мерой химического сродства является изменение изобарно-изотермического потенциала: $\Delta \Phi = \Phi - \Phi_{\text{исх}}$. В состоянии химического равновесия потенциалы F (при $T, V = \text{const}$) и Φ (при $T, p = \text{const}$) должны иметь минимум. Поэтому самопроизвольная реакция в системе возможна только в тех случаях, когда $\Delta F < 0$ (при $T, V = \text{const}$) и $\Delta \Phi < 0$ (при $T, p = \text{const}$).

5°. Химическую реакцию символически записывают в виде *стехиометрической формулы*:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = 0,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_N$ — химические символы веществ, вступающих в реакцию и образующихся в результате ее, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — стехиометрические коэффициенты — положительные (для веществ, образующихся в результате реакции) и отрицательные (для веществ, вступающих в реакцию) целые числа, пропорциональные изменениям числа молей $v_1, v_2, \dots, v_N$ веществ $A_1, \dots, A_N$, т. е.

$$\frac{dv_1}{\alpha_1} = \frac{dv_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{dv_N}{\alpha_N}.$$

6°. *Закон действующих масс*: в состоянии химического равновесия системы соотношение между активностями ее компонентов, химическая реакция между которыми описывается стехиометрической формулой

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i = 0, \text{ имеет вид}$$

$$\prod_{i=1}^N a_i^{\alpha_i} = K_a,$$

где $K_a = \exp\left(-\frac{\Delta\mu_0}{RT}\right)$ — *термодинамическая констан-*

та равновесия, $\Delta\mu_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_i^0$ и μ_i^0 — химический по-

тенциал i -го компонента в стандартном состоянии. Если для каждого компонента стандартным является состояние чистого вещества, то $\mu_i^0 = \Phi_{\mu_i}^0$ — *изобарно-*

изотермический потенциал одного моля чистого вещества в стандартном состоянии. В этом случае $\Delta\mu_0 =$

$$= \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_{\mu_i}^0 = \Delta\Phi^0, \text{ и для константы равновесия спра-}$$

ведливо соотношение

$$RT \ln K_a = -\Delta\Phi^0.$$

Для чистого газа за стандартное состояние при каждой температуре принимают гипотетическое состояние, в котором при давлении $p^0 \approx 10^5$ Па летучесть $f^0 \approx 10^5$ Па. Поэтому для газов при любой температуре

$\alpha_i = \frac{f_i}{p^0}$ равна летучести f_i , выраженной в паскалях. За-

кон действующих масс для реакции в газообразной фазе имеет вид

$$\prod_{i=1}^N f_i^{\alpha_i} = K_f, \text{ где } K_f = K_a(p^0)^{\sum_{i=1}^N \alpha_i}.$$

Если газы считать идеальными, то $f_i = p_i = x_i p$ и закон действующих масс записывают в следующих формах:

$$\prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i} = K_p \text{ и } \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i} = K_x,$$

где p_i и x_i — парциальное давление и молярная кон-

центрация i -го компонента, $K_p = K_f$ и $K_x = p^{-\sum_{i=1}^N \alpha_i} K_p$.

7°. Константа равновесия K_a зависит только от температуры. Если для всех компонентов стандартным является состояние чистого вещества, то

$$\frac{d \ln K_a}{dT} = \frac{\Delta H^0}{RT^2},$$

где $\Delta H^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i H_i^0$, H_i^0 — энтальпия одного моля i -го компонента в стандартном состоянии.

Зависимость $\Delta\Phi^0$ от температуры имеет вид

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta\Phi^0}{RT} \right) = -\frac{\Delta H^0}{RT^2}.$$

8°. Если компоненты A_i рассматриваемой системы являются не простыми веществами, а химическими соединениями, то

$$\Delta\Phi^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\Delta\Phi^0)_i \text{ и } K_\theta = \prod_{i=1}^N (K_a)_i^{\alpha_i},$$

где $(\Delta\Phi^0)_i$ и $(K_a)_i$ соответствуют реакции образования одного моля i -го компонента из простых веществ. При этом необходимо, чтобы все промежуточные реакции синтеза приводили к образованию компонентов A_i именно в тех термодинамических состояниях, в каких они находятся в рассматриваемой системе.

Стандартным изобарно-изотермным потенциалом $\Delta\Phi_{298}^0$ какого-либо химического соединения называют изменение изобарно-изотермного потенциала в процессе образования одного моля этого соединения из простых веществ при условии, что процесс является изотермическим ($T = 298 \text{ K}$), а исходные простые вещества и образующееся соединение находятся при давлении в 10^5 Па (точнее, при активностях, равных единице).

Тепловой эффект ΔH_{298}^0 указанного процесса называют *стандартным тепловым эффектом*.

11. ТРЕТИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. Первый и второй законы термодинамики не позволяют определить значение S_0 энтропии системы при абсолютном нуле температуры ($T = 0 \text{ K}$). В связи с этим оказывается невозможным теоретический расчет абсолютных значений энтропии, изохорно-изотермического и изобарно-изотермического потенциалов системы, а также константы равновесия.

2°. На основании обобщения экспериментальных исследований свойств различных веществ при сверхнизких температурах был установлен закон, устранив-

ший указанную трудность и получивший название принципа Нернста или *третьего закона термодинамики*. В формулировке Нернста он гласит: в любом изотермическом процессе, проведенном при абсолютном нуле температуры, изменение энтропии системы равно нулю, т. е.

$$\Delta S_{T=0} = 0, \quad S = S_0 = \text{const},$$

независимо от изменения любых других параметров состояния (например, объема, давления, напряженности внешнего силового поля и т. д.). Иными словами, при абсолютном нуле температуры изотермический процесс является также и изоэнтропийным.

3°. Из третьего закона термодинамики следует, что для всех тел при $T = 0$ К обращаются в нуль теплоемкость C_V и термодинамический коэффициент расширяемости α_p . Из него также вытекает вывод о невозможности осуществления такого процесса, в результате которого тело охладилось бы до температуры $T = 0$ К (*принцип недостижимости абсолютного нуля температуры*).

4°. Принцип Нернста был развит Планком, предположившим, что $S_0 = 0$: при абсолютном нуле температуры энтропия системы равна нулю. Физическое истолкование принципа Нернста в формулировке Планка дается в статистической физике. Условие $S_0 = 0$ при $T = 0$ К является следствием квантового характера процессов, происходящих в любой системе при низких температурах, и выполняется только для систем, находящихся при $T = 0$ К в состоянии устойчивого, а не метастабильного равновесия. На основании гипотезы Планка можно определить абсолютные значения энтропий системы в произвольном равновесном состоянии. Например, для гомогенной системы постоянного состава

$$S(p, T) = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT,$$

где интегрирование производится в предположении, что $p = \text{const}$.

Из условия $S_0 = 0$ следует, что

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = 0.$$

Глава 5

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

1°. *Кинетическая теория газов основана на статистических методах исследования.*

Основное уравнение кинетической теории газов:

$$pV = \frac{2}{3} W_{\kappa},$$

где p — давление газа, V — его объем, $W_{\kappa} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2}$ —

суммарная кинетическая энергия поступательного движения n молекул газа, находящихся в объеме V , m_i — масса i -й молекулы, u_i — ее скорость.

2°. Если ввести *среднюю квадратичную скорость* поступательного движения молекул газа:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2},$$

то для односортового газа ($m_i = m_0$)

$$W_{\kappa} = \frac{1}{2} N m_0 v_{\text{кв}}^2$$

и

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 v_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{3} m v_{\text{кв}}^2,$$

где $m = N m_0$ — масса газа.

Другой вид основного уравнения:

$$p = \frac{2}{3} W_{\kappa 0} = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{3} \rho v_{\text{кв}}^2,$$

где $n = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул газа, $W_{\kappa 0} = \frac{W_{\kappa}}{V}$ и

$\rho = n m_0$ — плотность газа.

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ

1°. Закон распределения молекул по скоростям Максвелла (распределение Максвелла) описывает стационарное распределение частиц (молекул) макроскопической системы, находящейся в термодинамическом равновесии, в отсутствии внешних полей при условии, что движение частиц подчиняется законам классической механики. Максвеловское распределение не зависит от взаимодействия между частицами и справедливо не только для газов, но и для жидкостей, если для них возможно классическое описание.

2°. Употребляются следующие формы закона распределения Максвелла. Распределение молекул по модулям скоростей:

$$dn_u = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_0 u^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi u^2 du.$$

Здесь u — модуль скорости молекулы, $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, m_0 — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура, dn_u — концентрация молекул (из общей концентрации n), скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$.

Распределение Максвелла по проекциям скоростей:

$$dn = n \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_0 u^2}{2kT} \right) du_x du_y du_z,$$

где u_x, u_y, u_z — проекции скорости молекулы на оси координат, может быть представлено в виде

$$dn = n f(u_x) f(u_y) f(u_z) du_x du_y du_z.$$

Здесь

$$f(u_i) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_0 u_i^2}{2kT} \right) \quad (i = x, y, z)$$

— функция распределения по проекциям скоростей.

Поскольку все направления движения молекул в пространстве равновероятны, распределение молекул по скоростям изотропно и $f(u_i)$ имеет одинаковый вид для $i = x, y, z$.

Другая форма закона распределения Максвелла по модулям скоростей:

$$dn = n \frac{4}{\sqrt{\pi} u_b^3} \exp\left[-\left(\frac{u}{u_b}\right)^2\right] u^2 du,$$

где u_b — наиболее вероятная скорость.

На рис. 11.5.1 изображена кривая закона распределения молекул по скоростям. Доля молекул газа dn со скоростями в интервале от u до $u + du$ пропорциональна площади dS заштрихованной криволинейной трапеции:

$$dS = \left(\frac{u_b}{n} \frac{dn}{du} \right) \frac{du}{u_b} = \frac{dn}{n},$$

$$\frac{dn}{n} = f(u) du,$$

где $f(u) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 u^2}{2kT}\right) u^2$ — функция распределения молекул по скоростям, указывающая долю молекул $\frac{dn}{n}$ со скоростями, лежащими в единичном интервале du около значения скорости u .

Условие нормировки функции распределения:

$$\int_0^{\infty} f(u) du = 1,$$

так как скорости всех молекул заключены в пределах от 0 до ∞ .

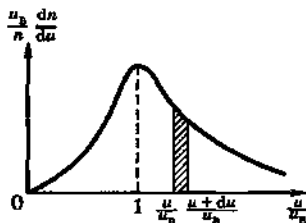


Рис. 11.5.1

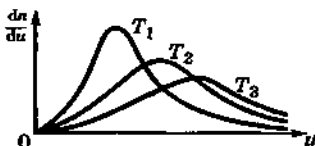


Рис. II.5.2

С увеличением температуры газа максимум кривой распределения смещается в сторону больших скоростей, а его модуль уменьшается. На рис. II.5.2 изображены кривые распределения молекул по скоростям при трех температурах $T_1 < T_2 < T_3$.

3°. Различают следующие скорости, характеризующие газ при данной температуре:

а) наиболее вероятная скорость u_v , которая соответствует максимуму функции $f(u)$:

$$u_v = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}};$$

б) средняя скорость $\langle u \rangle$ движения молекул

$$\langle u \rangle = \int_0^{\infty} u f(u) du = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}};$$

в) средняя квадратичная скорость $u_{\text{кв}}$ движения молекул

$$u_{\text{кв}}^2 = \int_0^{\infty} u^2 f(u) du,$$

$$u_{\text{кв}} = \sqrt{3BT} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где B — удельная газовая постоянная, T — термодинамическая температура, μ — молярная масса, R — молярная газовая постоянная, k — постоянная Больцмана, m_0 — масса молекулы газа.

4°. Распределение молекул по энергиям:

$$dn_W = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-W_K/(kT)} dW_K,$$

где $W_K = \frac{m_0 u^2}{2}$ — энергия поступательного движения

молекулы одноатомного газа. В этой формуле $\frac{dn_W}{n} = f(W_K) dW_K$; $f(W_K)$ — функция распределения молекул по энергиям.

П р и м е р ы.

1. Средняя кинетическая энергия молекул одноатомного идеального газа:

$$\begin{aligned} \langle W_K \rangle &= \int_0^{\infty} W_K f(W_K) dW_K = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} W_K e^{-W_K/(kT)} \sqrt{W_K} dW_K = \frac{3}{2} kT. \end{aligned}$$

Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. Это справедливо в области не слишком низких температур, далеких от *температуры вырождения*.

2. Число молекул, имеющих энергии, большие заданной энергии $W_{0K} \gg kT$:

$$\begin{aligned} n_{W_K > W_{0K}} &= \int_{W_{0K}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} n(kT)^{-3/2} e^{-W_K/(kT)} \sqrt{W_K} dW_K \approx \\ &\approx \frac{2n\sqrt{W_{0K}}}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \int_{W_{0K}}^{\infty} e^{-W_K/(kT)} dW_K = \frac{2n\sqrt{W_{0K}}}{\sqrt{\pi kT}} e^{-W_{0K}/(kT)}. \end{aligned}$$

5°. Распределение Максвелла по относительным скоростям молекул.

Относительное движение двух молекул может быть описано как движение одной частицы с приведенной

массой $m_{\text{пр}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Для однородного газа $m_1 = m_2 = m_0$

и $m_{\text{пр}} = \frac{m_0}{2}$. Распределение молекул по относительным скоростям:

$$dn_{u_{\text{отн}}} = n \left(\frac{m_0}{4\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_0 u_{\text{отн}}^2}{4kT} \right) 4\pi u_{\text{отн}}^2 du_{\text{отн}},$$

где $u_{\text{отн}}$ — относительная скорость двух молекул;

$$\frac{dn_{u_{\text{отн}}}}{n} = f(u_{\text{отн}}) du_{\text{отн}};$$

$f(u_{\text{отн}})$ — функция распределения молекул по относительным скоростям, равная

$$f(u_{\text{отн}}) = 4\pi \left(\frac{m_0}{4\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_0 u_{\text{отн}}^2}{4kT} \right) u_{\text{отн}}^2.$$

Пр и м е р. Средняя относительная скорость молекул:

$$\langle u_{\text{отн}} \rangle = \int_0^{\infty} u_{\text{отн}} f(u_{\text{отн}}) du_{\text{отн}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{2} \langle u \rangle,$$

где $\langle u \rangle$ — средняя скорость молекул.

3. СРЕДНЯЯ ДЛИНА СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ

1°. Столкновение двух частиц характеризуется *эффективным поперечным сечением соударения* σ . В случае соударения молекул, имеющих диаметр d , (модель твердых сфер) эффективное газокинетическое поперечное сечение равно площади круга с радиусом d (*эффективный диаметр молекулы*):

$$\sigma = \pi d^2.$$

Эффективное поперечное сечение зависит от энергии соударяющихся частиц и характера процесса, происходящего при соударении.

2°. Между двумя последовательными соударениями молекула движется прямолинейно и равномерно, проходя в среднем определенное расстояние, называемое *средней длиной свободного пробега* $\langle \lambda \rangle$. Закон распределения свободных пробегов устанавливает вероятность $d\omega(x)$ того, что молекула пройдет без соударения путь x и претерпит соударение на следующем бесконечно малом участке пути dx :

$$d\omega(x) = e^{-n_0\sigma x} n_0\sigma dx,$$

где n_0 — концентрация молекул газа, σ — эффективное поперечное сечение соударения.

3°. Среднее расстояние $\langle x \rangle$, пройденное молекулой без соударения (средняя длина свободного пробега):

$$\langle x \rangle = \langle \lambda \rangle = \int_0^{\infty} x d\omega(x) = \int_0^{\infty} x e^{-n_0\sigma x} n_0\sigma dx = \frac{1}{n_0\sigma}.$$

С учетом распределения соударяющихся молекул по относительным скоростям

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\sigma},$$

где σ считается не зависящим от $u_{\text{отн}}$. Для данного газа средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению газа p (при $T = \text{const}$):

$$p_1 \langle \lambda_1 \rangle = p_2 \langle \lambda_2 \rangle;$$

индексы 1 и 2 относятся к двум состояниям газа.

4. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

1°. В результате беспорядочного движения молекул и соударений между ними происходят непрерывные изменения скоростей (энергий) частиц газа. Если существует пространственная неоднородность плотности, температуры газа или скорости упорядоченного движения отдельных его слоев, то на тепловое движение молекул накладывается упорядоченное движение, которое и выравнивает эти неоднородности, — возникают явления переноса.

2°. *Явления переноса* (теплопроводность, внутреннее трение и диффузия) состоят в возникновении в газах или жидкостях направленного переноса массы (диффузия), импульса (внутреннее трение) и внутренней энергии (теплопроводность). В газах эти явления связаны с нарушением максвелловского распределения молекул по скоростям. В простейшем случае явления переноса одномерны — определяющие их физические величины зависят только от одной декартовой координаты.

3°. *Явление теплопроводности* возникает при наличии градиента температуры, и в одномерном стационарном случае ($T = T(x)$) его описывают *уравнением Фурье*:

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt,$$

где dQ — количество теплоты, переносимое за время dt через площадку dS в направлении нормали x к этой площадке в сторону убывания температуры, $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры, K — коэффициент теплопроводности, равный количеству теплоты, переносимому через единицу поверхности за единицу времени, при градиенте температуры, равном единице.

Согласно кинетической теории

$$K = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V.$$

Здесь $\langle u \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега, ρ — плотность газа, c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

4°. *Явление внутреннего трения (вязкости)* связано с возникновением сил трения между двумя слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями. Причиной внутреннего трения является перенос молекулами импульса из одного слоя газа в другой.

Уравнение Ньютона для вязкости в одномерной задаче ($v = v(x)$):

$$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS,$$

где dF — сила внутреннего трения, действующая на площадку dS поверхности слоя, $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости.

ти движения слоев в направлении x , перпендикулярном к поверхности слоя, η — коэффициент внутреннего трения, равный силе трения между двумя слоями с площадью, равной единице, при градиенте скорости, равном единице.

Согласно кинетической теории

$$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \rho \langle \lambda \rangle,$$

где $\langle u \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега, ρ — плотность газа.

Более точная теория приводит к замене множителя $1/3$ на коэффициент ϕ , зависящий от характера взаимодействия молекул. Для молекул, сталкивающихся, как гладкие твердые шары, $\phi = 0,499$. Более точные модели сил взаимодействия приводят к тому, что ϕ становится возрастающей функцией температуры.

5°. Коэффициенты переноса K и η не зависят от плотности газа, ибо произведение $\rho \langle \lambda \rangle$ не зависит от ρ . Вязкость газов растет с повышением температуры пропорционально $\sqrt{T}$.

6°. Явлением диффузии называют процесс установления внутри фаз равновесного распределения концентраций. Результатом диффузии при постоянной температуре является выравнивание химических потенциалов. В однофазной системе при постоянной температуре и при отсутствии внешних сил диффузия выравнивает концентрацию компонента фазы во всей системе. Если на систему действуют внешние силы или поддерживается градиент температуры, то в результате диффузии устанавливаются градиенты концентраций отдельных компонентов (термодиффузия, электродиффузия и другие процессы). Явление диффузии в одномерном случае ($\rho = \rho(x)$) в двухкомпонентной системе описывают первым законом Фика:

$$dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt,$$

где dm — масса первого компонента, которая переносится за время dt через элементарную площадку dS в направлении нормали x к рассматриваемой площадке в

сторону убывания плотности первого компонента, $\frac{dp}{dx}$ — градиент плотности, D — коэффициент диффузии.

Если в однокомпонентной системе мысленно выделить группу молекул, выравнивание концентрации выделенных частиц по объему сосуда называют *самодиффузией*. Самодиффузия также описывается законом Фика, в котором D называют *коэффициентом самодиффузии*.

В простейшем случае самодиффузии происходит выравнивание концентрации химически однородного вещества при $T = \text{const}$ и отсутствии внешних сил, осуществляемое наложением на тепловое движение атомов или молекул их упорядоченного движения. В случае броуновского движения диффундируют крупные частицы, взвешенные в газе или жидкости.

7°. Плотностью диффузионного потока называют вектор $\mathbf{j}$, который показывает в каждой точке среды направление переноса частиц данного сорта при их диффузии и равен количеству этих частиц, переносимых путем диффузии за единицу времени через единицу площади поверхности, ортогональной вектору $\mathbf{j}$. При условии существования в газе градиента давлений ∇p , вызванного некоторыми внешними силами, и градиента температур ∇T плотность диффузионного потока равна

$$\mathbf{j} = -Dn_0 \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right),$$

где $n_0 = \frac{p}{kT}$, c — относительная концентрация молекул диффундирующего вещества, равная отношению их числа n в единице объема среды к общему числу n_0 молекул в том же объеме, k — постоянная Больцмана, D — коэффициент диффузии, равный плотности диффузионного потока, при наличии одного только градиента концентрации ∇c , равного $1/n_0$. Величину $k_T D$ называют *коэффициентом термодиффузии*; эта величина равна плотности диффузионного потока при условиях: $\nabla c = \nabla p = 0$; $\frac{\nabla T}{T} = \frac{1}{n_0}$. Безразмерную величину k_T называют *термодиффузионным отношением*. Величину $k_p D$

называют коэффициентом бародиффузии; она равна плотности диффузионного потока при условиях:

$$\nabla c = \nabla T = 0, \quad \frac{\nabla p}{p} = \frac{1}{n_0}.$$

8°. В случае трехмерной диффузии изменение концентрации с течением времени при постоянной температуре и отсутствии внешних сил описывается дифференциальным уравнением диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial c}{\partial z} \right),$$

где D — коэффициент диффузии, t — время. Если D не зависит от концентрации, то уравнение приводят к виду

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$$

(второй закон Фика), где Δ — дифференциальный оператор Лапласа.

Примеры.

1. Распределение концентрации вдоль полубесконечного стержня, на торце которого в начальный момент времени $t = 0$ сосредоточена масса m (на единице площади торца):

$$c(x, t) = \frac{m}{\sqrt{\pi D t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4 D t} \right),$$

где x — расстояние от торца.

2. Распределение концентрации растворенного в жидкости вещества с массой m , которое в начальный момент $t = 0$ находилось в начале координат:

$$c(r, t) = \frac{m}{8\rho(\pi D t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{r^2}{4 D t} \right),$$

где ρ — плотность жидкости, r — расстояние от начала координат.

9°. Согласно кинетической теории газов

$$D = \frac{1}{3} \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{2} n_0 \sigma} = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle, \quad (5.1)$$

где $\langle u \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, σ — эффективное поперечное сечение соударения молекул, n_0 — концентрация молекул, $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега.

Коэффициент самодиффузии обратно пропорционален давлению газа; при изменении температуры D изменяется пропорционально $T^{1/2}$ при постоянном объеме и пропорционально $T^{3/2}$ (практически от $T^{1.7}$ до T^2) при постоянном давлении.

10°. В неравновесной стационарной смеси двух газов наблюдается диффузия молекул одного газа в другой. В первом приближении коэффициент диффузии D в этом случае вычисляется по формуле (5.1), причем

$$\sigma = \sqrt{2\pi} \left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2,$$

где d_1 и d_2 — диаметры молекул обоих газов. Более точное выражение для коэффициента диффузии имеет вид

$$D = \frac{3 \sqrt{RT} \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}}}{32 \sqrt{2\pi} N_A \psi (c_1 + c_2)},$$

где μ_1 и μ_2 — молярные массы каждого из газов, c_1 и c_2 — их концентрации в моль/м³, N_A — постоянная Авогадро. Величина ψ зависит от характера силового взаимодействия молекул; в случае молекул — упругих шариков

$$\psi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{16},$$

где d_1 и d_2 — диаметры молекул обоих сортов газов.

11°. Согласно кинетической теории газов между коэффициентами переноса существует связь:

$$\eta = \rho D \text{ и } \frac{K}{\eta c_V} = 1,$$

где c_V — удельная теплоемкость газа в изохорном процессе. На практике используется более точная связь коэффициентов переноса:

$$D = \frac{K}{\alpha \rho c_V},$$

где α — множитель, зависящий от числа степеней свободы молекул газа; для одноатомного газа $\alpha = 2,5$, двухатомного $\alpha = 1,9$; трехатомного $\alpha = 1,5 - 1,75$.

По одному найденному из опыта коэффициенту переноса и известным ρ и c_v могут быть определены остальные коэффициенты. Формулы для коэффициентов явлений переноса в газах согласуются с опытом лишь приблизительно, с точностью до порядка величины. По значениям коэффициентов переноса могут быть вычислены эффективные диаметры молекул. В таблице II.4 приведены уравнения переноса (для одномерной задачи) и формулы коэффициентов переноса в газах.

Таблица II.4

Явление	Переносимая физическая величина	Уравнение переноса	Формула коэффициента переноса
Диффузия	Масса	$dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt$	$D = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle$
Внутреннее трение	Импульс	$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS$	$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho$
Теплопроводность	Внутренняя энергия	$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt$	$K = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_v$

5. СВОЙСТВА РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

1°. Разреженным называют газ, находящийся при давлении ниже атмосферного. Такое состояние газа называют также *вакуумом*. Степень разрежения газа зависит от соотношения между средней длиной свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, соответствующей взаимным столкновениям молекул газа, и линейными размерами d сосуда, в котором находится газ. Различают степени сверхвысокого ($\langle \lambda \rangle \gg d$), высокого ($\langle \lambda \rangle > d$), среднего ($\langle \lambda \rangle \leq d$) и низкого ($\langle \lambda \rangle \ll d$) вакуума. Отличие свойств разреженных газов от неразреженных проявляется в первых трех из перечисленных степеней вакуума (табл. II.5 ($d = 0,1$ м)).

Таблица П.5

Характеристики	Вакуум			
	низкий	средний	высокий	сверх-высокий
Диапазон давлений, Па (мм рт. ст.)	$10^5 - 10^2$ (760—1)	$10^2 - 10^{-1}$ (1— 10^{-3})	$10^{-1} - 10^{-6}$ (10^{-3} — 10^{-7})	$\ll 10^{-6}$ ($\ll 10^{-7}$)
Концентрация молекул, m^{-3}	$10^{25} - 10^{22}$	$10^{22} - 10^{19}$	$10^{19} - 10^{15}$	$\ll 10^{15}$
Коэффициенты теплопроводности и внутреннего трения	Не зависят от давления	Зависимость от давления определяется параметром $\langle \lambda \rangle / d$	Прямо пропорциональны давлению	Оба явления практически отсутствуют

2°. В дальнейшем под разреженными газами будем понимать газы, находящиеся в состоянии высокого вакуума. Длина свободного пробега молекул разреженного газа определяется размерами сосуда. Поэтому уменьшение плотности разреженного газа не влияет на величину $\langle \lambda \rangle = d$, а приводит лишь к убыли числа молекул, участвующих в переносе импульса или внутренней энергии. Коэффициенты вязкости и теплопроводности разреженного газа прямо пропорциональны плотности газа.

3°. В разреженных газах существует лишь внешнее трение движущегося газа о стенки сосуда. Последнее зависит от изменения импульса молекул при их соударениях со стенками. Сила трения, действующая на единицу площади стенки, в первом приближении пропорциональна скорости движения газа и его плотности. Теплопроводность разреженных газов меньше, чем обычных газов, и осуществляется переносом внутренней энергии молекулами, свободно перемещающимися

между стенками сосуда с различными температурами T_1 и T_2 . Количество теплоты, полученное (или отданное) единицей площади стенки за единицу времени, прямо пропорционально разности температур $T_1 - T_2$ и плотности газа.

4°. *Закон Кнудсена* для течения разреженного газа по цилиндрическому капилляру радиуса r и длины l :

$$Q = \frac{8}{3} r^3 \sqrt{\frac{\pi \mu}{2RT}} \frac{p_1 - p_2}{l},$$

где Q — масса газа, протекающего за 1 с через поперечное сечение капилляра, μ — молярная масса газа, R — молярная газовая постоянная, T — термодинамическая температура, p_1 и p_2 — давления газа на концах капилляра.

5°. При соединении узкой трубкой двух сосудов, находящихся при различных температурах T_1 и T_2 , стационарному состоянию разреженного газа соответствует условие

$$n_1 \langle u_1 \rangle = n_2 \langle u_2 \rangle,$$

где n_1 и n_2 — концентрации молекул в обоих сосудах, $\langle u_1 \rangle$ и $\langle u_2 \rangle$ — их средние скорости. Это условие означает равенство встречных потоков молекул, движущихся из первого сосуда во второй и обратно. Так как $n \sim \frac{p}{T}$, а $u \sim \sqrt{T}$, то

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

(эффект Кнудсена).

6°. На особых свойствах разреженных газов основано устройство многих приборов для получения вакуума (*диффузионные* и другие *насосы*), его измерения (*вакуумметры*) и для создания тепловой изоляции (*сосуды Дьюара*).

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. ВВЕДЕНИЕ

1°. *Статистической физикой* называют раздел физики, в котором изучаются макроскопические свойства систем, состоящих из очень большого числа частиц (молекул, атомов, электронов и т. д.), через свойства этих частиц и взаимодействие между ними.

Статистическая физика рассматривает системы, находящиеся в равновесном состоянии (*равновесная статистическая физика*) и неравновесных состояниях (*неравновесная статистическая физика*).

2°. Поведение систем, состоящих из большого числа частиц, определяется *статистическими закономерностями*, отличными от законов, которым подчиняется каждая из частиц, входящая в макроскопическую систему. Поведение отдельной частицы (например, ее траектория, последовательность изменения ее состояний и т. п.) при статистическом описании системы оказывается несущественным. Поэтому изучение свойств системы сводится к отысканию средних значений физических величин, характеризующих состояние системы как целого. Существенное отличие систем, подчиняющихся статистическим закономерностям, от систем, в которых достаточным оказывается описание с помощью законов механики, состоит в том, что поведение и свойства первых в значительной степени не зависят от их начального состояния.

3°. Связь между закономерностями, описывающими движение отдельных частиц (*динамические закономерности*), и статистическими закономерностями проявляется в том, что в зависимости от законов движения отдельных частиц существенно изменяются свойства макроскопической системы, изучаемой методами статистической физики.

4°. Каждому состоянию системы, содержащей n одинаковых бесструктурных частиц, которые имеют по три степени свободы и движутся по законам классической механики, соответствует своя изобразительная точка в 6-мерном фазовом пространстве (*Γ -пространстве*). Состояние той же системы удобно изображать в виде совокупности n точек в 6-мерном фазовом пространстве, назы-

ваемом μ -пространством (μ -пространство). По осям координат μ -пространства откладывают декартовы координаты x, y, z частиц системы и соответствующие проекции p_x, p_y, p_z их импульсов. Состояние системы характеризуется распределением в μ -пространстве изобразительных точек всех частиц системы.

5°. В статистической физике используют *эргодическую гипотезу*. Согласно этой гипотезе предполагается, что в термодинамически равновесной системе средние по времени значения физических величин, характеризующих систему равны их средним статистическим значениям, т. е. средним статистическим по равномерному распределению фазовых точек в тонком слое энергии вблизи поверхности постоянной энергии, рассчитанным в один и тот же произвольный момент времени. Термодинамическую систему, удовлетворяющую эргодической гипотезе, называют *эргодической (эргодичной) системой*.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1°. Различные состояния системы могут осуществляться с той или иной вероятностью. Вероятность i -го состояния ω_i определяется как предел отношения времени t_i , в течение которого система находится в данном состоянии, к полному времени T наблюдения над системой при неограниченном увеличении T :

$$\omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t_i}{T}.$$

Если некоторая физическая величина M является однозначной функцией состояния и принимает значение M_i , то это означает, что система находится в i -м состоянии.

2°. Вероятность i -го состояния системы совпадает с вероятностью того, что физическая величина M принимает значение M_i . Если N есть полное число измерений величины M , а N_i есть число измерений, в результате которых найдено, что величина M имеет значение M_i , то

$$\omega_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}.$$

3°. При непрерывном изменении состояния системы необходимо говорить не о значении M , а об интервале значений этой величины. Вероятность $d\omega(M)$ того, что величина M имеет значение, лежащее в интервале от M до $M + dM$, равна

$$d\omega(M) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt_M}{T},$$

где dt_M — время, в течение которого система находится в состояниях, соответствующих значениям M , лежащим в интервале от M до $M + dM$; величины dt_M и $d\omega(M)$ пропорциональны интервалу dM :

$$d\omega(M) = \rho(M) dM,$$

где $\rho(M)$ — плотность вероятности, или функция распределения вероятностей.

4°. Условие нормировки вероятностей состояния: при непрерывном изменении состояний

$$\int_M d\omega(M) = \int_M \rho(M) dM = 1;$$

при дискретных состояниях

$$\sum_i \omega_i = 1.$$

5°. Статистическое среднее значение величины M обозначается $\bar{M}$ или $\langle M \rangle$ и определяется следующим образом:

$$\langle M \rangle = \sum_i M_i \omega_i,$$

если величина M изменяется дискретно. Суммирование производится по всем i -м состояниям системы. В случае непрерывного изменения величины M

$$\langle M \rangle = \int_M M d\omega(M) = \int_M M \rho(M) dM,$$

где интегрирование производится по всем возможным состояниям системы.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

1°. *Микроканоническим распределением Гиббса* называют распределение вероятностей различных состояний изолированной макроскопической системы, т. е. системы, не взаимодействующей с окружающими телами, имеющей постоянные энергию E , объем V и число частиц N , а также макроскопически неподвижной системы. Различным состояниям классической равновесной системы с s степенями свободы соответствует совокупность точек на гиперповерхности $E = \text{const}$ в $2s$ -мерном Γ -пространстве, уравнение которой

$$H(q, p) - E = 0.$$

Здесь $H(q, p)$ — функция Гамильтона рассматриваемой системы. Состояния такой идеализированной системы являются *вырожденными*: каждому значению энергии E системы соответствует несколько разных состояний, число которых называют *кратностью вырождения*.

2°. В действительности полностью изолировать систему нельзя. Поэтому следует говорить о пребывании системы в различных микросостояниях с общей энергией в пределах от E до $E + \delta E$, где $\delta E \ll E$ (в пределе при полной изоляции $\delta E = 0$). Этим состояниям системы соответствуют изобразительные точки, находящиеся в Γ -пространстве в пределах малого объема $d\Gamma$, заключенного между двумя гиперповерхностями $H(q, p) = E$ и $H(q, p) = E + \delta E$.

В основе *микроканонического распределения Гиббса* лежит предположение о том, что все состояния замкнутой системы в узкой области энергий δE вблизи E ($\delta E \ll E$) равновероятны (независимо от конкретных комбинаций соответствующих значений q и p частиц), а вне этой области энергий вероятность состояний равна нулю:

$$f(q, p) = \frac{dw(q, p)}{d\Gamma} = \begin{cases} \varphi(E, \delta E, V, N) & \text{при } E \leq H(q, p) \leq E + \delta E, \\ 0 & \text{при } H(q, p) < E \text{ и } H(q, p) > E + \delta E. \end{cases}$$

Здесь $f(q, p) = \frac{dw}{d\Gamma}$ — объемная плотность вероятности состояния, а $d\Gamma = dqdp$ — элементарный объем Γ -пространства.

3°. В пределе при $\delta E \rightarrow 0$ микроканоническое распределение Гиббса записывают в форме

$$f(q, p) = A(E) \delta[H(q, p) - E].$$

Здесь $\delta[H - E]$ — дельта-функция Дирака, отличная от 0 только при $H = E$, а постоянный коэффициент $A(E)$, зависящий от энергии E системы (объем системы V и число частиц N фиксированы), определяется из условия нормировки вероятностей:

$$A(E)^{-1} = \int_{\Gamma} \delta[H(q, p) - E] d\Gamma,$$

где интегрирование проводится по области Γ -пространства, соответствующей всем возможным состояниям системы.

Величина $A(E)^{-1} dE$ имеет смысл объема тонкой области Γ -пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями $H(q, p) = E$ и $H(q, p) = E + dE$.

4°. Микроканоническое распределение Гиббса позволяет, не решая уравнений движения, находить средние значения всех физических величин $F(q, p)$, которые как раз и характеризуют равновесное состояние замкнутой системы:

$$\langle F \rangle = A(E) \int_{\Gamma} F(q, p) \delta[H(q, p) - E] d\Gamma.$$

Микроканоническое распределение Гиббса лежит в основе канонического распределения Гиббса.

5°. *Каноническим распределением Гиббса* называют распределение вероятностей различных возможных состояний некоторой *квазизамкнутой подсистемы*, т. е. некоторой части замкнутой макроскопической системы. Подсистема называется квазизамкнутой, если ее собственная энергия в среднем велика по сравнению с энергией ее взаимодействия с остальными частями замкнутой системы (называемыми *термостатом*).

Например, каждая молекула идеального газа при не слишком низких температурах является квазизамкнутой подсистемой. Ее собственная кинетическая энергия в среднем намного превышает среднюю по времени

между двумя столкновениями энергию ее взаимодействия с другими молекулами газа (термостатом).

6°. Взаимодействие подсистемы с термостатом приводит к изменению ее состояний: она может переходить как в состояния с первоначальной энергией, так и в состояния с другими значениями энергии. При последних переходах подсистема обменивается энергией с термостатом, увеличивая или уменьшая свою энергию.

7°. Вероятность состояния подсистемы зависит только от ее энергии. Согласно квантовому каноническому распределению Гиббса

$$\omega(E_i) = \frac{\exp\left(-\frac{E_i}{\Theta}\right) \Omega(E_i)}{\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{\Theta}\right) \Omega(E_i)} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{\Theta}\right) \Omega(E_i),$$

где $\omega(E_i)$ — вероятность пребывания квазизамкнутой подсистемы в состоянии с энергией E_i , $\Omega(E_i)$ — кратность вырождения, Θ — статистическая температура.

Величину $Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{\Theta}\right) \Omega(E_i)$ называют суммой

по состояниям или статистической суммой.

Величина Θ является температурой, выраженной в энергетических единицах. Она превращает неполный дифференциал количества теплоты δQ в полный дифференциал величины

$\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V$, где F — свободная энергия системы:

$$\delta Q = -\Theta d\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V.$$

Величина Θ принимает одинаковые значения в двух различных системах, находящихся в состоянии термодинамического равновесия при тепловом контакте между ними. Универсальным коэффициентом пропорциональности, переводящим статистическую температуру Θ в термодинамическую, является постоянная Больцмана:

$$\Theta = kT > 0.$$

8°. Для систем, энергия состояний которых изменяется квазинепрерывно, т. е. расстояния между энергетическими уровнями которых малы сравнительно с $\Theta = kT$, квантовое распределение Гиббса переходит в классическое каноническое распределение:

$$d\omega(E) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Omega(E),$$

$$d\Omega(E) = \Omega(E) dE, \quad Z = \int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) \Omega(E) dE,$$

где $d\Omega(E)$ — число различных состояний, отвечающих интервалу энергий от E до $E + dE$, Z — интеграл состояний, или фазовый интеграл. Для системы N тождественных частиц

$$Z = \frac{1}{h^s N!} \int \exp\left(-\frac{E}{\Theta}\right) d\Gamma,$$

где $d\Gamma$ — элемент фазового объема, h — постоянная Планка, s — число степеней свободы системы, а интегрирование проводится по всему фазовому пространству данной системы. Интеграл состояний и статистическая сумма связаны со свободной энергией F системы соотношением

$$Z = \exp\left(-\frac{F}{\Theta}\right); \quad F = -\Theta \ln Z.$$

9°. Для подсистемы с большим числом частиц каноническое распределение Гиббса имеет резкий максимум. Такая подсистема наибольшую часть времени находится в наиболее вероятном состоянии с соответствующей ему энергией. Если подсистемой является одна молекула идеального газа, то каноническое распределение Гиббса переходит в распределение Максвелла—Больцмана.

Каноническое распределение Гиббса применяется при отыскании среднего значения $\langle M \rangle$ физической величины M , характеризующей состояние системы и зависящей от ее энергии:

$$\langle M \rangle = \sum_i M(E_i) \omega(E_i).$$

При непрерывном изменении состояний

$$\langle M \rangle = \int M(E) d\omega(E).$$

10°. Вычисление Z позволяет отыскивать термодинамические функции и уравнение состояния данной системы.

В таблице II.6 приведены формулы, выражающие термодинамические функции, теплоемкость и уравнение состояния через сумму (или интеграл) по состояниям системы.

Таблица II.6

Величина, обозначение	Формула
Свободная энергия, F	$F = -kT \ln Z$
Изобарно-изотермический потенциал, Φ	$\Phi = kT \left[\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V} \right)_T - \ln Z \right]$
Внутренняя энергия, U	$U = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V$
Энтропия, S	$S = k \left[\ln Z + T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \right]$
Энтальпия, H	$H = kT \left[\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V} \right)_T + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \right]$
Теплоемкость, C_V	$C_V = kT \left[2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V + T \left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2} \right)_V \right]$
Уравнение состояния	$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T$

4. ЗАКОН РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

1°. В классической статистической физике считается, что в термодинамически равновесной системе действует следующий закон равномерного распределения энергии: на каждую степень свободы частиц, образуя-

щих систему, в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $W_{\text{к0}}$. Поскольку одноатомная («точечная») молекула имеет три степени свободы, а ее средняя кинетическая энергия равна $\frac{3kT}{2}$, $W_{\text{к0}} = \frac{kT}{2}$, где k — постоянная Больцмана, а T — термодинамическая температура.

2°. При колебательном движении частица имеет как кинетическую, так и потенциальную энергию. Если колебания гармонические, то кинетическая и потенциальная энергии в среднем равны друг другу. Поэтому на одну колебательную степень свободы в среднем приходится энергия, равная $2W_{\text{к0}} = kT$.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА—БОЛЬЦМАНА

1°. Закон, или *распределение Максвелла—Больцмана* устанавливает распределение молекул газа по координатам и скоростям при наличии произвольного потенциального силового поля.

Наиболее употребительные формулы этого распределения:

$$\text{а) } dn(u; x, y, z) =$$

$$= \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}u_b^3} \exp\left[-\frac{1}{u_b^2}\left(u^2 + \frac{2W_n(x, y, z)}{m_0}\right)\right] u^2 du dV,$$

где u_b — наиболее вероятная скорость молекул, dn_u — число молекул в объеме газа dV вблизи точки (x, y, z) , скорости которых заключены в интервале от u до $u + du$, m_0 — масса молекулы, $W_n(x, y, z)$ — потенциальная энергия молекулы в рассматриваемой точке внешнего силового поля, n_0 — концентрация молекул газа в той точке, в которой $W_n = 0$;

$$\text{б) } d\omega(p_x, p_y, p_z; x, y, z) = \text{const} \cdot \frac{1}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_0 kT}\right) dp_x dp_y dp_z \cdot \exp\left(-\frac{W_n(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz,$$

где $d\omega$ — вероятность того, что координаты и проекции импульса молекулы находятся в элементе фазового объема $dt = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ около фазовой точки

(x, y, z, p_x, p_y, p_z) ; $W_{\Pi}(x, y, z)$ — потенциальная энергия молекулы во внешнем силовом поле. В такой форме распределение Максвелла—Больцмана можно рассматривать как функцию распределения, представляющую собой произведение вероятностей двух независимых событий — вероятности данного значения импульса молекулы и данного положения ее в пространстве. Первая вероятность

$$d\omega(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_0 kT}\right) dp_x dp_y dp_z$$

является распределением Максвелла. Вторая вероятность

$$d\omega(x, y, z) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{W_{\Pi}(x, y, z)}{kT}\right) dx dy dz$$

называется *распределением Больцмана*.

2°. Распределение Больцмана в гравитационном поле. Потенциальная энергия молекулы с массой m_0 в поле тяготения: $W_{\Pi} = m_0 g z$, где z — высота и g — ускорение свободного падения. На каждой высоте имеется максвелловское распределение молекул по скоростям, определяемое температурой. Интегрирование распределения Максвелла по всем импульсам дает число молекул, находящихся в объеме $dx dy dz$:

$$dn(x, y, z) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right) dx dy dz.$$

Отсюда следует, что плотность газа $\rho = \frac{dn(x, y, z)}{dx dy dz} m_0$ убывает с высотой по экспоненциальному закону:

$$\rho = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right).$$

Постоянную в этом выражении определяют из условия, что при $z = 0$ $\rho = \text{const}$. Таким образом,

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{m_0 g z}{kT}\right)$$

(барометрическая формула). Плотность газа убывает в $e \approx 2,71$ раза на высоте $h = \frac{kT}{m_0 g}$, называемой *характеристической длиной распределения Больцмана в гравитационном поле*.

6. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

1°. *Квантовой статистикой* называют теорию систем, состоящих из весьма большого числа частиц, подчиняющихся квантовым закономерностям.

Состояние произвольной квантовомеханической системы, имеющей s степеней свободы, можно рассматривать в так называемом *квазиклассическом приближении* аналогично тому, как это делается в классической механике. При этом на возможные состояния системы накладывается ограничение: каждому квантовому состоянию системы с s степенями свободы соответствует ячейка в ее фазовом пространстве, имеющая объем h^s .

Изменение состояния системы может происходить лишь дискретно; система из одних ячеек фазового объема переходит «скачком» в другие. В квазиклассическом приближении переход в соседнюю квантовую ячейку соответствует очень малому изменению свойств системы. Можно считать, что свойства системы изменяются непрерывно. Распределение частиц по ячейкам 6 -мерного фазового μ -пространства (x, y, z, p_x, p_y, p_z) характеризует определенное *микросостояние* системы.

2°. Задачей квантовой статистики является отыскание функции распределения системы частиц в фазовом пространстве. Существенным отличием квантовой статистики от классической является последовательное проведение *принципа неразличимости тождественных частиц*. В квантовой статистике при решении задачи о распределении тождественных частиц в фазовом пространстве не имеет смысла постановка вопроса о том, какая из частиц находится в данной ячейке фазового пространства. Ставится вопрос лишь о числе частиц, находящихся в данной ячейке. Микросостояние системы не изменяется от перестановки частиц как внутри данной ячейки фазового пространства, так и между ячейками.

7. КВАНТОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЗЕ—ЭЙНШТЕЙНА И ФЕРМИ—ДИРАКА

1°. В системах невзаимодействующих тождественных частиц, описываемых *симметричными волновыми функциями*, осуществляется *статистика Бозе—Эйнштейна*. Этой статистике подчиняются системы частиц с *целым спином* — бозоны (например, фотоны и

мезоны), для которых не накладывается ограничение на число частиц, могущих находиться в данной клетке 6-мерного фазового пространства.

2°. Наиболее вероятное, т. е. термодинамически равновесное, состояние системы невзаимодействующих тождественных бозонов, образующих *идеальный бозе-газ*, описывается *распределением Бозе—Эйнштейна*:

$$\langle n_i \rangle = \frac{N_i}{g_i} = \left[\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}.$$

Здесь W_i — возможные значения энергии частицы, g_i — число различных квантовых состояний частицы, соответствующих ее энергии W_i (степень вырождения), N_i — число частиц в системе, имеющих энергию W_i , $\langle n_i \rangle$ — среднее число частиц, находящихся в i -м квантовом состоянии, T — термодинамическая температура, k — постоянная Больцмана, а μ — химический потенциал, отнесенный к одной частице. Химический потенциал μ определяется из условия постоянства общего числа частиц в системе: $\sum N_i = N = \text{const.}$ Если последнее условие не выполняется, то $\mu = 0$. Например, $\mu = 0$ для равновесного излучения — для равновесной системы фотонов в замкнутой полости, общее число которых в объеме полости увеличивается с увеличением температуры.

3°. В системах невзаимодействующих тождественных частиц, описываемых антисимметричными волновыми функциями и образующих *идеальный Ферми-газ*, осуществляется *статистика Ферми—Дирака*. Эта статистика описывает поведение *фермионов* (электронов, барионов и др.) — частиц, подчиняющихся *принципу запрета Паули* и имеющих полупцелый спин. В таких системах в одном квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. Решение задачи о наиболее вероятном распределении частиц по состояниям, при условии сохранения полной энергии системы и полного числа ее частиц, приводит к *функции распределения Ферми—Дирака*:

$$\langle n_i \rangle = \frac{N_i}{g_i} = \left[\exp\left(\frac{W_i - \mu}{kT} \right) + 1 \right]^{-1}.$$

Обозначения здесь те же, что и для распределения Бозе—Эйнштейна.

4°. Функции распределения в классической и квантовых статистиках могут быть записаны в единой формуле:

$$\langle n \rangle = \frac{dN}{dg} = \left[\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) + \delta \right]^{-1} = A^{-1} \left[\exp\left(\frac{W}{kT}\right) + \delta \right]^{-1}.$$

Здесь dN — число частиц системы, энергия которых заключена в узком диапазоне от W до $W + dW$, dg —

число соответствующих различных квантовых состояний

частицы, $A = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$ — параметр вырождения.

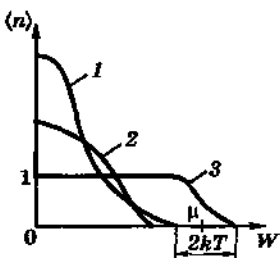


Рис. II.6.1

На рис. II.6.1 показаны три функции распределения: Максвелла—Больцмана 1 ($\delta = 0$); Бозе—Эйнштейна 2 ($\delta = -1$); Ферми—Дирака 3 ($\delta = +1$).

8. ВЫРОЖДЕННЫЙ ГАЗ

1°. *Вырожденным газом* называют газ, квантовые свойства которого играют существенную роль. В зависимости от величины спина частиц вырожденные газы подчиняются квантовым распределениям Бозе—Эйнштейна или Ферми—Дирака. Примером вырожденного идеального Бозе-газа может служить фотонный газ в замкнутой полости, а примером идеального Ферми-газа — электронный газ в металле. Газ вырожден, если его параметр вырождения A и химический потенциал удовлетворяют условиям:

$$A = \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \geq 1 \text{ и } \mu \geq 0.$$

Если $A \ll 1$, то в формулах распределений Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака первый член в знаменателе формул для $\langle n_i \rangle$ во много раз больше 1. Поэтому вторым членом (± 1) можно пренебречь и перейти от квантовых распределений к классическому распределению Максвелла—Больцмана. При этом несуществен-

но, каковы частицы газа — фермионы или бозоны, так как всегда $n \ll 1$. Такой газ, описываемый классической статистической физикой, называют *невырожденным газом*. Для него справедливо условие

$$\frac{n_0^{2/3} h^2}{2\pi m_0 k T} \ll 1,$$

где m_0 — масса одной частицы, n_0 — концентрация частиц в газе, h — постоянная Планка.

2°. Газ вырожден, если его температура $T \leq T_0$, где T_0 — *температура вырождения*, зависящая от концентрации n_0 , массы m_0 и спина частиц газа. По порядку величины

$$T_0 = \frac{n_0^{2/3} h^2}{2\pi m_0 k}.$$

При $h \rightarrow 0$ температура вырождения $T_0 \rightarrow 0$, что свидетельствует о квантовой природе явления вырождения газов. Фотонный газ всегда вырожден, так как масса фотона равна нулю, и $T_0 = \infty$. Температура вырождения самого легкого молекулярного газа — водорода, при обычных значениях давления и температуры, порядка 1 К. Еще меньшие значения T_0 у других газов с более тяжелыми молекулами.

3°. Равновесное излучение в замкнутой полости можно рассматривать как идеальный газ фотонов всевозможных частот, находящийся в состоянии термодинамического равновесия со стенками полости. Spin фотона равен 1 (в единицах $\hbar = h/2\pi$), так что фотоны образуют идеальный Бозе-газ, находящийся в полости объемом V при температуре T .

Число различных состояний фотонов в объеме dt части фазового μ -пространства, соответствующей фотонам с энергией в пределах от W до $W + dW$ и модулями импульса в пределах от p до $p + dp$, равно

$$dg = 2 \frac{d\tau}{h^3} = \frac{2V}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} W^2 dW.$$

Коэффициент 2 в этой формуле учитывает существование двух независимых взаимно перпендикулярных

направлений поляризации света. Число фотонов в полости непостоянно (возрастает с увеличением температуры). Поэтому химический потенциал фотонного газа $\mu = 0$ независимо от значения температуры. Параметр вырождения $A = 1$, и функция распределения Бозе—Эйнштейна для фотонного газа имеет вид

$$\frac{dN}{dg} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W}{kT}\right) - 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1},$$

так как энергия и импульс фотона соответственно равны $W = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$, где ν — частота излучения, c — скорость света в вакууме.

4°. Число фотонов с энергией от W до $W + dW$ и частотой от ν до $\nu + d\nu$ в объеме V :

$$dN(W) = \frac{dg}{\exp\left(\frac{W}{kT}\right) - 1} = \frac{8\pi\nu^2 V d\nu}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

Объемная плотность энергии излучения в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$:

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{dN(W) h\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2 h\nu}{c^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} d\nu$$

(формула Планка для объемной плотности энергии теплового излучения черного тела).

Энергия излучения

$$U = \frac{V}{h^3} \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15c^3}$$

(закон Стефана—Больцмана).

Давление излучения $p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$. Свободная энергия $F = -U$. Энергия Гиббса $\Phi = 0$. Энтропия излучения $S = \frac{4}{3} \frac{U}{T}$.

5°. В первом приближении электроны проводимости в металле рассматривают как идеальный Ферми-газ.

Концентрация электронов проводимости в металле столь велика ($n_0 \approx 10^{28} \sim 10^{29} \text{ м}^{-3}$), а масса столь мала ($m_e \approx 10^{-30} \text{ кг}$), что электронный газ в металле вырожден при всех значениях температуры, соответствующих конденсированному агрегатному состоянию металла. Температура вырождения электронного газа в металле $T_0 \approx 10^4 \text{ К}$.

6°. Энергия электрона $W = \frac{p^2}{2m}$, где p — модуль его импульса. Число разных квантовых состояний электронов, приходящихся на интервал значений энергии от W до $W + dW$, равно

$$dq = 2 \frac{d\tau}{h^3} = \frac{8\pi V}{h^3} p^2 dp = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} W^{1/2} dW,$$

где коэффициент 2 учитывает две возможные ориентации спина электрона.

Функция заполнения электронами проводимости состояний (функция распределения Ферми—Дирака)

$$\langle n \rangle = \frac{dN}{dq} = \frac{1}{\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Число электронов в единице объема, энергия которых заключена в интервале W до $W + dW$, равно

$$dn_0(W) = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{W^{1/2} dW}{\exp\left(\frac{W - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

7°. При температуре $T = 0$ химический потенциал электронного газа $\mu(0)$ совпадает с наибольшей энергией W_F , которую могут иметь электроны при этой температуре: $\mu(0) = W_F$. Все состояния с энергией $W < W_F$ заняты электронами, а все состояния с $W > W_F$ свободны. Энергию W_F называют энергией Ферми. График распределения электронов по состояниям при $T = 0$ изображен на рис. II.6.2.

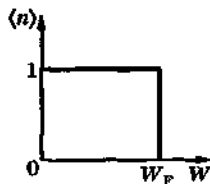


Рис. II.6.2

В модели электронного газа в металлах электроны при $T = 0$ равномерно заполняют все ячейки фазового пространства, лежащие внутри сферы объемом $\frac{4}{3} \pi p_F^3 V$, где p_F — наибольший импульс электрона при $T = 0$ (импульс Ферми). Число состояний в этой сфере с учетом принципа Паули и двух возможных ориентаций спина электрона равно числу электронов:

$$2 \frac{1}{h^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3 V = N,$$

откуда

$$p_F = h \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{1/3},$$

где $n_0 = \frac{N}{V}$ — концентрация электронов. Наибольшая энергия электрона при $T = 0$ равна

$$W_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

При концентрации свободных электронов в металлах $n_0 \approx 10^{22} \text{ м}^{-3}$, их энергии Ферми W_F соответствует температура T классического газа, равная

$$T \approx \frac{W_F}{k} \approx 10^4 \text{ К.}$$

Средняя энергия электрона в металле при $T = 0$ равна

$$\langle W \rangle = \frac{3}{5} W_F = \frac{3h^2}{10m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3},$$

т. е. она имеет порядок величины W_F .

Давление электронного газа при $T \rightarrow 0$ равно

$$p = \frac{2}{5} n_0 W_F = \frac{1}{5} \frac{h^2}{m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} n_0^{5/3}.$$

Коэффициент сжимаемости электронного газа при $T \rightarrow 0$

$$\beta = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{3}{5} \frac{1}{p}.$$

8°. Функция распределения Ферми—Дирака, изображенная на рис. П.6.2, представляет собой наиболее вероятное распределение. Термодинамическая вероятность такого распределения равна единице, откуда следует, что энтропия электронного газа при $T = 0$ равна нулю в соответствии с принципом Нернста.

9°. При $T \neq 0$ функция распределения Ферми—Дирака изображена на рис. П.6.1. Она отличается от прямоугольника (при $T = 0$) в узкой области энергии, имеющей ширину порядка $2kT$.

Химический потенциал μ электронного газа слабо зависит от температуры:

$$\mu = W_F \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\pi k T}{W_F} \right)^2 \right],$$

где W_F — энергия Ферми.

Энтропия S вырожденного электронного газа равна

$$S = \frac{4\pi^3}{3} \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} k \mu^{1/2} kT,$$

где V — объем газа, k — постоянная Больцмана. При $T \rightarrow 0$ $S \rightarrow 0$.

10°. Внутренняя энергия U электронного газа равна

$$U = \frac{3}{5} N W_F \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi k T}{W_F} \right)^2 \right],$$

где N — общее число электронов в объеме V .

Молярная теплоемкость C_V электронного газа

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} N_A k \frac{kT}{W_F}.$$

Сравнение с классическим выражением для теплоемкости C_V одноатомного газа дает

$$\frac{C_V}{C_{V, \text{класс}}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{W_F} \approx 0,03,$$

так как $\frac{kT}{W_F} \approx 0,01$ при всех температурах, когда электронный газ еще вырожден. Теплоемкость электронно-

го газа в металлах ничтожно мала. Это связано с тем, что в процессе изменения внутренней энергии при нагревании участвует незначительное число электронов, находящихся в состояниях, соответствующих «области спада» функции распределения Ферми—Дирака при $T \neq 0$ (рис. II.6.1).

11°. В связи с тем, что энергия газов, описываемых квантовыми статистиками, не является линейной функцией температуры, простое физическое истолкование термодинамической температуры непригодно в области низких температур.

9. ТЕПЛОЕМКОСТИ ОДНОАТОМНЫХ И ДВУХАТОМНЫХ ГАЗОВ

1°. Для одноатомного газа, молекулы которого имеют три степени свободы поступательного движения, согласно закону равномерного распределения энергии по степеням свободы, внутренняя энергия 1 моля газа равна

$$U = \frac{3}{2} N_A k T,$$

где $N_A k = R$ — молярная газовая постоянная. Энергия не зависит от объема и пропорциональна температуре. Молярная теплоемкость $C_{\mu V}$ такого газа равна

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R.$$

2°. Двухатомной молекулой называют устойчивое соединение двух одинаковых или различных атомов. Природа взаимодействий, приводящих к образованию молекул из изолированных атомов, рассматривается в квантовой механике. Энергия молекулы складывается из энергии поступательного движения ее центра масс $W_{\text{пост}}$, энергии движения электронов в молекуле $W_{\text{эл}}$, энергии колебательного движения ядер $W_{\text{кол}}$ и энергии вращательного движения молекулы $W_{\text{вращ}}$:

$$W = W_{\text{пост}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{кол}} + W_{\text{вращ}}.$$

3°. Энергия поступательного движения двухатомной молекулы не квантована и не отличается от энергии поступательного движения одноатомной молекулы. Все остальные виды энергии молекулы *квантованы*: энергии $W_{\text{эл}}$, $W_{\text{кол}}$ и $W_{\text{вращ}}$ принимают дискретный ряд значений.

4°. В первом приближении все три вида внутренних движений в молекуле независимы друг от друга. При малых амплитудах колебаний ядер можно пренебречь влиянием колебательного движения на вращение, т. е. не учитывать изменений моментов инерции молекулы за счет колебаний.

5°. При рассмотрении теплоемкостей одноатомных и двухатомных молекул, вплоть до самых высоких температур, можно не принимать во внимание изменения энергии $\Delta W_{\text{эл}}$ электронного движения: соседние уровни энергии электронов в молекулах расположены на расстояниях порядка нескольких электронвольт, что соответствует температуре в несколько десятков тысяч градусов.

6°. Колебательное движение ядер в молекуле около равновесного положения описывается как колебания одной частицы с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, где m_1 и m_2 — массы атомов. В первом приближении такая частица колеблется как гармонический осциллятор с энергией

$$W_{\text{кол}} = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где квантовое число n принимает целочисленные значения $n = 0, 1, 2, \dots$, и ν — собственная частота колебаний. Энергия $\frac{h\nu}{2}$ (нулевая энергия осциллятора) сохраняется при $T \rightarrow 0$. Разность энергий между соседними уровнями колебательного движения, равная

$$\Delta W_{\text{кол}} = h\nu,$$

не зависит от квантового числа.

7°. Вращательное движение двухатомной молекулы в первом приближении рассматривается как движение жесткого ротатора, вращающегося вокруг центра масс с моментом инерции

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2,$$

где r_0 — расстояние между атомами в молекуле. Энергия ротатора

$$W_{\text{вращ}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1) = hB J(J+1),$$

где J — квантовое число, принимающее целочисленные значения $J = 0, 1, 2, \dots$, $B = \frac{h}{8\pi^2 I}$ — вращательная

постоянная молекулы. Расстояние между соседними уровнями энергии вращения равно

$$\Delta W_{\text{вращ}} = 2hB(J+1).$$

Величина $\Delta W_{\text{вращ}}$ в 800—1000 раз меньше $\Delta W_{\text{кол}}$. Из энергетического спектра колебательных и вращательных состояний можно найти суммы по состояниям колебательного и вращательного движений молекулы $Z_{\text{кол}}$ и $Z_{\text{вращ}}$ и с их помощью оценить вклад колебаний и вращений во внутреннюю энергию 1 моля U и молярную теплоемкость $C_{\mu V}$.

8°. Вклад энергии колебательного движения двухатомных молекул во внутреннюю энергию и теплоемкость 1 моля равен:

$$U_{\text{кол}} = \frac{N_A h \nu}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{T_c}{2T} \right),$$

$$C_{\mu V \text{ кол}} = \frac{N_A k}{4} \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{T_c}{2T} \right)},$$

где k — постоянная Больцмана, N_A — постоянная Авогадро, $T_c = \frac{h\nu}{k}$ — характеристическая температура для колебаний.

При высоких температурах ($T \gg T_c$)

$$U_{\text{кол}} \approx N_A kT = RT,$$

$$C_{\mu V \text{ кол}} \approx N_A k = R,$$

т. е. формулы совпадают с формулами классической теории, вытекающими из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. В этих условиях $\Delta W_{\text{кол}} \ll kT$, и энергию осциллятора можно считать изменяющейся непрерывно.

При низких температурах ($T \ll T_c$)

$$U_{\text{кол}} \approx \frac{N_A k T_c}{2} + N_A k T_c \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right),$$

$$C_{\mu V \text{ кол}} \approx N_A k \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{T_c}{T}\right),$$

т. е. $U_{\text{кол}}$ и $C_{\mu V \text{ кол}}$ являются сложными функциями температуры и собственной частоты. При $T \rightarrow 0$

$$U \rightarrow \frac{N_A k T_c}{2} = \frac{N_A h \nu}{2}.$$

Величину $\frac{N_A h \nu}{2}$ называют нулевой энергией колебаний системы. При $T \rightarrow 0$ $C_{\mu V \text{ кол}} \rightarrow 0$ — в согласии с принципом Нернста. На рис. II.6.3 изображена зависимость колебательной теплоемкости двухатомных газов от температуры.

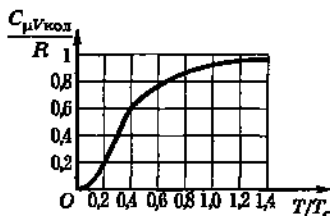


Рис. II.6.3

9°. Вклад энергии вращательного движения двухатомных молекул во внутреннюю энергию и теплоемкость 1 моля равен:

$$U_{\text{вращ}} = N_A k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left[\sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \exp\left(-\frac{T_c J(J+1)}{T}\right) \right],$$

где $T'_c = \frac{\hbar^2}{2kI}$ — характеристическая температура для вращения.

При $T \gg T'_c$

$$U_{\text{вращ}} \approx N_A k T \left(1 - \frac{T'_c}{3T} \right),$$

$$C_{\mu V \text{вращ}} \approx N_A k = R,$$

т. е. вращательная теплоемкость при высокой температуре имеет классическое значение.

При $T \ll T'_c$

$$U_{\text{вращ}} \approx 6N_A k T'_c \exp\left(-\frac{2T'_c}{T}\right) \approx \frac{3\hbar^2 N_A}{4\pi^2 I} \exp\left(-\frac{\hbar^2}{4\pi^2 I k T}\right),$$

$$C_{\mu V \text{вращ}} \approx 12N_A k \left(\frac{T'_c}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{2T'_c}{T}\right),$$

т. е. при $T \rightarrow 0$ $C_{\mu V \text{вращ}} \rightarrow 0$.

Общий ход изменения с температурой теплоемкости, связанной с вращением молекулы, такой же, как и у колебательной теплоемкости (рис. II.6.3). Однако величины T_c и T'_c существенно различны. В табл. II.7 приведены характеристические температуры для колебания (T_c) и вращения (T'_c) некоторых молекул.

Таблица II.7

	Молекула				
	H ₂	N ₂	O ₂	HCl	HI
T_c , K	6000	3340	2230	4140	3200
T'_c , K	85,4	2,85	2,07	15,1	9,0

10. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВТОРОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

1°. Второй закон (второе начало) термодинамики эквивалентен утверждению о невозможности убывания энтропии изолированной системы. Этому закону может

быть дано статистическое истолкование с помощью формулы Больцмана:

$$S = k \ln P,$$

где S — энтропия системы, k — постоянная Больцмана, P — термодинамическая вероятность состояния.

2°. Термодинамической вероятностью (статистическим весом) состояния называют число различных микросостояний системы, соответствующих данному макросостоянию. Величина P для химически однородной системы показывает, сколькими способами может быть реализовано заданное количественное распределение частиц по ячейкам фазового пространства безотносительно к тому, в какой ячейке находится та или иная конкретная частица. Из определения P следует, что $P \gg 1$. Согласно формуле Больцмана термодинамическая вероятность состояния изолированной системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0,$$

где P_1 и P_2 — термодинамические вероятности двух последовательных состояний системы. В случае обратимого процесса $\Delta P = 0$, $P = \text{const}$. В случае необратимого процесса $\Delta P > 0$ и P возрастает. Необратимым является такой процесс, который переводит систему из менее вероятного состояния в более вероятное.

3°. Являясь статистическим законом, второй закон термодинамики выражает закономерности хаотического движения большого числа частиц, входящих в состав изолированной системы. В системах или их частях, состоящих из сравнительно небольшого числа частиц, наблюдаются значительные флуктуации, представляющие собой отклонения от второго закона термодинамики.

11. ФЛУКТУАЦИИ

1°. Флуктуацией физической величины L , характеризующей систему, называют случайное отклонение значения величины L от ее среднего значения $\langle L \rangle$, обусловленное хаотическим тепловым движе-

нием частиц системы. Простейшей мерой флуктуаций является средний квадрат разности $L - \langle L \rangle$, называемый *дисперсией* (средним квадратом флуктуации):

$$\Delta_L^2 = \langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle.$$

По определению

$$\begin{aligned} \langle (\Delta L)^2 \rangle &= \langle L^2 - 2L\langle L \rangle + \langle L \rangle^2 \rangle = \\ &= \langle L^2 \rangle - 2\langle L \rangle \langle L \rangle + \langle L \rangle^2 = \langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Эквивалентной мерой флуктуаций является средне-квадратичное отклонение Δ_L , равное корню квадратному из дисперсии: $\Delta_L = \sqrt{\Delta_L^2} = \sqrt{\langle (L - \langle L \rangle)^2 \rangle}$ или его относительная величина

$$\delta_L = \frac{\Delta_L}{\langle L \rangle}.$$

Если флуктуации величины L малы, то большие отклонения L от $\langle L \rangle$ маловероятны. Малость $\langle (\Delta L)^2 \rangle$ означает, что значение L близко к $\langle L \rangle$.

Дисперсия случайной величины L , равной сумме N независимых случайных величин $L_1, \dots, L_N$, равна сумме дисперсий этих величин:

$$\Delta_L^2 = \sum_{i=1}^N \Delta_{L_i}^2.$$

При этом для любых независимых величин L_i и L_j

$$\langle (L_i - \langle \Delta L_i \rangle)(L_j - \langle \Delta L_j \rangle) \rangle = 0.$$

2°. Относительная погрешность, вносимая заменой L ее средним значением $\langle L \rangle$, оценивается величиной *относительной флуктуации*:

$$\delta_L = \frac{\Delta_L}{\langle L \rangle}.$$

Если система состоит из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния L системы обратно пропорциональна квадратному корню из числа ее частей:

$$\delta_L \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3°. Если состояние макроскопической системы характеризуется некоторым параметром λ , то вероятность малых флуктуаций, в результате которых параметр λ может изменяться в интервале от λ до $\lambda + d\lambda$, выражается *распределением Гаусса*:

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_L} \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\Delta_L^2}\right) d\lambda,$$

где λ_0 — равновесное значение параметра λ , Δ_L^2 — дисперсия λ ; $\Delta_L^2 = \langle (\Delta\lambda)^2 \rangle = \langle (\lambda - \lambda_0)^2 \rangle$. Вероятность данной флуктуации экспоненциально уменьшается с ростом ее значения, а также с уменьшением Δ_L^2 .

4°. Количественной мерой вероятности малых флуктуаций $\Delta\lambda$ величины λ в макроскопической системе является работа ΔA , которую нужно совершить над системой для изменения параметра λ на величину $\Delta\lambda$. Флуктуации возможны, однако, и при условии отсутствия реальной внешней работы (например, в замкнутой системе). Величину ΔA можно представить как изменение потенциальной энергии системы при ее перемещении в некотором воображаемом (а иногда и реальном) силовом поле.

Примеры.

1. Изотермические малые флуктуации объема V и плотности ρ . Дисперсия объема:

$$\Delta_V^2 = \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle = \frac{kT}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right]},$$

где T — температура системы. Вероятность изотермических флуктуаций объема:

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_V} \exp\left[-\frac{(V - \langle V \rangle)^2}{2\Delta_V^2}\right] dV.$$

Масштаб и вероятность флуктуаций объема растут с повышением температуры, а также с увеличением изотермической сжимаемости $\beta = -\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v_0}{\partial p} \right)_T$, где v_0 — удельный объем. Изотермическая сжимаемость должна быть положительна. В противном случае вероятность флуктуации объема возрастала бы с ее масштабом, и в результате флуктуаций объем системы либо неограниченно возрастал, либо уменьшался до нуля.

Условие устойчивости состояний однородного вещества, испытывающего флуктуации объема:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T < 0.$$

В частности, для идеального газа

$$\Delta_V^2 = \frac{kT}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right]} = \frac{\langle V \rangle^2 kT}{NkT} = \frac{\langle V \rangle^2}{N}.$$

Дисперсия плотности $\rho = \frac{1}{v_0} = \frac{m}{V}$ (m — масса газа, заключенная в объеме V , в котором происходит флуктуация) имеет вид

$$\langle (\Delta \rho)^2 \rangle = \frac{\rho^2}{V} kT\beta.$$

Относительная флуктуация плотности в объеме V :

$$\delta_\rho = \sqrt{\frac{kT\beta}{V}}.$$

Дисперсия числа частиц N , находящихся в заданном объеме V :

$$\Delta_N^2 = \frac{N^2 kT}{V^2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \right].$$

В частности, для идеального газа

$$\Delta_N^2 = N.$$

2. Изохорические малые флуктуации температуры. Дисперсия температуры:

$$\Delta_T^2 = \langle (T - T_0)^2 \rangle = \frac{kT_0^2}{C_V},$$

где T_0 — равновесное значение температуры, C_V — теплоемкость системы при постоянном объеме. Вероятность того, что температура испытает флуктуацию:

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_T} \exp\left(-\frac{(T - T_0)^2}{2\Delta_T^2}\right) dT.$$

Величина $C_V > 0$, так как вероятность флуктуаций температуры уменьшается с возрастанием их значений. Это условие вытекает не только из теории флуктуаций, но и из общих соображений термодинамики: при $C_V < 0$ можно было бы нагревать тело, отбирая от него тепло, что противоречит второму началу термодинамики.

12. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

1°. Современные высокочувствительные приборы измеряют величины того же порядка, что и флуктуации, обусловленные тепловым движением молекул в приборе и окружающей среде. При однократном измерении некоторой физической величины, значения которой меньше, чем случайные отклонения показаний самого прибора, вызванные флуктуациями, прибор не дает правильного результата измерений. Прибор регистрирует в этом случае фон, являющийся результатом теплового движения, а не измеряемую величину. Этим определяется *предел чувствительности* данной конструкции прибора при однократном измерении.

2°. *Метод зеркального отсчета* (зеркальце, подвешенное на тонкой кварцевой нити). Предел чувствительности определяется тем, что наименьший угол поворота нити, который может быть измерен, должен превышать углы поворота φ , связанные со случайными колебаниями зеркальца, вызванными тепловым дви-

жением молекул среды. Средний квадратичный угол отклонения, характеризующий предел чувствительности для нити радиуса r и длины l :

$$\Delta_{\varphi}^2 = \frac{kT}{a},$$

где $a = \frac{\pi^2 r^4 G}{2l}$, G — модуль сдвига материала нити.

3°. *Пружинные весы.* Измерение массы m на пружинных весах возможно в том случае, если вызываемое ею растяжение пружины Δx больше, чем флуктуация длины пружины Δ_x , вызванная флуктуациями давления окружающего воздуха и тепловым движением:

$$\Delta_x = \sqrt{\frac{kT}{a}},$$

где a — коэффициент жесткости пружины.

Наименьшая масса m , которая может быть определена при однократном измерении, равна

$$m = \frac{\sqrt{kTa}}{g},$$

где g — ускорение свободного падения.

4°. Точность измерения температуры с помощью *газового термометра* ограничена флуктуациями температуры газа, заполняющего термометр. Малые изменения температуры идеального газа:

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{Nk} = \frac{T}{V} \Delta V.$$

Малые изменения объема вследствие его флуктуаций:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{kT}{\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}} = \frac{V}{\sqrt{N}}.$$

Флуктуационные изменения температуры:

$$\Delta_T = \frac{T}{\sqrt{N}}.$$

Погрешность измерения температуры газовым термометром не может быть меньше Δ_T . Реально измеряемые изменения температуры значительно превышают Δ_T .

13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В РАДИОАППАРАТУРЕ

1°. Независимые флуктуационные эффекты, наблюдаемые в приемной радиоаппаратуре в отсутствие внешних помех, создают *шумовой фон*, который определяет предел чувствительности приемной аппаратуры; интенсивность принимаемого сигнала должна быть выше, чем интенсивность фона в приемнике.

2°. В электрических цепях, электровакуумных и полупроводниковых приборах возникают флуктуации зарядов, токов и потенциалов, обусловленные тепловым движением носителей тока и их дискретной природой. В электровакуумных приборах наблюдается *дробовой шум*, связанный со случайным характером эмиссии электронов из катода. Дополнительный источник электрических флуктуаций в этих приборах — вторичная электронная эмиссия. Дробовой шум не зависит от частоты (белый шум) и описывается *формулой Шоттки*:

$$\Delta_I^2 = 2 e I \Delta \nu,$$

где Δ_I^2 — средний квадрат флуктуаций тока, e — элементарный заряд, I — сила тока в приборе, $\Delta \nu$ — полоса частот, в которой измеряется шум.

3°. Тепловое движение электронов внутри проводников сопровождается переносом заряда и появлением в цепи *флуктуационного напряжения и флуктуационного тока*, беспорядочно изменяющихся по модулю и направлению. Флуктуационное напряжение на концах однородного проводника сопротивлением R удовлетворяет *формуле Найквиста*:

$$\Delta_V^2 = 4 k T R \Delta \nu,$$

где Δ_V^2 — средний квадрат флуктуаций напряжения, T — температура проводника, k — постоянная Больцмана, $\Delta \nu$ — ширина полосы частот, в пределах которой измеряется Δ_V^2 .

14. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1°. Броуновским движением называют непрерывное хаотическое движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе. Броуновское движение продолжается неограниченно долго без каких-либо видимых изменений; интенсивность движения броуновских частиц зависит от их размеров, но не от природы частиц; интенсивность возрастает с ростом температуры и уменьшением вязкости жидкости или газа. Не являясь по существу молекулярным движением, броуновское движение служит непосредственным доказательством существования молекул и хаотического характера их теплового движения.

2°. Причиной броуновского движения являются флуктуации давления, оказываемого на поверхность малой частицы со стороны молекул среды. Сила давления изменяется по модулю и направлению, в результате чего частица находится в беспорядочном движении.

3°. Вероятность dw того, что броуновская частица, находившаяся в однородной и изотропной среде в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат, сместится к моменту времени $t > 0$ вдоль произвольно направленной оси Ox так, что ее координата будет лежать в интервале от x до $x + dx$, равна

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}\right) dx.$$

Среднее значение квадрата смещения частицы по оси Ox за время t находится по формуле Эйнштейна:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt,$$

где D — коэффициент диффузии броуновских частиц.

Для сферической частицы радиуса a

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a},$$

где T — температура среды, η — вязкость среды.

Между коэффициентом диффузии D броуновской частицы и ее подвижностью $u = \frac{v}{f}$ (v — скорость установившегося равномерного движения частицы в вязкой среде под действием постоянной силы f) существует зависимость:

$$D = kTu.$$

4°. Броуновская частица движется не только поступательно, но и вращается. Среднее значение квадрата угла поворота $\Delta\varphi$ броуновской частицы за время t равно

$$\Delta\varphi^2 = 2 D_{\text{вр}} t,$$

где $D_{\text{вр}}$ — коэффициент вращательной диффузии. Для сферической броуновской частицы радиуса a

$$D_{\text{вр}} = \frac{kT}{8\pi\eta a^3}.$$

Г л а в а 7

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ПАРЫ

1. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1°. *Реальным газом* называют газ, между молекулами которого существуют заметные силы межмолекулярного взаимодействия. *Паром* называют реальный газ, находящийся в состояниях, близких к состояниям перехода его в жидкость. Для описания свойств реальных газов применяют различные уравнения состояния, отличающиеся от уравнения Клапейрона — Менделеева.

2°. *Уравнение Ван-дер-Ваальса*, описывающее состояние реального газа ($V_0 = V_\mu$ — объем 1 моля газа):

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT,$$

где $\frac{a}{V_0^2}$ — внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами, b — поправка на соб-

ственный объем молекул, учитывающая действие сил отталкивания между молекулами и равная учетверенному объему молекул в 1 моле газа:

$$b = N_A \cdot \frac{2}{3} \pi d^3;$$

здесь N_A — постоянная Авогадро, d — диаметр молекулы. Величина a вычисляется по формуле

$$a = -2\pi N_A^2 \int_d^{\infty} W_{\Pi}(r) r^2 dr,$$

где $W_{\Pi}(r)$ — потенциальная энергия притяжения двух молекул ($W_{\Pi} < 0$). Величины a и b связаны с параметрами критического состояния газа p_k , V_{0k} , T_k :

$$b = \frac{1}{3} V_{0k}, \quad a = \frac{9}{8} RT_k V_{0k},$$

$$V_{0k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}.$$

3°. С помощью безразмерных переменных

$$\pi = \frac{p}{p_k}, \quad \varphi = \frac{V_0}{V_{0k}}, \quad \tau = \frac{T}{T_k},$$

называемых *приведенными параметрами состояния*, уравнение Ван-дер-Ваальса переписывают в форме *приведенного уравнения состояния*:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2} \right) (3\varphi - 1) = 8\tau,$$

не содержащего постоянных, характеризующих вещество.

Два вещества, состояния которых определяются одинаковыми значениями двух приведенных параметров, находятся в соответственных состояниях (*закон соответственных состояний*).

4°. Уравнение состояния Бертло:

$$\left(p + \frac{a}{TV_0^2} \right) (V_0 - b) = RT.$$

Постоянные a и b связаны с параметрами критического состояния p_k , V_{0k} и T_k соотношениями:

$$a = \frac{27}{64} R^2 \frac{T_k^3}{p_k}, \quad b = \frac{1}{4} V_{0k}.$$

5°. Уравнение состояния Вукаловича и Новикова:

$$pV_0 = RT \left[1 + \frac{B_1(T)}{V_0} + \frac{B_2(T)}{V_0^2} + \dots \right],$$

где B_1 , B_2 и т. д. — так называемые *вириальные коэф-фициенты* весьма сложного вида, вычисление которых производится с учетом ассоциации молекул — объединения под влиянием ван-дер-ваальсовых сил притяжения молекул газа в группу (комплексы).

6°. Уравнение состояния Майера:

$$pV_0 = RT \left[1 - \sum_{m \geq 1} \frac{m}{m+1} \frac{\beta_m N_A^m}{V_0^m} \right],$$

где

$$\beta_m = \frac{1}{m! V_0} \int \int \dots \int \sum \prod_{m+1 \geq i > j \geq 1} f_{ij} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{m+1},$$

$$f_{ij} = \exp\left(-\frac{W_{nij}}{kT}\right) - 1 \quad \text{и} \quad d\tau_l = dq_{l1} \dots dq_{ln},$$

W_{nij} — взаимная потенциальная энергия i -й и j -й молекул, взаимодействующих по закону центральных сил, так что W_{nij} зависит от расстояния между этими молекулами, $q_{l1}, \dots, q_{ln}$ — обобщенные координаты l -й молекулы, обладающей n степенями свободы.

Подынтегральное выражение в формуле для β_m содержит сумму произведений f_{ij} для всевозможных комбинаций взаимодействий в группе из $m+1$ молекул, причем суммируются все произведения, содержащие не менее двух одинаковых функций f_{ij} .

2. СИЛЫ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ГАЗАХ

1°. Между молекулами любого газа существуют *силы межмолекулярного притяжения и отталкивания*, имеющие электромагнитную и квантовую природу. Силы притяжения, проявляющиеся на расстояниях r между центрами молекул порядка 10^{-9} м, называются *ван-дер-ваальсовыми силами*. Они являются причиной поправки на внутреннее давление в уравнении состояния Ван-дер-Ваальса и убывают с расстоянием: $f \sim \frac{1}{r^7}$. Это соответствует потенциальной энергии, изменяющейся по закону $U \sim \frac{1}{r^6}$. Различают три вида ван-дер-ваальсовых сил.

1) *Ориентационные силы* между двумя молекулами, обладающими постоянными дипольными моментами p_e , стремятся расположить молекулы упорядоченно так, чтобы векторы дипольных моментов ориентировались вдоль одной прямой. Этому препятствует тепловое движение молекул. При высоких температурах потенциальная энергия $U_{ор}$ ориентационного взаимодействия

$$U_{ор} = - \frac{p_e^4}{24\pi^2 \epsilon_0^2 kT} \frac{1}{r^6}.$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура, ϵ_0 — электрическая постоянная, p_e — дипольный момент.

2) *Индукционные силы* возникают между молекулами, обладающими высокой поляризуемостью. Если молекулы достаточно сближены, то под действием электрического поля одной из них в другой возникает индуцированный дипольный момент $p_e = \epsilon_0 \alpha E$, где α — поляризуемость молекулы, E — напряженность поля первой молекулы. Потенциальная энергия $U_{инд}$ индукционного взаимодействия не зависит от температуры:

$$U_{инд} = - \frac{\alpha p_e^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{r^6}.$$

3) *Дисперсионные силы* возникают в результате возбуждения колебаний электронов в молекуле (атоме) под

влиянием колебаний электронов в другой молекуле (атоме). Колебания электронов соседних молекул происходят в одинаковой фазе и приводят к притяжению двух молекул (атомов). Дисперсионное взаимодействие определяется нулевой энергией молекул (атомов), если колебания их могут быть рассмотрены как колебания линейных гармонических осцилляторов. В этом приближении потенциальная энергия $U_{\text{дисп}}$ дисперсионного взаимодействия

$$U_{\text{дисп}} = - \frac{e^4 \hbar \nu_0}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 a^2} \frac{1}{r^6},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, e — элементарный заряд,

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{m}}$ — частота колебаний атомов-осцилляторов, a — коэффициент пропорциональности.

Полная потенциальная энергия U ван-дер-ваальсовых сил

$$U = U_{\text{ор}} + U_{\text{инд}} + U_{\text{дисп}}.$$

Для полярных молекул основную роль играют ориентационные силы притяжения, для остальных молекул — дисперсионные силы. Энергия ван-дер-ваальсова притяжения составляет 0,4—4 кДж/моль. В большинстве случаев ван-дер-ваальсовы силы притяжения перекрываются значительно превосходящими их химическими валентными силами притяжения с энергиями порядка 40—400 кДж/моль.

Согласно упрощенной модели ван-дер-ваальсовых сил, молекулы газа — абсолютно упругие шары — притягиваются с силами, достигающими наибольшего значения при непосредственном их соприкосновении. Силы отталкивания, проявляющиеся на меньших расстояниях, заменяются бесконечно большой упругой силой, возникающей при соприкосновении шаров. В этой модели при расстоянии r между молекулами, равном диаметру молекул, внутреннее давление в газе достигает максимума.

2°. Межмолекулярное взаимодействие на малых расстояниях не может быть выражено степенным законом и носит сложный характер. На расстояниях между центрами молекул $r \leq 10^{-10}$ м возникает квантовое обменное взаимодействие между нейтральными атомами, приводящее или к сильному притяжению (химическая связь), или к возникновению значительных сил отталкивания.

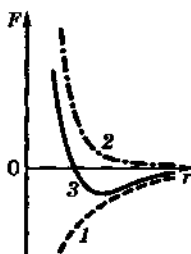


Рис. II.7.1

3°. Силы отталкивания убывают с увеличением расстояния между центрами молекул по закону $f_{\text{отт}} \sim \frac{1}{r^n}$,

где $n \geq 13$, т. е. значительно быстрее, чем силы притяжения. На рис. II.7.1 представлена зависимость от r сил притяжения (кривая 1), отталкивания (кривая 2) и результирующей силы взаимодействия (кривая 3). Область пространства, в которой существенно проявляются силы взаимодействия данной молекулы с дру-

гими частицами, называют *сферой ее молекулярного действия*.

3. ДРОССЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВ. ЭФФЕКТ ДЖОУЛЯ — ТОМСОНА

1°. *Дросселированием газа* называют уменьшение его давления при адиабатическом прохождении газа через узкое отверстие или пористую пробку. Процесс дросселирования необратим, он сопровождается возрастанием энтропии. Энтальпия газа в начальном и конечном его состояниях при дросселировании не изменяется.

2°. Изменение температуры газа при дросселировании называют *эффектом Джоуля—Томсона*. Дифференциальный эффект Джоуля—Томсона описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right]$$

и наблюдается при достаточно малом перепаде давления от p до $p + dp$. Различают:

отрицательный эффект Джоуля — Томсона

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V < 0, \quad dT > 0;$$

положительный эффект

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V > 0, \quad dT < 0.$$

Если $T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$, то $dT = 0$, т. е. эффект Джоуля—Томсона отсутствует. В идеальном газе эффект Джоуля—Томсона всегда отсутствует.

Температуру, при которой эффект Джоуля—Томсона для данного газа изменяет знак, называют *температурой инверсии* $T_{\text{инв}}$:

$$T_{\text{инв}} = V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p.$$

3°. *Интегральный эффект Джоуля—Томсона* наблюдается при конечном перепаде давления в дросселе. Уравнение эффекта:

$$\Delta T = -\frac{\Delta W_{\text{в}}}{C_V} - \frac{\Delta(pV)}{C_V},$$

где $\Delta W_{\text{в}}$ — изменение потенциальной энергии взаимодействия молекул газа.

4. ИЗОТЕРМЫ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ПАРЫ. КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

1°. *Изотермой реального газа* называется кривая зависимости молярного объема газа от давления при изотермическом процессе. На рис. П.7.2 приведены экспериментальные изотермы углекислого газа ($T_1 < T < T_2 < T_K < T_3 < T_4$).

2°. Любая докритическая изотерма ($T < T_K$) является кривой непрерывного перехода вещества из газообразного состояния в жидкое. При $T > T_K$ вещество находится в газообразном состоянии. Точка П

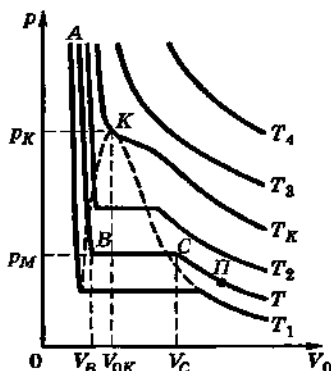


Рис. П.7.2

характеризует *перегретый пар*. Сжатие этого пара переводит его в точку C — состояние *сухого насыщенного пара*, находящегося в термодинамическом равновесии с жидкостью. Давление сухого насыщенного пара p_{κ} зависит только от температуры и химической природы пара. Оно возрастает с повышением температуры. Перегретый пар имеет температуру более высокую, чем температура насыщенного пара при том же давлении. Разность температур этих паров называют *перегревом пара*. Сжатие сухого насыщенного пара переводит его во *влажный насыщенный пар* — двухфазное состояние вещества — смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара. Количество сухого насыщенного пара в 1 кг влажного насыщенного пара называют *сухостью пара*. Количество жидкости в 1 кг влажного насыщенного пара называют *влажностью пара*. Сжатие влажного насыщенного пара переводит его в жидкость. Точка B характеризует состояние *кипящей жидкости*.

3°. Переход вещества из газообразного состояния в жидкое называют *конденсацией пара*. Для чистых паров, не соприкасающихся ни с жидкой фазой, ни с твердыми адсорбционно-активными веществами, условием конденсации насыщенного и даже *пересыщенного пара* (давление которого $p > p_{\kappa}$) является присутствие *центров конденсации* (газовых ионов, пылинок). Если центры конденсации отсутствуют, то конденсация пара начинается в местах уплотнений вещества, имеющих характер флуктуаций плотности.

4°. При критической температуре ($T = T_{\kappa}$) разность молярных объемов сухого насыщенного пара и жидкости становится равной нулю. Горизонтальный участок изотермы обращается в точку перегиба K (*критическая точка*). В критической точке

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T=T_{\kappa}} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{T=T_{\kappa}} = 0.$$

Значения давления p_{κ} , молярного объема $V_{0\kappa}$ и температуры T_{κ} в критической точке называют *критическими параметрами газа*. При $T \rightarrow T_{\kappa}$ стирается различие между жидким и газообразным состояниями веществ, обращаются в нуль удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения.

Вблизи критической точки наблюдается *критическая опалесценция* — сильное рассеяние света в веществе, вызванное его оптической неоднородностью, связанной с флуктуациями плотности и ростом сжимаемости.

5°. Изотермы реальных газов, построенные по уравнению Ван-дер-Ваальса, содержат в области влажного насыщенного пара петлю (петля *BDEFC* на рис. II.7.3), которая рассекается горизонтальной прямой *BC*, соответствующей нормальному процессу фазового перехода, на равные по площади участки (*правило Максвелла*). *Метастабильные состояния* вещества, определяемые точками кривой *BD*, называют *перегретой жидкостью*. Участок изотермы *CF* соответствует *пересыщенному пару*. Участок *FED* практически не существует.

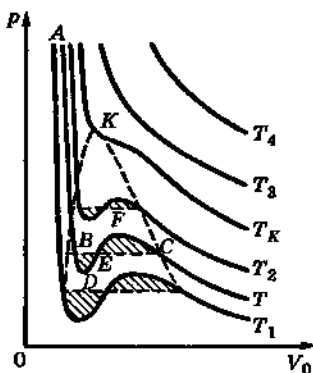


Рис. II.7.3

5. СЖИЖЕНИЕ ГАЗОВ

1°. *Сжижение газов* — перевод их в жидкое состояние — осуществляется охлаждением газов ниже температуры кипения при данном давлении. Уменьшением объема это достигается только в том случае, если температура газа ниже критической. Для сжижения газов с критической температурой выше 223 К (хлор, аммиак и др.) производится их сжатие в компрессоре с последующей конденсацией в теплообменнике.

2°. В *каскадном методе сжижения аммиака* ($T_k = -405,5$ К) переводится в жидкость изотермическим сжатием и при понижении давления кипит. Теплота кипения отнимается от другого газа, для которого удовлетворено условие: $405,5 \text{ К} > T_k > T'$, где T' — температура кипения аммиака. При этом происходит охлаждение второго газа до температуры ниже его T_k , и последующим изотермическим сжатием его переводят в жидкость. В третьем и следующих каскадах таким

способом могут быть сжижены кислород, азот, водород (в пятом каскаде) и гелий (в шестом каскаде).

3°. Промышленный метод сжижения газов основан на использовании положительного эффекта Джоуля — Томсона. В этом методе сильно сжатый и охлажденный до комнатной температуры газ подвергается несколько раз адиабатическому дросселированию и при этом охлаждается, пока не начинается сжижение газа.

4°. Наиболее совершенными и производительными холодильными машинами являются *детандеры* (поршневые и турбинные), в которых сжатый газ адиабатически расширяется либо в цилиндре с поршнем, либо в турбине. Охлаждение и сжижение газа происходят за счет работы расширения.

Глава 8

ЖИДКОСТИ

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

1°. *Жидкостями* называют тела, которые имеют определенный объем, но не имеют *упругости формы* (отсутствие модуля сдвига). Жидкости отличаются сильным межмолекулярным взаимодействием и вследствие этого малой сжимаемостью. Малая сжимаемость жидкостей объясняется тем, что небольшое уменьшение расстояния между молекулами на малых взаимных расстояниях приводит к появлению больших сил межмолекулярного отталкивания. Коэффициент сжимаемости для жидкостей изменяется в пределах от $2 \cdot 10^{-11}$ до $2 \cdot 10^{-9}$ Па⁻¹.

2°. Обычные жидкости изотропны, за исключением жидких кристаллов, анизотропность которых в отношении ряда физических свойств связана с преобладанием у них в различных микрообъемах определенной ориентации молекул.

3°. В жидкостях наблюдается *ближний порядок* — упорядоченное относительное расположение (или взаимная ориентация в жидких кристаллах) соседних частиц жидкости внутри малых ее объемов. Структура жидкости и ее физические свойства описывают набор

функций распределения положений групп ее частиц. Наибольшее значение имеет *радиальная функция распределения* $G(r)$. Число частиц, находящихся в шаровом слое толщины dr на расстоянии r от произвольно выбранной (центральной) частицы,

$$dN = 4\pi n_0 G(r) r^2 dr,$$

где $n_0 = \frac{N}{V}$ — средняя концентрация частиц.

Радиальную функцию распределения определяют из данных рентгеноструктурного анализа, а также электронографии и нейтронографии.

Для *простых жидкостей*, состоящих из сферических симметричных молекул, в предположении, что взаимодействие между молекулами носит парный характер и осуществляется центральными силами, имеющими потенциал $U(r)$, может быть получено уравнение состояния вида

$$\frac{pv}{kT} = 1 - \frac{2\pi}{3vkT} \int_0^{\infty} \frac{dU(r)}{dr} G(r) r^3 dr,$$

где p — давление, v — средний объем, приходящийся на одну частицу жидкости, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура.

Средняя энергия $\langle E \rangle$, приходящаяся на одну частицу,

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT + \frac{2\pi}{v} \int_0^{\infty} U(r) G(r) r^2 dr.$$

Явный вид функции $p = p(v, T)$ определяется видом функций $U(r)$ и $G(r)$.

4°. Молекулы жидкости совершают тепловые колебания около положений равновесия со средней частотой $1/\tau_0$, близкой к частотам колебаний атомов в кристаллах, и амплитудой, определяемой «свободным объемом», предоставленным молекуле ее соседями. По истечении времени $\tau \gg \tau_0$ эти положения равновесия смещаются на расстояния порядка 10^{-10} м. Среднее (по совокупности большого числа молекул) время $\langle \tau \rangle$, называемое *временем релаксации*, является характерным

временем, связанным с перемещением частиц жидкости на расстояния δ , по порядку величины равные среднему расстоянию между соседними молекулами:

$$\langle \delta \rangle \sim \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}},$$

где μ — молярная масса, ρ — плотность жидкости, N_A — постоянная Авогадро. Для воды $\langle \delta \rangle \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Эти перемещения совершаются не непрерывно, а в виде активированных скачков с преодолением потенциального барьера высотой W (энергия активации). Энергия W обусловлена связью молекулы с соседними частицами. Продолжительность $\langle \tau \rangle$ «времени оседлой жизни» молекулы во временном положении равновесия уменьшается с ростом температуры по закону

$$\langle \tau \rangle \sim e^{W/(kT)},$$

где k — постоянная Больцмана.

Время $\langle \tau \rangle$ связано со средней скоростью $\langle v \rangle$ теплового перемещения молекул в жидкости:

$$\langle v \rangle = \frac{\langle \delta \rangle}{\langle \tau \rangle}.$$

5°. Представления о характере теплового движения молекул жидкости объясняют основное свойство жидкости — ее текучесть. Постоянная внешняя сила F , действующая на жидкость, приводит к преимущественной направленности скачков частиц жидкости вдоль направления действия силы. Следствием этого является поток частиц вдоль направления действия силы, т. е. текучесть. Мерой текучести жидкости служит величина $\frac{1}{\eta}$, где η — коэффициент вязкости. Если

внешняя сила F переменна, но ее период $T \gg \langle \tau \rangle$, то по-прежнему имеет место Поток частиц жидкости, и ее текучесть. Если $T \ll \langle \tau \rangle$, то механизм текучести не успевает проявиться, и жидкость испытывает упругие деформации не только типа растяжения — сжатия, но и сдвиговые деформации, связанные с касательными напряжениями в жидкости.

6°. Целый ряд фактов свидетельствует о сходстве жидкостей с твердыми телами. Рентгеноструктурный анализ показывает, что расположение частиц в жидкостях при температурах, близких к температуре кристаллизации, не является хаотическим. Рентгенограммы жидкостей при невысоких температурах сходны с рентгенограммами поликристаллических твердых тел. Жидкость можно рассматривать как тело, состоящее из очень большого числа беспорядочно ориентированных кристалликов субмикроскопических размеров (*сиботаксические области*). В пределах каждой из таких областей относительное расположение частиц сохраняет достаточную правильность.

7°. Многие физические свойства жидкостей мало отличаются от свойств твердых тел. Так, кристаллические тела обладают малой текучестью, проявляющейся в их пластической деформации. При плавлении твердых тел относительное увеличение их объема $\approx 10\%$. Следовательно, расстояния между частицами возникающей жидкости почти не меняются по сравнению с расстояниями между частицами в твердом теле, и в расположении частиц жидкости сохраняется некоторое сходство с расположением частиц в твердом теле. Сравнение теплот плавления и испарения показывает, что теплота испарения в 30—40 раз больше теплоты плавления. Это также свидетельствует о малости изменений расстояний между частицами вещества при его переходе из кристаллического состояния в жидкое. Теплоемкость тел почти не изменяется при их плавлении.

8°. Жидкости разделяют на *неассоциированные* и *ассоциированные*. Первые имеют малые значения относительной диэлектрической проницаемости ϵ , не зависящие от температуры; дипольные моменты их молекул равны нулю (гексан, бензол и др.). Вторые обладают большой полярностью, их молекулы имеют $\neq 0$, а ϵ зависит от температуры (вода, спирты и др.). В ассоциированных жидкостях образуются комплексы из значительного числа молекул. Значение ϵ для жидкостей изменяется от 2 (неполярные углеводороды) до 81 (вода).

9°. В жидкостях в случае нарушения пространственной однородности плотности, температуры или скорости упорядоченного движения возникают явления перелоса, подчиняющиеся тем же дифференциальным

уравнениям, что и соответствующие явления в газах. Однако выражения коэффициентов переноса для газов неприменимы к жидкостям.

При высоких температурах, близких к критической, возникновение внутреннего трения в жидкостях связано с переносом молекулами импульсов. При температурах, близких к температуре плавления (затвердевания), импульс отдельной молекулы колеблется соответственно колебаниям частиц около их временного положения равновесия. При низких температурах вязкость жидкостей изменяется по закону

$$\eta \sim T e^{W/(kT)},$$

где W — энергия активации. Вязкость η быстро уменьшается с ростом T , в то время как для газов она растет пропорционально $\sqrt{T}$. При больших давлениях вязкость жидкостей быстро возрастает с увеличением давления. Это связано с возрастанием энергии активации и соответствующим увеличением времени релаксации.

10°. В химически однородной жидкости коэффициент диффузии D резко возрастает с температурой по закону

$$D \sim \frac{d^2}{6\langle\tau_0\rangle} e^{-W/(kT)},$$

где d — среднее расстояние между молекулами в жидкости, $\langle\tau_0\rangle$ — средний период колебаний молекулы около положения равновесия. Возрастание D с ростом T объясняется, в основном, резким уменьшением времени релаксации $\langle\tau\rangle$ и некоторым увеличением d . При температурах, близких к критическим, коэффициенты диффузии в жидкостях становятся близкими к значениям коэффициентов диффузии в газах.

2. СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

1°. На поверхности раздела двух фаз (жидкость и ее насыщенный пар, две не вполне смешивающиеся жидкости, жидкость и твердое тело) в результате различного межмолекулярного взаимодействия в соприкасаю-

щихся фазах обнаруживается направленная внутрь одной из них равнодействующая сил, приложенных к 1 м^2 поверхностного слоя. В частности, на поверхности раздела жидкость—пар эта сила направлена внутрь жидкости.

2°. Для перенесения молекул из объема фазы в поверхностный слой необходимо совершить работу, которая идет на увеличение *поверхностной энергии* — создание избытка энергии частиц в поверхностном слое по сравнению с их энергией внутри остального объема фазы.

Для изотермического увеличения поверхностного слоя жидкости за счет молекул, находящихся в ее объеме, требуется совершить работу, идущую на увеличение *свободной поверхностной энергии* жидкости:

$$A = \langle F_S - F_V \rangle N,$$

где $\langle F_S - F_V \rangle$ — средняя разность свободной энергии на поверхности F_S и в объеме F_V (на одну молекулу), N — число молекул в поверхностном слое жидкости.

3°. Работу изотермического образования 1 м^2 поверхности (удельная свободная поверхностная энергия) называют *поверхностным натяжением* σ данной жидкости на границе с другой фазой:

$$\sigma = \frac{A}{S} = \langle F_S - F_V \rangle \frac{N}{S} = \langle F_S - F_V \rangle n_1,$$

где $n_1 = \frac{N}{S}$ — поверхностная концентрация молекул.

Поверхностное натяжение выражается также формулой

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

где ΔF — изменение свободной поверхностной энергии, ΔS — изменение площади поверхностного слоя. На границе жидкости с собственным паром при комнатных температурах σ изменяется в пределах от $1,5 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$ (угле-

водороды) до $200 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$ (расплавленные металлы). С повышением температуры и приближением ее к критической стираются различия между жидкостью и ее насыщенным паром. Вблизи критической температуры, при $T \rightarrow T_k$, $\sigma \rightarrow 0$. Вдали от T_k значение σ линейно убывает с ростом температуры. Снижение поверхностного натяжения достигается введением в жидкость примесей *поверхностно-активных веществ*, адсорбирующихся на поверхностях раздела и уменьшающих свободную поверхностную энергию (мыла, жирные кислоты).

4°. Если поверхность жидкости ограничена периметром смачивания, то величина σ равна силе, действующей на единицу длины периметра смачивания и направленной нормально к ней. Эта сила лежит в плоскости, касательной к свободной поверхности жидкости.

5°. Условием устойчивого равновесия жидкостей является минимум свободной поверхностной энергии. В отсутствие внешних сил жидкость имеет минимальную площадь поверхности (при заданном объеме) и принимает сферическую форму.

3. СМАЧИВАНИЕ. КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

1°. На границе соприкосновения трех фаз (1 — жидкость, 2 — газ, 3 — твердое тело) наблюдаются явления, называемые *смачиванием* (рис. II.8.1).

Свободная поверхность жидкости около твердой поверхности искривлена и называется *мениском*. Линия,

по которой мениск пересекается с твердым телом, называется *периметром смачивания*. Явления смачивания характеризуют *краевым углом* θ между смоченной поверхностью твердого тела и мениском в точках их пересечения (периметра смачивания).

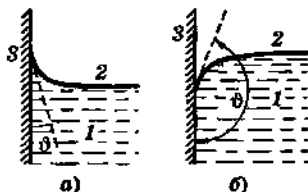


Рис. II.8.1

2°. Мерой смачивания считают величину θ , определяемую по уравнению

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}},$$

где σ_{ij} — поверхностные натяжения на трех поверхностях раздела. Если $\sigma_{23} > \sigma_{13}$, то $\theta < \pi/2$; жидкость имеет вогнутый мениск и смачивает твердое тело (рис. 11.8.1, а), поверхность которого называется *гидрофильной* (карбонаты, силикаты, сульфаты, кварц). Если $\sigma_{23} < \sigma_{13}$, то $\theta > \pi/2$; жидкость имеет выпуклый мениск и не смачивает твердого тела (рис. 11.8.1, б), поверхность которого называют *гидрофобной* (чистые металлы, сульфиды, графит). Если $\sigma_{23} - \sigma_{13} \rightarrow \sigma_{12}$, то $\theta \rightarrow 0$, т. е. мениск касателен к поверхности тела (*идеальное смачивание*). Межмолекулярные силы, действующие на частицу поверхностного слоя, в этом случае полностью компенсированы, и свободная поверхностная энергия этого слоя имеет минимальное значение. Если $\sigma_{23} \rightarrow \sigma_{13}$, то $\theta \rightarrow \pi/2$; жидкость имеет плоскую свободную поверхность. Этот случай называют *отсутствием смачивания и несмачивания*.

3°. Искривление поверхностного слоя приводит к появлению дополнительного давления на жидкость, зависящего от поверхностного натяжения σ и кривизны поверхности. По *закону Лапласа* при средней кривизне поверхности

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

определяемой главными радиусами кривизны R_1 и R_2 , давление под искривленной поверхностью жидкости равно

$$P = P_0 + P_R,$$

где P_0 — давление при плоской поверхности жидкости, $P_R = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\sigma H$ — дополнительное давление, зависящее от кривизны; $P_R > 0$, если мениск выпуклый,

$p_R < 0$, если мениск вогнутый. Если мениск имеет форму цилиндрической поверхности, то $R_1 = R$, $R_2 = \infty$ и

$$p_R = \frac{\sigma}{R}.$$

Для сферической поверхности ($R_1 = R_2 = R$)

$$p_R = \frac{2\sigma}{R}.$$

Дополнительное давление внутри пузыря радиуса R вызывается обеими поверхностями пленки: $p_R = \frac{4\sigma}{R}$.

4°. В узких цилиндрических сосудах (капиллярах) радиуса r уровень смачивающей (несмачивающей) жидкости выше (ниже), чем в сообщающемся с ними широком сосуде, на величину

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r\rho g}$$

(формула Жюрена), где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, θ — краевой угол.

Если капилляр имеет форму узкой щели с постоянной толщиной δ , то мениск жидкости представляет собой цилиндрическую поверхность радиуса $\delta/2$ и высота поднятия (смачивающей) или опускания (несмачивающей) жидкости в капилляре равна

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\delta\rho g}.$$

5°. Давление насыщенного пара над искривленной поверхностью жидкости зависит от формы ее мениска. В случае вогнутой (выпуклой) поверхности оно меньше (больше), чем над плоской поверхностью, на величину

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} p_R,$$

где ρ — плотность насыщенного пара, ρ_1 — плотность жидкости, p_R — дополнительное давление, связанное с кривизной поверхности.

4. ИСПАРЕНИЕ И КИПЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

1°. *Испарением* называют процесс парообразования, происходящий со свободной поверхности жидкости. Испарение происходит при любой температуре и увеличивается при ее повышении. Испарение объясняется вылетом из поверхностного слоя жидкости молекул, обладающих наибольшими скоростью и кинетической энергией, так что в результате испарения жидкость охлаждается. Скорость испарения зависит от внешнего давления и движения газообразной фазы над свободной поверхностью жидкости.

2°. *Кипением* называют процесс интенсивного испарения жидкости не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара. Давление p внутри пузырька определяют по формуле

$$p = p_0 + \rho gh + p_R,$$

где p_0 — внешнее давление, ρgh — гидростатическое давление вышележащих слоев жидкости, $p_R = 2\sigma/r$ — дополнительное давление, связанное с кривизной, r — радиус пузырька пара, h — расстояние от его центра до поверхности жидкости, ρ и σ — плотность и поверхностное натяжение жидкости.

3°. Кипение жидкости начинается при такой температуре, когда

$$p_{\pi} \geq p_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r},$$

где p_{π} — упругость (давление) насыщенного пара внутри пузырька.

При малых r давление p_{π} достаточно велико, и кипение жидкостей происходит при сравнительно высоких температурах. Если в жидкости имеются центры парообразования (пылинки, пузырьки растворенных газов и пара), то обычно $p_R \ll p_0$, и кипение начинается при меньших температурах. Если $\rho gh \ll p_0$, то приближенное условие кипения имеет вид

$$p_{\pi} \approx p_0.$$

Температуру жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению, называют *температурой* или *точкой кипения*.

4°. Если кипение жидкости происходит при постоянном давлении p_0 , то ее температура остается постоянной. Теплота, подводимая к жидкости, расходуется только на парообразование. Теплоту r_k , необходимую для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называют *удельной теплотой парообразования* (*скрытой теплотой кипения*).

Изменение внутренней энергии жидкости при переходе единицы ее массы в пар при температуре кипения называют *внутренней удельной теплотой парообразования*. Удельная теплота парообразования уменьшается при повышении температуры кипения и обращается в нуль при критической температуре.

5°. Кипение жидкости и конденсация пара являются примерами фазовых переходов первого рода. Удельные теплоты фазовых переходов для процессов парообразования и плавления определяются из уравнения Клапейрона—Клаузиуса. Для кипения жидкости оно имеет вид

$$r_k = (v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}) T \frac{dp}{dT},$$

где $v_{\text{ж}}$ и $v_{\text{п}}$ — удельные объемы жидкости и пара при температуре кипения T . Зависимость температуры кипения от давления определяют из уравнения

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v_{\text{п}} - v_{\text{ж}}}{r_k} T.$$



Рис. II.8.2

Поскольку $v_{\text{п}} > v_{\text{ж}}$ и $r_k > 0$, то $\frac{dT}{dp} > 0$. На рис. II.8.2 представлена кривая фазового равновесия процесса парообразования. Она заканчивается в критической точке K.

Температура кипения возрастает при увеличении давления.

5. СВОЙСТВА РАЗБАВЛЕННЫХ РАСТВОРОВ

1°. Под *разбавленным раствором* понимают такую смесь нескольких веществ, в которой одно из веществ является преобладающим, а остальные являются малыми к нему примесями. Основное вещество называют *растворителем*, остальные — *растворенными веществами*. Раствор может находиться в твердом состоянии (*твердые растворы*), жидком (*истинные растворы*, водные и неводные) и газообразном (*газовые смеси*).

Если растворяющееся вещество дробится на отдельные молекулы (*молекулярная дисперсность* вещества), то образуется *молекулярный истинный раствор*. В случае *истинных ионных растворов* происходит распад растворенного вещества на ионы. Кроме того, существуют *коллоидные растворы*, представляющие собой взвешенные в растворителе частицы вещества.

2°. Количество растворенного вещества характеризуется его *концентрацией*.

Такие растворы, в которых молекулы растворенного вещества полностью диссоциируют на ионы в сильно ассоциированных растворителях, называют *растворами сильных электролитов*. Образовавшиеся ионы взаимодействуют с молекулами растворителя (*явление гидратации*).

3°. В разбавленных растворах наблюдается хаотическое движение молекул растворенного вещества, аналогичное движению молекул газа. Однако для растворенных молекул несправедливы максвелловское распределение скоростей, закон распределения свободных пробегов и другие газокинетические закономерности.

4°. Экспериментальным методом изучения свойств истинных растворов являются наблюдения над *явлением осмоса* — проникновением растворителя в раствор через пористую перегородку (*мембрану*), непроницаемую для растворенного вещества и отделяющую раствор от чистой жидкости. Через мембрану осуществляется обмен молекулами растворителя, находящимися по обе ее стороны. В результате преимущественного движения молекул растворителя в сторону раствора равновесие в системе растворитель — мембрана — раствор поддерживается с помощью *осмотического дав-*

ления, производимого растворенным веществом в растворе. Осмотическое давление $P_{\text{осм}}$ вычисляют по уравнению Вант-Гоффа:

$$P_{\text{осм}} = \frac{n}{V} RT,$$

где n — число молей растворенного вещества в объеме V раствора, R — универсальная газовая постоянная, T — термодинамическая температура.

Аналогия между уравнениями Вант-Гоффа и Клапейрона — Менделеева является причиной ошибочного толкования осмотического давления как результата ударов молекул раствора о стенки сосуда.

5°. Равновесная концентрация слабого раствора, возникающего при растворении в жидкости или твердом теле газа, пропорциональна давлению газа и не зависит от природы газа и конденсированной фазы (закон растворимости Генри). Это утверждение справедливо при отсутствии хемосорбции (химической сорбции) — химического взаимодействия между газом и твердым растворителем, сопровождающегося образованием химических соединений.

6°. Давление насыщенного пара над разбавленным раствором меньше, чем над чистой жидкостью. Относительное понижение давления пара пропорционально концентрации раствора и не зависит от химической природы растворенного вещества (закон Рауля).

7°. Введение в растворитель молекул растворенного вещества повышает температуру кипения и снижает температуру отвердевания растворов на величину, пропорциональную концентрации раствора и не зависящую от химической природы растворенного вещества (закон Рауля).

6. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ

1°. При сверхнизких температурах у гелия наблюдается совокупность особых свойств:

а) отсутствует тройная точка;

б) при давлениях $p < 24 \cdot 10^5$ Па гелий не кристаллизуется при охлаждении до сколь угодно низких температур;

в) для изотопа ^4He критические параметры составляют: $T_k = 5,19 \text{ К}$, $p_k = 2,27 \cdot 10^5 \text{ Па}$. При нормальном давлении ^4He сжижается при $T = 4,2 \text{ К}$, причем плотность жидкого гелия аномально мала.

2°. При понижении температуры до $T = 2,2 \text{ К}$ и нормальном давлении в ^4He происходит λ -переход, являющийся фазовым переходом второго рода: жидкий гелий I переходит в гелий II. При повышении давления температура λ -перехода понижается.

3°. *Сверхтекучестью* называется обнаруженное у жидкого гелия II явление практически полного отсутствия вязкости при течении его сквозь очень узкие капиллярные трубки (радиусом $r \approx 10^{-7} \text{ м}$).

4°. Согласно *двухжидкостной модели* жидкий гелий с массой m при $T < 2,2 \text{ К}$ представляет собой смесь двух полностью взаимопроникающих без трения компонентов: нормального (с массой m_n) и сверхтекучего (с массой $m_s = m - m_n$). Это соответствует двум типам движений, одновременно существующих в гелии II. Первое из них соответствует течению жидкости, в которой возбуждено тепловое движение, рассматриваемое как совокупность «элементарных тепловых возбуждений» с энергиями $h\nu_i$, где h — постоянная Планка, ν_i — частоты соответствующих этим возбуждениям фононов. Это течение называется нормальным, оно подобно движению обычной вязкой жидкости. С ним связаны внутренняя энергия гелия II и наличие внутреннего трения (вязкости). Второй тип движения соответствует течению жидкости, в которой отсутствуют тепловое возбуждение, внутренняя энергия и вязкость. Из детального рассмотрения механизма возникновения «элементарных тепловых возбуждений» в гелии II, основанного на законах сохранения энергии и импульса, следует возможность таких состояний гелия II, в которых не возникают элементарные возбуждения. В этих состояниях частицы гелия II образуют связанный коллектив (*конденсат*) сильно взаимодействующих частиц. Таким состояниям соответствует сверхтекучая часть гелия II.

При $T = 0$ «элементарные возбуждения» отсутствуют, и весь гелий II является сверхтекучим. С ростом T увеличивается доля нормальной части гелия II. При

$T = 2,2$ К происходит непрерывный переход от гелия II к гелию I (фазовый переход первого рода).

5°. В гелии II обнаруживается аномально высокая теплопроводность, в сотни раз превосходящая теплопроводность металлов при комнатных температурах. Поэтому в гелии II не создается заметного перепада температур, он не может кипеть, а лишь испаряется со свободной поверхности. Высокая теплопроводность гелия II обуславливается интенсивными конвективными токами, которые возникают в неравномерно нагретом жидком гелии вследствие повышения доли его нормального компонента вблизи нагревателя. При стационарной теплопроводности в гелии II одновременно существуют два противоположных по направлению движения жидкости: нормальное — от нагревателя к холодильнику и сверхтекучее — от холодильника к нагревателю. Перенос энергии в форме теплоты осуществляется в нормальном движении. За счет сверхтекучего движения к нагревателю доставляются новые порции жидкости, способные прийти в нормальное движение. При этом не происходит макроскопического переноса массы, ибо оба движения компенсируют друг друга.

6°. При перетекании гелия II через узкий капилляр между двумя сосудами температура в сосуде, откуда гелий II вытекает (втекает), повышается (понижается). Это явление, называемое *механокалорическим эффектом*, объясняется тем, что вытекающий из сосуда сверхтекучий компонент гелия II не обладает внутренней энергией и, следовательно, не уносит ее. Поэтому удельная внутренняя энергия и соответствующая ей температура оставшейся в сосуде жидкости повышаются.

Глава 9

КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И СТРОЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. *Твердыми телами* называют тела, отличающиеся постоянством формы и объема. Твердые тела подразделяются на кристаллические и аморфные.

2°. *Кристаллы* — твердые тела, имеющие правильное периодическое расположение составляющих их частиц (*дальний порядок, кристаллическая решетка*). Кристаллы ограничены плоскими, упорядоченно расположенными друг относительно друга гранями, сходящимися в ребрах и вершинах. При температурах ниже точки кристаллизации кристаллическое состояние является устойчивым состоянием всех твердых тел.

Монокристаллы имеют форму правильных многогранников, обусловленную их химическим составом. Большинство твердых тел — *поликристаллов* — имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из большого числа сросшихся мелких, хаотически расположенных кристаллов (*кристаллических зерен, кристаллитов*).

3°. Кристаллы имеют *симметрию*, состоящую в том, что любому заданному направлению в кристалле соответствует одно или несколько направлений, которые в отношении рассматриваемых свойств являются совершенно одинаковыми. Симметрия кристаллов исследуется с помощью *симметрических преобразований (операций совмещения)*, в результате применения которых кристалл совпадает сам с собой в различных положениях. Простейшие операции совмещения (*поворот, отражение, трансляция* — параллельное смещение) связаны с *элементами симметрии*. Простейшими элементами симметрии являются *оси и плоскости симметрии*. Группу симметрических преобразований, состоящую обычно из комбинации поворотов, отражений и поворотов с отражением, называют *классом симметрии*.

4°. По характеру сил взаимодействий, типу связи и тому, какие частицы расположены в узлах кристаллической решетки, различают следующие типы твердых тел.

1) *Металлы* (Na, Fe и др.). При сближении атомов, находящихся в начале каждого периода *периодической системы Менделеева*, валентные электроны покидают свои атомы и становятся обобществленными (коллективизированными), образуя электронный газ в металлах. При этом возникает однородное распределение электронной плотности по всей решетке. Лишь вблизи узлов кристаллической решетки плотность электронов

возрастает за счет внутренних электронных оболочек атомов. *Металлическая связь* в решетке возникает между положительными ионами и электронным газом и является специфическим типом химической связи, поскольку условия, необходимые для образования ионной (гетерополярной) или атомной (гомеополярной) связи, у атомов металла отсутствуют. Коллективизированные электроны металлов «стягивают», главным образом электростатическими силами, положительные ионы, уравнивая отталкивание между ионами. При уменьшении расстояния между атомами в решетке растут электронная плотность и силы, стягивающие ионы, а также силы отталкивания между ионами. При определенных расстояниях (*периоде решетки*) эти силы уравниваются друг друга, и возникает устойчивая металлическая решетка кристалла. Потенциальная энергия взаимодействия металлической связи составляет сотни кДж/моль (например, 110 кДж/моль у натрия и 390 кДж/моль у железа). Металлы отличаются высокой тепло- и электропроводностью.

2) *Ионные кристаллы* (NaCl, LiF, оксиды металлов, сульфиды, карбиды, селениды и др.) характеризуются ионной (гетерополярной) связью между правильно чередующимися в узлах кристаллической решетки положительными и отрицательными ионами. Потенциальная энергия связи составляет ~ 1 МДж/моль (например, 0,75 МДж/моль у LiF). Характерные свойства ионных кристаллов: высокие точки плавления и большие теплоты сублимации, сильное поглощение в инфракрасной области, малые электропроводность и теплопроводность при низких температурах. При высоких температурах обнаруживается значительная ионная проводимость.

3) *Валентные (атомные) кристаллы* (C, Ge, Te и др.) характерны для кристаллических решеток полупроводников, многих органических твердых тел. Наблюдаются также у некоторых металлов и интерметаллических соединений. Химическая связь между нейтральными атомами — гомеополярная связь — обусловлена квантовомеханическим взаимодействием. Потенциальная энергия связи составляет сотни кДж/моль (например, энергия связи у алмаза 710 кДж/моль). Основные свойства валентных кристаллов: высокие температуры плавления и теплоты сублимации, высокая

механическая прочность (твердость), малая электропроводность в чистых образцах.

4) *Молекулярные кристаллы* (Ag, CH_4 , парафин, многие твердые органические соединения). В узлах кристаллических решеток находятся молекулы, и связь между ними осуществляется силами Ван-дер-Ваальса, главным образом дисперсионными. Потенциальная энергия связи составляет ~ 10 кДж/моль (например, 7,5 кДж/моль у Ag, 10 кДж/моль у CH_4). Основные свойства: низкие точки плавления и кипения, *плотная упаковка молекулярных кристаллов*. Инертные газы, превращаясь в твердое тело, образуют плотноупакованную кубическую структуру.

5) *Кристаллы с водородными связями* (лед, HF и др.). Атом водорода, обладающий одной ковалентной (атомной) связью, в некоторых случаях связывается силами притяжения с двумя атомами, образуя *водородную связь* с потенциальной энергией связи ~ 20 кДж/моль. Образование связи происходит так, что атом водорода отдает свой электрон одному из атомов молекулы, а получившийся ион водорода (*протон*) в основном за счет ионного взаимодействия образует водородную связь. При этом атомы сильно сближены, и протон не может обеспечить связь более чем двух атомов. Подобная связь действует между молекулами воды и вместе с притяжением дипольных моментов молекул H_2O обеспечивает особые свойства воды и льда вблизи 4°C . Водородная связь осуществляется между белковыми молекулами, обеспечивая их специфическую геометрию, и играет большую роль в процессе полимеризации — образовании групп однотипных молекул.

5°. Между кристаллическим строением твердых тел и их химическим составом существуют связи, исследуемые в *кристаллохимии*. Всякое химически индивидуальное вещество характеризуется определенными элементами симметрии кристаллов. Важнейшими положениями кристаллохимии являются: а) сходство формы кристаллов у веществ с аналогичным химическим составом (*изоморфизм*); б) возможность существования нескольких кристаллических форм для твердых тел одного химического состава, каждая из которых устойчива в различных условиях (*полиморфизм*). Для развития кристаллохимии и всего учения о кристалли-

ческих твердых телах большую роль играет рентгеноструктурный анализ. С его помощью установлено, что каждый структурный элемент кристалла (атом, ион) имеет практически непроницаемую «сферу действия», и расстояния между атомами в кристаллах являются суммами радиусов их сфер действия. Так, структура ионных кристаллов существенно зависит от соотношения ионных радиусов.

6°. Тепловое движение связанных частиц твердых тел состоит в колебаниях частиц относительно узлов кристаллической решетки. В результате совместного действия сил притяжения и отталкивания между частицами, а также отсутствия полной периодичности в реальных кристаллах эти колебания не являются гармоническими (*ангармонические колебания*).

Гармоническим колебаниям соответствует квадратичная зависимость потенциальной энергии взаимодействия частиц $U(q)$ от смещения q частиц из положения равновесия. Ангармоничность колебаний учитывается следующими после квадратичного членами разложения в ряд $U(q)$ по степеням q . В первом приближении ангармоничность учитывается удержанием кубического члена в разложении потенциальной энергии взаимодействия частиц по степеням q :

$$U(q) = U_0 + \beta_0 \frac{q^2}{2} - \frac{bq^3}{3},$$

где U_0 — значение U при $q = 0$, β_0 — коэффициент квазиупругой силы.

2. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. С повышением температуры происходит расширение твердых тел, называемое *тепловым расширением*. Различают *линейное* и *объемное тепловые расширения*, характеризующиеся средними коэффициентами линейного α_l и объемного α_v расширений в данном интервале температур.

2°. Если l_0 — первоначальная длина тела, а Δl — удлинение этого тела при нагревании на ΔT , то α_l в этом интервале температур определяется по формуле

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta T}.$$

Величина α_l характеризует *относительное удлинение* $\Delta l/l_0$, происходящее при нагревании тела на 1 К. Длина нагретого тела равна

$$l_0 = l_0 (1 + \alpha_l \Delta T).$$

Значение α_l зависит от материала и для большинства тел имеет порядок значений $10^{-5} - 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Наблюдается также слабая зависимость α_l от температуры.

3°. Объем твердого тела V при нагревании возрастает в первом приближении пропорционально первой степени приращения температуры:

$$V = V_0 (1 + \alpha_V \Delta T),$$

где V_0 — первоначальный объем тела, α_V — средний коэффициент объемного расширения в интервале температур ΔT , характеризующий *относительное увеличение объема* $\frac{\Delta V}{V_0}$, происходящее при нагревании тела на один кельвин:

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Связь коэффициентов α_V и α_l в первом приближении имеет вид

$$\alpha_V = 3\alpha_l.$$

4°. Тепловое расширение твердого тела связано с агармоничностью тепловых колебаний частиц его кристаллической решетки. Сила, действующая на частицу,

$$F(q) = - \frac{\partial U(q)}{\partial q} = -\beta_0 q + bq^2.$$

Для равновесного состояния кристалла среднее значение силы $\langle F \rangle = 0$, поэтому при строго гармонических колебаниях ($F = -\beta_0 q$) $\langle q \rangle = - \frac{\langle F \rangle}{\beta_0} = 0$, и теплового расширения происходить не может. В действительности же

$$\langle q \rangle = \frac{b}{\beta_0} \langle q^2 \rangle.$$

Но по закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы

$$\beta_0 \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура; поэтому

$$\langle q \rangle = \frac{bk}{\beta_0^2} T.$$

Вследствие ангармоничности тепловых колебаний с повышением температуры возрастает равновесное расстояние r_0 между соседними частицами твердого тела. Коэффициент линейного расширения связан с коэффициентом ангармоничности b :

$$\alpha_l = \frac{\langle q \rangle}{r_0 T} = \frac{bk}{\beta_0^2} \frac{1}{r_0}.$$

3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. Явление теплопроводности твердых тел состоит в передаче энергии в форме теплоты в неравномерно нагретом твердом теле (без теплового излучения). В общем случае температура T в различных точках тела изменяется с течением времени: $T = f(x, y, z, t)$, где x, y, z — координаты точки, t — время. Вид функции f устанавливается с помощью решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье, которое для однородного изотропного тела имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_V}{c\rho},$$

где q_V — количество теплоты, выделяемое внутренними источниками теплоты в единице объема тела за единицу времени, c — удельная теплоемкость тела, ρ — его плотность, Δ — дифференциальный оператор Лапласа. Величину a , характеризующую скорость выравнивания температуры в неравномерно нагретом теле, называют коэффициентом температуропроводности. Он

имеет смысл приведенного коэффициента теплопроводности K и связан с ним соотношением

$$\alpha = \frac{K}{c\rho}$$

(для газов $c = c_p$).

2°. Для стационарной теплопроводности ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$)

$$\alpha \Delta T + \frac{q_V}{c\rho} = 0.$$

В отсутствие внутренних источников теплоты ($q_V = 0$)

$$\Delta T = 0.$$

Для практического решения уравнения теплопроводности должны быть заданы: а) начальные условия $T = f(x, y, z, 0)$; б) краевые условия (условия теплообмена на границе тела).

3°. Удельным тепловым потоком называют количество теплоты, переносимое в единицу времени через единицу поверхности постоянной температуры в направлении нормали к поверхности. В случае плоской бесконечной стенки, разделяющей две среды 1 и 2 с постоянными температурами T_{c1} и T_{c2} ($T_{c1} > T_{c2}$), удельный тепловой поток через стенку

$$q = \frac{K}{d} (T_{b1} - T_{b2}),$$

или

$$q = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{a_1} + \frac{d}{K} + \frac{1}{a_2}} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{R},$$

где T_{b1} и T_{b2} — температуры внешних поверхностей стенки, d — толщина стенки, K — коэффициент теплопроводности материала стенки, a_1 и a_2 — коэффициенты теплоотдачи от первой среды к стенке и от стенки ко второй среде. Величину

$$R = \frac{1}{a_1} + \frac{d}{K} + \frac{1}{a_2}$$

называют термическим сопротивлением, величину $1/R$ — коэффициентом теплопередачи.

Температуры на внешних поверхностях стенки равны

$$T_{b1} = T_{c1} - \frac{q}{a_1}, \quad T_{b2} = T_{c2} + \frac{q}{a_2}.$$

Температура однослойной стенки на расстоянии l от поверхности 1 равна

$$T = T_{b1} - \frac{T_{b1} - T_{b2}}{d} l.$$

Для стенок конечных размеров формулы могут использоваться при условии $L \gg d$, где L — линейные размеры боковой поверхности стенки.

4°. Для стенки в форме длинного полого цилиндра с постоянными температурами сред внутри (T_{c1}) и вне (T_{c2}) цилиндра ($T_{c1} > T_{c2}$) тепловой поток через единицу длины стенки за единицу времени равен

$$q_l = \frac{2\pi K(T_{c1} - T_{c2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}},$$

или

$$q_l = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{a_1 d_1} + \frac{1}{2K} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{a_2 d_2}},$$

где T_{b1} и T_{b2} — температуры внутренней и наружной поверхностей цилиндра, d_1 и d_2 — внутренний и наружный диаметры цилиндра, K — коэффициент теплопроводности материала стенки, a_1 и a_2 — коэффициенты теплоотдачи на внутренней и внешней поверхностях цилиндра.

Температуры на внутренней и наружной поверхностях стенки соответственно равны

$$T_{b1} = T_{c1} - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{a_1 d_1}, \quad T_{b2} = T_{c2} + \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{a_2 d_2}. \quad (9.1)$$

Температура однослойной стенки на расстоянии r от оси цилиндра:

$$T = T_{b1} - \frac{q_l}{2\pi K} \ln \frac{2r}{d_1}.$$

5°. Для шаровой стенки с внутренним диаметром d_1 и наружным d_2 , разделяющей две среды с постоянными температурами T_{c1} и T_{c2} ($T_{c1} > T_{c2}$), тепловой поток Q через стенку за единицу времени равен

$$Q = \pi K \frac{d_1 d_2}{d} (T_{b1} - T_{b2}),$$

где d — толщина стенки, или

$$Q = \frac{\pi(T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{a_1 d_1^2} + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{a_2 d_2^2}}.$$

Температуры стенок подсчитывают по формулам, аналогичным (9.1).

Температура шаровой стенки на расстоянии r от центра:

$$T = T_{b1} - \frac{T_{b1} - T_{b2}}{\frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2}} \left(\frac{2}{d_1} - \frac{1}{r} \right).$$

6°. Металлы отличаются хорошей теплопроводностью, которая осуществляется, в основном, за счет переноса энергии свободными электронами. Коэффициент электронной теплопроводности металлов равен

$$K = \frac{\pi^3}{3} \frac{k^2 n_0 \lambda(W_F)}{m \langle u(W_F) \rangle} T,$$

где k — постоянная Больцмана, n_0 — концентрация электронов в металле, $\lambda(W_F)$ и $\langle u(W_F) \rangle = \frac{v_F}{m}$ — длина свободного пробега и средняя скорость теплового движения электронов, соответствующие граничной энергии W_F фермиевского распределения электронов по энергиям при температуре $T = 0$, m — масса электрона.

В классическом приближении идеального электронного газа

$$K = \frac{1}{2} k n_0 \langle \lambda \rangle \langle u \rangle,$$

где $\langle \lambda \rangle$ и $\langle u \rangle$ — средние длина свободного пробега и скорость теплового движения электронов. Теплопро-

водность металлов, осуществляемая кристаллической решеткой (*решеточная теплопроводность*), значительно меньше электронной.

7°. В кристаллических диэлектриках основную роль в механизме теплопроводности играет передача энергии связанных колебаний узлов решетки. В первом приближении этот процесс можно представить в виде распространения в кристалле набора гармонических упругих волн, имеющих различные частоты ν_i . В квантовой теории этим волнам сопоставляются квазичастицы — *фононы* — с энергиями $h\nu_i$ и импульсами $\frac{h\nu_i}{v}$, где v — скорость упругих волн (скорость звука).

Процесс решеточной теплопроводности может быть рассмотрен как перемещение фононов по кристаллу. Средняя длина свободного пробега (λ) фононов является кинетической характеристикой, аналогичной средней длине свободного пробега молекулы. Коэффициент решеточной теплопроводности кристаллов равен

$$K = \frac{1}{3} cv\langle\lambda\rangle,$$

где c — теплоемкость единицы объема, v — скорость звука, $\langle\lambda\rangle$ — средняя длина свободного пробега фононов. Например, для решетки хлористого натрия при $t = 0^\circ\text{C}$ и значениях $c = 1,9 \cdot 10^{-6}$ Дж/м³ и $K = 7,1 \times 10^{-3}$ Дж/(м·К·с), $\langle\lambda\rangle = 23 \cdot 10^{-10}$ м, что в 4 раза превышает расстояние d между соседними ионами в кубической гранецентрированной решетке хлористого натрия: $d = 5,63 \cdot 10^{-10}$ м (период кристаллической решетки). Величина $\langle\lambda\rangle$ определяется геометрическим рассеянием фононов (рассеяние на границах кристалла, дефектах решетки и аморфных структурах) и рассеянием фононов на ангармонических колебаниях узлов решетки (рассеяние фононов на фононах). На гармонических колебаниях последний процесс не происходит. Рассеяние фононов на фононах приводит при высоких температурах $T > T_c$, где T_c — характеристическая температу-

ра кристалла, к зависимости $\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{T}$; при $T \ll T_c$,

$\langle \lambda \rangle \sim \exp\left(-\frac{T_c}{2T}\right)$. Геометрическое рассеяние существует

при больших значениях $\langle \lambda \rangle$, сравнимых с линейными размерами d образца. В этом случае, наблюдающемся при низких температурах, происходит резкое уменьшение теплопроводности чистых кристаллов, и

справедливо соотношение $K \approx \frac{1}{3} c v d$. При не слишком

низких температурах $K \sim 1/T$ в соответствии с зависимостью $\langle \lambda \rangle \sim 1/T$. При низких температурах $K \sim T^3$ ввиду того, что $c \sim T^3$ (закон Дебая).

4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. Для твердых тел теплоемкости C_p и C_v не различаются. Применяются удельная, объемная и атомная (или молярная) теплоемкости. У неметаллических твердых тел наибольший вклад в теплоемкость дает энергия тепловых колебаний частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток. Для металлов следует, кроме того, учитывать малую теплоемкость вырожденного электронного газа.

2°. Связанные колебания частиц в кристалле, содержащем N атомов, можно в первом приближении рассматривать как систему $3N$ независимых линейных осцилляторов (соответствующих $3N$ степеням свободы) с частотами от 0 до $\nu_{\text{макс}}$

$$\nu_{\text{макс}} = \left(\frac{9}{4\pi} \frac{N}{V} \frac{\nu_l^3 \nu_t^3}{2\nu_l^3 + \nu_t^3} \right)^{1/3},$$

где ν_l и ν_t — скорости продольных и поперечных упругих волн в кристалле с объемом V .

3°. Энергия U моля атомов твердого тела и его атомная теплоемкость C_a вычисляются с помощью интеграла состояний Z по формулам, приведенным в табл. П.7.

Теория теплоемкости твердых тел, основанная на представлении об упругих волнах в кристалле, приводит к формуле

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} - 9N_A \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \int_0^{T_c/T} x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx,$$

где T — температура кристалла, $T_c = \frac{h\nu_{\max}}{k}$ — характеристическая температура кристалла (дебаевская температура), k , h , N_A — соответственно постоянные Больцмана, Планка, Авогадро.

4°. В области высоких температур ($T \gg T_c$)

$$\ln Z \approx -3N_A \ln \frac{T_c}{T} - \frac{9}{8} N_A \frac{T_c}{T} + N_A,$$

$$U = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \approx 3N_A kT.$$

Отсюда

$$C_s = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_A k = 3R = 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$$

Этот результат может быть получен из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы и совпадает с экспериментально установленным *правилом Дюлонга и Пти*: атомная теплоемкость всех химически простых кристаллических твердых тел приблизительно равна 25 Дж/(моль · К).

5°. В области низких температур ($T \ll T_c$)

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} + \frac{\pi^4 N_A}{5} \left(\frac{T}{T_c}\right)^3.$$

$$U = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{9}{8} N_A kT_c + \frac{3\pi^4}{5} \frac{N_A kT^4}{T_c^3}.$$

Первый член в правой части выражения для U представляет энергию кристалла при $T \rightarrow 0$. Теплоемкость кристалла при низких температурах пропорциональна T^3 (закон Дебая):

$$C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{12\pi^4 N_A k}{5T_c^3} T^3.$$

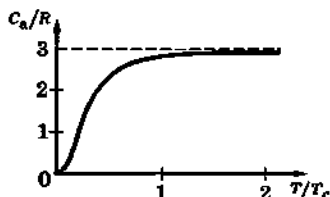


Рис. II.9.1

6°. В промежуточной области ($T \approx T_c$) энергия и теплоемкость кристалла являются сложными функциями температуры, зависящими от результата интегрирования $\ln Z$ (п. 3°). Общий ход зависимости атомной теплоемкости от температуры представлен на рис. II.9.1.

5. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. При нагревании твердого тела подводимая к нему теплота расходуется в основном на увеличение внутренней энергии кристалла (кинетической энергии тепловых колебаний и потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки). Сильное нагревание может привести к переходу вещества из кристаллической фазы в жидкую (плавление) или газообразную (сублимация, возгонка). Это происходит при такой температуре, когда смещения частиц из положений равновесия соизмеримы с равновесными расстояниями между частицами в решетке.

2°. Плавление твердого тела начинается при определенной температуре $T_{пл}$, называемой температурой плавления. Процесс плавления однокомпонентного кристалла происходит при постоянной для данного давления температуре $T_{пл}$.

3°. Количество теплоты, которое необходимо подвести к единице массы твердого тела при постоянной

температуре $T_{\text{пл}}$ для осуществления плавления, называют *удельной теплотой плавления* $r_{\text{пл}}$:

$$r_{\text{пл}} = u_{\text{ж}} - u_{\text{тв}} + p(v_{\text{ж}} - v_{\text{тв}}),$$

где $u_{\text{ж}}$ и $u_{\text{тв}}$ — внутренние энергии единицы массы вещества в жидкой и твердой фазах, $v_{\text{ж}}$ и $v_{\text{тв}}$ — удельные объемы жидкости и твердого тела, p — постоянное давление фазового перехода первого рода.

4°. Зависимость температуры плавления от давления описывается *уравнением Клапейрона — Клаузиуса*:

$$\frac{dT_{\text{пл}}}{dp} = \frac{T_{\text{пл}}(v_{\text{ж}} - v_{\text{тв}})}{r_{\text{пл}}}.$$

Как правило, $v_{\text{ж}} > v_{\text{тв}}$, и поскольку $r_{\text{пл}} > 0$, то $\frac{dT_{\text{пл}}}{dp} > 0$.

При увеличении давления для большинства веществ температура плавления повышается. Для некоторых веществ (вода, галлий, висмут) плотность жидкой фазы

больше, чем твердой, $v_{\text{ж}} - v_{\text{тв}} < 0$ и $\frac{dT_{\text{пл}}}{dp} < 0$; температура

плавления таких веществ понижается при увеличении давления. На рис. II.9.2 представлены кривые равновесия двухфазной системы твердое тело — жидкость (рис. II.9.2, а — для случая $v_{\text{ж}} > v_{\text{тв}}$, рис. II.9.2, б — для случая $v_{\text{ж}} < v_{\text{тв}}$). Процесс плавления связан с возрастанием энтропии системы, как переход из более упорядоченного, кристаллического состояния в менее упорядоченное, жидкое.

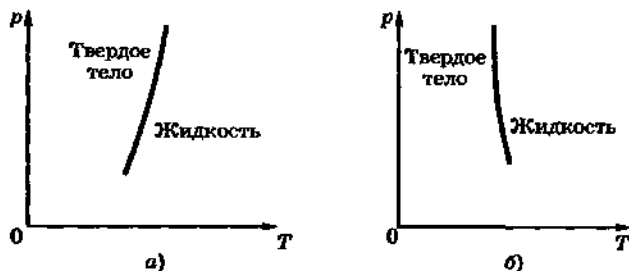


Рис. II.9.2

5°. При охлаждении жидкостей до некоторой температуры $T_{кр}$, называемой *температурой кристаллизации (затвердевания)* жидкой фазы, начинается переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние (*кристаллизация*). Кристаллизация связана с выделением количества теплоты, равного теплоте плавления, и для химически чистых жидкостей протекает при постоянной температуре, причем $T_{кр}$ совпадает с температурой плавления $T_{пл}$.

6°. В процессе кристаллизации упорядочивается движение частиц жидкости, увеличивается время их «оседлого» существования (время релаксации). Постепенно движения частиц превращаются в связанные тепловые колебания около некоторых средних положений — узлов кристаллической решетки.

7°. Для начала кристаллизации необходимо, чтобы в жидкости имелись *центры кристаллизации* (посторонние примеси, пылинки, пузырьки газа, местные сгущения жидкости). В этих местах в первую очередь возникает правильное взаимное расположение частиц и начинается образование твердой фазы.

8°. Если в жидкости отсутствуют центры кристаллизации и от нее достаточно медленно и равномерно отводится теплота, то жидкость может быть охлаждена до более низкой температуры, чем температура кристаллизации (*переохлажденная жидкость*). Это состояние жидкости является метастабильным (см. пересыщенный пар) и легко нарушается (например, кристаллизация переохлажденной жидкости начинается при ее встряхивании).

9°. Температура кристаллизации раствора зависит от его состава. Точки A и B на рис. II.9.3 определяют температуры кристаллизации (плавления) чистых веществ A и B . Добавление одного из веществ к другому вызывает понижение температуры кристаллизации раствора (или температуры плавления образующегося при этом сплава). При некоторой концентрации c_3 вещества B (точка $Э$) достигается минимальное значение температуры кристаллизации (плавления). Раствор (сплав) такого

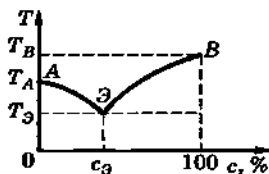


Рис. II.9.3

состава называется *эвтектикой*, а температура плавления эвтектики называется *эвтектической точкой*.

10°. Испарение твердых тел (*сублимация*), происходящее при любой температуре, сопровождается поглощением теплоты испарения, затрачиваемой на преодоление сил связи между частицами твердого тела и на «отрыв» частиц с поверхности кристалла. Разность между удельными теплотами испарения твердых тел и жидкостей при температуре плавления равна удельной теплоте плавления.

11°. Кривую равновесия твердое тело — пар в диаграмме p — T называют *кривой сублимации*. На рис. П.9.4

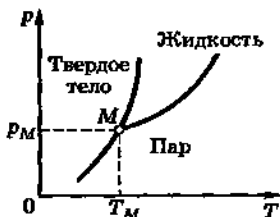


Рис. П.9.4

представлены для некоторого вещества кривые равновесия: твердое тело — пар, твердое тело — жидкость и жидкость — пар. Они пересекаются в *тройной точке M*, где вещество находится одновременно в твердой, жидкой и паровой фазах, которые равновесно сосуществуют друг с другом.

6. АДСОРБЦИЯ

1°. *Адсорбцией* называют концентрирование (сгущение) одного из веществ (компонентов), происходящее в пограничном слое у поверхности раздела двух фаз. Например, на поверхности твердого тела или жидкости происходит концентрирование веществ из газа или раствора. Понятие *сорбции* включает в себя как поверхностное поглощение вещества жидкостью или твердым телом — *адсорбцию*, так и объемное поглощение вещества — *абсорбцию*. Адсорбируемое вещество называют *адсорбатом*; тело, образующее поглощающую поверхность, — *адсорбентом*. *Десорбцией* называют обратное процессу сорбции отделение от поверхности ранее поглощенного ею вещества.

Адсорбированные частицы удерживаются на поверхности некоторое время, зависящее от природы адсорбента и адсорбата, температуры и давления. По мере развития процесса адсорбции ее интенсивность уменьшается, и возрастает роль процесса десорбции. *Адсорбционным равновесием* называют установление равных скоростей процессов адсорбции и десорбции.

2°. *Физической адсорбцией* называют адсорбцию, при которой частицы адсорбата сохраняют свои индивидуальные свойства. При *химической адсорбции* (хемосорбции) молекулы адсорбата образуют химическое соединение с адсорбентом. Адсорбционные силы при физической адсорбции имеют ту же природу, что и силы межмолекулярного взаимодействия в газах, жидкостях и твердых телах. Физическая адсорбция протекает весьма быстро при условии, что она не осложнена побочными процессами. Хемосорбция при низких температурах протекает медленно, и скорость ее возрастает с повышением температуры подобно скорости химических реакций (*активированная адсорбция*).

Процесс адсорбции сопровождается выделением теплоты. *Теплота физической адсорбции* имеет порядок теплоты конденсации и составляет 5—20 кДж/моль для простых молекул и 40—80 кДж/моль для сложных молекул. Теплоты хемосорбции сравнимы с теплотой химических реакций (40—400 кДж/моль).

Адсорбция является процессом, сопровождающимся понижением свободной энергии поверхностного слоя адсорбента. Адсорбат должен вносить меньший вклад в поверхностную энергию адсорбента, т. е. должен обладать меньшим, чем адсорбент, поверхностным натяжением.

3°. Количественной характеристикой адсорбции является *величина адсорбции* Γ — избыток массы данного компонента в молях на единицу площади поверхностного слоя по сравнению с его содержанием в таком же объеме соприкасающихся фаз; по *уравнению Гиббса*

$$\Gamma = - \frac{\partial \sigma}{\partial \mu},$$

где σ — поверхностное натяжение, μ — химический потенциал данного компонента при равновесии фаз. Если поглощение компонента происходит из среды, где его концентрация невелика, то уравнение Гиббса приводится к виду

$$\Gamma = - \frac{c}{RT} \frac{\partial \sigma}{\partial c},$$

где $\frac{\partial \sigma}{\partial c} = G$ — *поверхностная активность адсорбата*, характеризующая его способность понижать при адсорбции поверхностную энергию адсорбента.

7. УПРУГИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

1°. *Деформацией* твердого тела называют изменение его размеров и объема, сопровождающееся чаще всего изменением формы тела. В некоторых случаях (всестороннее сжатие или растяжение) форма тела сохраняется. Деформации вызываются изменением температуры или внешними силовыми воздействиями. При деформациях происходят смещения частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток твердых тел, из первоначальных положений равновесия в новые. Этому препятствуют силы взаимодействия между частицами, вследствие чего в деформированном теле возникают внутренние *упругие силы*, которые уравнивают внешние силы, приложенные к телу.

2°. *Упругой* называют деформацию, которая исчезает после прекращения действия вызывающей ее силы. При этом происходят «обратимые» смещения частиц из новых положений равновесия в кристаллической решетке в прежние. Неупругие деформации твердого тела, сопровождающиеся необратимой перестройкой его кристаллической решетки, называют *пластическими*.

3°. *Напряжением* σ называют физическую величину, равную упругой силе $F_{\text{упр}}$, приходящейся на единицу площади S сечения тела:

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS}.$$

Напряжение называют *нормальным*, если сила $dF_{\text{упр}}$ нормальна поверхности dS , и *касательным*, если сила касательна к этой поверхности.

4°. Мерой деформации является *относительная деформация* $\frac{\Delta x}{x}$, равная отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x , характеризующей размеры или форму тела.

5°. *Закон Гука*: напряжение при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации:

$$\sigma = K \frac{\Delta x}{x},$$

где K — *модуль упругости*, равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Величину $a = \frac{1}{K}$ называют *коэффициентом упругости*. Закон Гука справедлив в определенных пределах деформаций. Напряжение, при котором нарушается пропорциональность между напряжением и деформацией, называют *пределом пропорциональности*.

6°. *Одностороннее, или продольное, растяжение (сжатие)* состоит в увеличении (уменьшении) длины тела под действием растягивающей (сжимающей) силы F . Упругое растяжение (сжатие) прекращается при условии $F_{\text{упр}} = F$, где $F_{\text{упр}}$ — упругая сила. Мерой деформации является *относительное удлинение (сжатие)* $\frac{\Delta l}{l}$. В этом случае $K = E$; величину E называют *модулем Юнга*. При этом $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$. По закону Гука

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES},$$

где l — первоначальная длина тела, Δl — изменение длины при нагрузке F . При $\Delta l = l$ модуль Юнга $E = \frac{F}{S} = \sigma$, т. е. равен напряжению, возникающему в образце при увеличении (уменьшении) его длины в два раза при прочих неизменных условиях.

7°. Относительное продольное растяжение (сжатие) образца сопровождается его *относительным поперечным сужением (расширением)* $\frac{\Delta d}{d}$, где d — поперечный размер образца. *Коэффициентом Пуассона* μ называют отношение относительного поперечного сужения (расширения) $\frac{\Delta d}{d}$ к относительному продольному удлинению (сжатию) $\frac{\Delta l}{l}$:

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}.$$

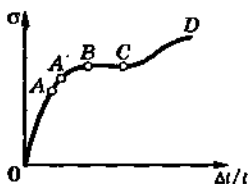


Рис. П.9.5

8°. По достижении *предела пропорциональности* (точка *A* на диаграмме растяжения, рис. П.9.5) удлинение возрастает быстрее, чем напряжение. *Пределом упругости* (точка *A'*) называют максимальное напряжение, при котором еще не получают *остаточные деформации* (остающиеся в теле после снятия напряжения). *Предел текучести*

(точка *B*) характеризует состояние деформированного тела, после которого удлинение возрастает без увеличения действующей силы (горизонтальный участок *BC*). *Пределом прочности* называют напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой телом перед разрушением.

9°. При многократных деформациях, соответствующих переходу за предел упругости, с последующим освобождением образца от деформирующих сил упругость тела возрастает, и предел пропорциональности увеличивается (*закалка, или наклеп, материала*).

10°. Объемная плотность w_σ потенциальной энергии тела при растяжении (сжатии) определяется удельной работой $A_{\text{упр}}$ по преодолению упругих сил (рассчитанной на единицу объема тела). В области, где справедлив закон Гука,

$$w_\sigma = A_{\text{упр}} = \frac{\sigma^2}{2E},$$

где σ — напряжение, E — модуль Юнга.

11°. *Деформация всестороннего растяжения (сжатия)* состоит в увеличении (уменьшении) объема тела без изменения его формы под влиянием равномерно распределенных по всей поверхности тела растягивающих (сжимающих) сил. По закону Гука

$$\sigma = K \frac{\Delta V}{V},$$

где $\frac{\Delta V}{V}$ — относительное увеличение (уменьшение) объема тела под действием напряжения σ . Величину K называют *модулем всесторонней объемной упругости*,

она имеет смысл напряжения, при котором относительное увеличение (уменьшение) объема равно единице:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)},$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона.

12°. *Сдвигом* называют деформацию, при которой все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости (*плоскости сдвига*), не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. II.9.6). Сдвиг происходит под действием силы F , приложенной касательно к грани BC , параллельной плоскости сдвига. Грань AD закреплена неподвижно. Мерой деформации $\frac{\Delta x}{x}$ является *угол сдвига* ϑ (*относительный сдвиг*), выраженный в радианах. Для малых деформаций

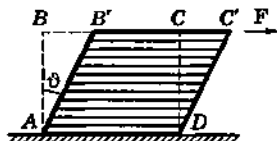


Рис. II.9.6

$$\vartheta \approx \tan \vartheta = \frac{\Delta x}{x},$$

где $\Delta x = CC'$ — *абсолютный сдвиг*.

По закону Гука относительный сдвиг пропорционален касательному («скалывающему») напряжению:

$$\sigma_{\tau} = \frac{F}{S} = G\vartheta,$$

где G — *модуль сдвига*, равный касательному напряжению, вызывающему относительный сдвиг, равный единице. Он связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ соотношением

$$G = \frac{E}{2} (1 + \mu)^{-1}.$$

13°. Объемная плотность потенциальной энергии деформированного тела при сдвиге равна

$$w_s = \frac{\sigma_{\tau}^2}{2G}.$$

14°. *Кручением* называют деформацию образца с одним закрепленным концом под действием пары сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси образца. Момент M_k этой пары называют *крутящим моментом*. Кручение состоит в относительном повороте параллельных друг другу сечений, проведенных перпендикулярно к оси образца. В случае кручения круглого цилиндрического тела сечения, перпендикулярные к его оси, вращаются вокруг оси тела, сохраняя свою форму и оставаясь параллельными друг другу. Если φ — угол поворота, z — измеренное по оси образца расстояние от закрепленного конца, то разность углов поворота двух бесконечно близких сечений (удаленных на dz друг от друга) равна

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dz} dz = \vartheta' dz,$$

где $\vartheta' = \frac{d\varphi}{dz}$ — *относительный угол кручения*; этот угол является мерой деформации. Полный поворот данного сечения пропорционален его расстоянию от начала координат:

$$\varphi = \vartheta' z.$$

15°. *Закон Гука для кручения*:

$$\vartheta' = \frac{M_k}{GJ_p},$$

где M_k — крутящий момент, G — модуль сдвига, J_p — полярный момент инерции сечения. Для кругового сечения радиусом R величина $J_p = \pi R^4/2$.

Угол поворота между крайними сечениями образца длиной L равен

$$\varphi = \frac{M_k L}{GJ_p}, \text{ или } M_k = \frac{GJ_p}{L} \varphi.$$

Крутящий момент, т. е. момент, закручивающий на угол φ однородный круглый стержень длиной L и радиусом R равен:

$$M_k = \frac{\pi G}{2} \frac{R^4}{L} \varphi.$$

16°. Объемная плотность потенциальной энергии деформированного круглого цилиндра равна

$$w_k = \frac{M_k^2 r^2}{2GJ_p^2},$$

где r — расстояние от оси цилиндра.

17°. Если к нижнему концу укрепленной цилиндрической проволоки прикреплено тело с моментом инерции J относительно оси проволоки, то дифференциальное уравнение *крутильных колебаний*, возникающих при кручении, имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{GJ_p}{L} \varphi.$$

Решение его позволяет вычислить период крутильных колебаний.

Раздел III

ОСНОВЫ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

Глава 1

ГИДРОАЭРОСТАТИКА

1. ВВЕДЕНИЕ

1°. *Гидроаэромеханикой* называют раздел физики, в котором изучаются законы равновесия и движения жидкостей и газов, а также взаимодействие движущихся жидкостей и газов с омываемыми ими твердыми телами. В гидроаэромеханике отвлечаются от молекулярного строения жидкостей и газов, рассматривая их как *сплошную среду*, непрерывно распределенную в пространстве¹⁾.

Частицей сплошной среды называют весьма малый элемент объема среды, размеры которого в то же время во много раз больше межмолекулярных расстояний. Так как последние очень малы (порядка 10^{-8} м для газов, находящихся в нормальных условиях), то частицы жидкости можно приближенно считать точечными.

Гидроаэростатикой называют раздел гидроаэромеханики, в котором рассматривают условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под действием приложенных к ним сил.

Гидроаэродинамикой называют раздел гидроаэромеханики, в котором изучают законы движения жидкостей и газов и их взаимодействия с твердыми телами.

2°. Отличительной особенностью жидкостей и газов по сравнению с твердыми телами является их текучесть, т. е. малая сопротивляемость деформации сдвига. При неограниченном уменьшении скорости деформации силы сопротивления жидкости или газа этой деформации стремятся к нулю.

¹⁾ Эта модель неприменима к разреженным газам, которые не могут быть исследованы методами гидроаэродинамики и изучаются в молекулярной физике.

Различие между жидкостью и газом заключается в характере зависимости их плотности от давления, т. е. в практической несжимаемости жидкостей и заметной сжимаемости газов, и в наличии в жидкости ближнего порядка.

3°. В гидроаэромеханике для капельных жидкостей и газов обычно используют единый термин «жидкость» (несжимаемая или сжимаемая).

Несжимаемой жидкостью называют капельную жидкость или газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче можно пренебречь. *Сжимаемой жидкостью* называют газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче пренебречь нельзя.

Идеальной жидкостью называют жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение. *Вязкими жидкостями* называют жидкости, для которых явлением внутреннего трения пренебрегать нельзя.

Баротропной жидкостью называют жидкость, плотность которой зависит только от давления.

2. ГИДРОАЭРОСТАТИКА

1°. Рассмотрение задач гидростатики может быть основано на *принципе отвердевания*: равновесие жидкости не нарушится, если какой-либо элемент ее объема считать отвердевшим, т. е. если его мысленно заменить таким же по объему и форме элементом твердого тела, имеющим ту же плотность, что и рассматриваемая жидкость.

Различают два типа внешних сил, действующих на элемент объема жидкости, — массовые и поверхностные силы.

Массовыми силами называют силы, действие которых не зависит от присутствия других частей жидкости, кроме рассматриваемого элемента, а численное значение пропорционально массе этого элемента. Примером массовой силы может служить сила тяжести. Массовая сила равна $F\rho dV$, где dV — объем рассматриваемого элемента жидкости, ρ — ее плотность, F — массовая сила, отнесенная к единице массы жидкости и называемая *напряженностью поля массовых сил* (например, для силы тяжести величина F равна ускорению g свободного падения).

Массовые силы называют *потенциальными*, если их напряженность $\mathbf{F}$ можно представить в форме

$$\mathbf{F} = - \operatorname{grad} \varphi_F = - \nabla \varphi_F,$$

где $\operatorname{grad} \varphi_F = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi_F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi_F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi_F}{\partial z}$ — градиент скалярной функции $\varphi_F(x, y, z, t)$, называемой *потенциалом массовых сил*; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты прямоугольной декартовой системы координат; $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ — оператор набла.

Поверхностными силами называют силы, приложенные к элементу жидкости со стороны прилегающих к нему частиц остальной части жидкости. Эти силы действуют на поверхность рассматриваемого элемента. Поверхностную силу, отнесенную к единице площади поверхности, на которую она действует, называют *напряжением*. Всякую поверхностную силу можно разложить на нормальную и касательную к поверхности составляющие. Соответственно различают нормальное напряжение, или давление p , и касательное напряжение τ . В состоянии равновесия касательные напряжения в жидкости равны нулю и поверхностные силы представляют собой лишь силы давления, причем давление p в данной точке жидкости по всем направлениям одинаково, т. е. не зависит от ориентации той поверхности, для которой оно определяется.

2°. *Уравнения равновесия жидкости:*

$$F_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

где F_x, F_y и F_z — проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат вектора $\mathbf{F}$ результирующей напряженности поля массовых сил, действующих на жидкость. В векторной форме уравнение равновесия имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Уравнения равновесия получают из уравнений гидродинамики идеальной жидкости в предположении, что скорость движения жидкости равна нулю.

3°. Равновесие жидкости под действием массовых сил возможно только в том случае, если напряженность $\mathbf{F}$ поля этих сил удовлетворяет соотношению

$$F_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + F_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + F_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = 0$$

или, в векторной форме

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = 0,$$

где

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

— ротор, или вихрь векторного поля $\mathbf{F}$.

Если плотность жидкости ρ не зависит от координат, то $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \frac{p}{\rho}$, и равновесие возможно только в потенциальном силовом поле ($\mathbf{F} = -\text{grad } \phi$) с потенциалом $\phi = -\frac{p}{\rho} + \text{const.}$ Поверхности равного давления совпадают с поверхностями равного потенциала.

4°. Равновесие жидкости в однородном поле силы тяжести ($\mathbf{F} = \mathbf{g} = \text{const.}$). Если ось Oz направлена в сторону, противоположную $\mathbf{g}$, то $F_z = -g$, $F_x = F_y = 0$, и уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{\rho} = -g dz.$$

В общем случае для жидкостей плотность является функцией давления и температуры: $\rho = \rho(p, T)$. Если температура жидкости всюду одинакова (условие теплового равновесия) и жидкость несжимаема, то

$$p + \rho g z = p_0,$$

где p_0 — давление на уровне $z = 0$. Это соотношение называют *основным уравнением гидростатики для несжимаемой жидкости*. Обычно начало отсчета z совмещается со свободной поверхностью жидкости, тогда p_0 — внешнее давление на этой поверхности.

Разность $p - p_0$ не зависит от p_0 , т. е. давление, производимое на жидкость внешними силами, передается ею по всем направлениям равномерно (*закон Паскаля*).

Для сжимаемой жидкости, находящейся в тепловом и механическом равновесии, должна быть одинакова

по всему объему сумма $\Phi + gz$, где Φ — изобарно-изотермический потенциал единицы массы жидкости, а gz — потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле силы тяжести.

Механическое равновесие жидкости в поле силы тяжести возможно и в случае отсутствия теплового равновесия, если температура жидкости изменяется только вдоль вертикальной оси Oz . Это равновесие устойчиво, если выполняется следующее неравенство (*условие отсутствия конвекции*):

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0,$$

где v и s — удельные объем и энтропия соответственно.

Для большинства жидкостей $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p > 0$, и условие от-

сутствия конвекции имеет вид $\frac{ds}{dz} > 0$, или, как следует из термодинамики,

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p,$$

где c_p — удельная теплоемкость жидкости в изобарном процессе. Для идеального газа

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}.$$

5°. Закон Архимеда: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, которая равна весу жидкости, вытесненной телом, и приложена в центре тяжести объема погруженной части тела.

Глава 2

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. В кинематике жидкостей возможны два различных метода описания движения. Один из них, называемый *методом Лагранжа*, состоит в том, что

движение жидкости задается зависимостью от времени t координат всех ее частиц:

$$\begin{cases} x = F_1(a, b, c, t), \\ y = F_2(a, b, c, t), \\ z = F_3(a, b, c, t), \end{cases}$$

где a , b и c — координаты частицы в начальный момент времени $t = 0$, служащие для обозначения частицы. Исключая из этих уравнений время, можно получить уравнение траектории частицы. Величины a , b , c и t называют *переменными Лагранжа*. Проекция на оси координат векторов скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{a}$ частицы равны:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t}, & v_y &= \frac{\partial y}{\partial t}, & v_z &= \frac{\partial z}{\partial t}, \\ a_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & a_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, & a_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

2°. Второй метод кинематики жидкостей называют *методом Эйлера*; он заключается в том, что движение жидкости определяется заданием *поля скоростей жидкости* в пространстве в каждый момент времени, т. е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t),$$

или, в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат,

$$\begin{cases} v_x = f_1(x, y, z, t), \\ v_y = f_2(x, y, z, t), \\ v_z = f_3(x, y, z, t). \end{cases}$$

где $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ — скорость жидкости в момент времени t в точке пространства, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Величины x , y , z , t называют *переменными Эйлера*. В качестве переменных Эйлера вместо прямоугольных декартовых координат (x, y, z) можно пользоваться цилиндрическими, сферическими и другими координатами.

Проекции вектора $\mathbf{a}$ (ускорения частиц жидкости) на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z.$$

Из этих выражений видно, что ускорение частицы жидкости равно сумме двух ускорений: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{лок}} + \mathbf{a}_{\text{конв}}$, где

$$\mathbf{a}_{\text{лок}} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \mathbf{k}$$

— *локальное ускорение*, обусловленное изменением поля скоростей во времени, и

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{конв}} = & \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

— *конвективное ускорение*, обусловленное неоднородностью поля скоростей.

В дальнейшем все уравнения гидроаэродинамики записывают в переменных Эйлера, причем под x, y, z подразумевают прямоугольные декартовы координаты.

3°. Движение жидкости называют *установившимся* или *стационарным*, если поле ее скоростей не изменяется с течением времени. В противном случае движение называют *неустановившимся*. При установившемся движении жидкости поля давления и плотности не зависят от времени.

Потенциальным или *безвихревым* называют такое движение жидкости, при котором в каждый момент времени во всем объеме жидкости $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$, т. е. скорость равна градиенту некоторой скалярной функции координат и времени $\varphi(x, y, z, t)$, называемой *потен-*

циалом скорости. Если существуют области жидкости, в которых $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, то движение жидкости называют *вихревым*.

4°. *Линией тока* называют линию, касательная в каждой точке которой в данный момент времени t совпадает по направлению с вектором скорости жидкости в этой точке. В случае установившегося течения жидкости линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости. *Уравнение линий тока* имеет вид

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)},$$

где время является фиксированным параметром.

Трубкой тока называют поверхность, образованную линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура. Часть жидкости, ограниченную трубкой тока, называют *струйкой*. В случае установившегося движения жидкости, трубки тока не изменяются во времени, и частицы жидкости движутся так, что каждая из них остается в пределах определенной струйки.

5°. *Циркуляцией скорости* вдоль замкнутого контура L называют криволинейный интеграл

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{l}$ — элементарный вектор, модуль которого равен длине дуги элементарного участка контура и направлен по касательной к контуру в сторону его обхода.

По *теореме Стокса* из векторного анализа

$$\Gamma = \int_S \text{rot}_n \mathbf{v} \, dS,$$

где S — площадь поверхности, натянутой на замкнутый контур L , $\text{rot}_n \mathbf{v}$ — проекция $\text{rot } \mathbf{v}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ к элементу dS этой поверхности¹⁾. В случае потенциального движения жидкости $\Gamma \equiv 0$ независимо от выбора контура.

¹⁾ Векторы $\mathbf{n}$ проводят таким образом, чтобы при наблюдении из концов этих векторов обход контура L , принятый при вычислении циркуляции, был виден происходящим против часовой стрелки.

6°. *Вихревой линией* называют линию, касательная в каждой точке которой в данный момент времени t совпадает по направлению с вихрем скорости ($\text{rot } \mathbf{v}$) в этой точке. *Уравнение вихревой линии* имеет вид

$$\frac{dx}{\text{rot}_x \mathbf{v}} = \frac{dy}{\text{rot}_y \mathbf{v}} = \frac{dz}{\text{rot}_z \mathbf{v}},$$

где $\text{rot}_x \mathbf{v}$, $\text{rot}_y \mathbf{v}$, $\text{rot}_z \mathbf{v}$ — проекции вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ на соответствующие оси координат.

Вихревой трубкой называют поверхность, образованную вихревыми линиями, проведенными через все точки малого замкнутого контура. Жидкость, заключенная внутри вихревой трубки, называют *вихревой нитью*.

Интенсивностью вихревой трубки (вихря) называют поток вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ через поперечное сечение вихревой трубки. Интенсивность вихря постоянна вдоль всей вихревой трубки и равна циркуляции скорости вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного на поверхности вихревой трубки и охватывающего трубку один раз.

7°. *Потоком жидкости* сквозь неподвижную поверхность S называют массу $m_{\text{сек}}$ жидкости, проходящей сквозь эту поверхность за единицу времени:

$$m_{\text{сек}} = \int_S \rho v_n dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к элементу поверхности dS , v_n — проекция вектора скорости жидкости на направление $\mathbf{n}$, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ — вектор плотности потока жидкости.

2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

1°. В процессе движения жидкости должен выполняться закон сохранения массы. Математическим выражением этого закона в гидроаэромеханике служит *уравнение неразрывности*. В переменных Эйлера оно может быть записано в нескольких эквивалентных формах:

$$a) \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ или } \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ — ее скорость, а $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ — дивергенция вектора $\mathbf{v}$;

$$б) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0;$$

$$в) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0, \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0, \text{ где } \operatorname{grad} \rho \text{ — градиент плотности.}$$

2°. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0 \right)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \text{ или } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Если движение несжимаемой жидкости потенциальное, то потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнение неразрывности для установившегося движения жидкости $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0 \right)$:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \text{ или } \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

При установившемся течении поток жидкости сквозь поперечное сечение струйки не зависит от местоположения этого сечения. Для двух произвольных поперечных сечений dS_1 и dS_2 элементарной струйки выполняется условие $\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$.

Глава 3

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЕЙ

1°. Уравнения движения жидкости выражают закон изменения импульса, записанный в переменных Эйлера для единицы массы движущейся жидкости. В случае идеальной жидкости необходимо учитывать действие массовых сил и сил давления, а в случае вязкой жидкости — еще действие диссипативных сил (сил трения).

Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера):

а) в векторной форме

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

где F — напряженность поля массовых сил, p — давление, ρ — плотность жидкости, а оператор $v \cdot \nabla =$

$$= v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z};$$

б) в проекциях на оси координат

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

В случае установившегося движения $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$.

Обычно можно считать, что при движении идеальной жидкости ее удельная энтропия не изменяется. В этом случае, как следует из термодинамики,

$$\frac{1}{\rho} dp = dh, \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } h,$$

где h — удельная энтальпия жидкости.

2°. Уравнения движения вязкой жидкости (*уравнения Навье—Стокса*):

а) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad } \text{div } \mathbf{v},$$

где $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, η — коэффициент динамической вязкости, или коэффициент внутреннего трения, ζ — вторая (объемная) вязкость, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа (часто оператор Лапласа обозначают также через ∇^2);

б) в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \\ + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \\ + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Для несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности следует, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, и уравнение Навье—Стокса имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}, \\ \nabla \times \nabla p &= \nabla \times \nabla \mathbf{v}^2 \equiv 0, \end{aligned}$$

уравнение (3.1) может быть представлено в форме, не содержащей давления p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{v} \times \nabla \mathbf{v} + \nu \Delta \nabla \times \mathbf{v}.$$

Если поле массовых сил потенциальное, каким является, например, поле тяготения, то $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. В случае идеальной жидкости ($\nu = 0$) последний член уравнения также равен нулю.

3°. Коэффициент второй вязкости ζ , подобно (первому) коэффициенту динамической вязкости η , является положительной величиной и зависит от химической природы сжимаемой жидкости, давления и температуры. Если первая вязкость проявляется при деформации чистого сдвига, то вторая — при деформации всестороннего сжатия, сопровождающейся изменением плотности жидкости. При сжатии и расширении в жидкости нарушается термодинамическое равновесие, и в ней возникают процессы, стремящиеся восстановить это равновесие. Так как процессы установления равновесия необратимы, то они сопровождаются возрастанием энтропии, свидетельствующим о диссипации энергии. Эта диссипация энергии и определяющая ее вторая вязкость ζ будут тем большими, чем медленнее протекают процессы восстановления равновесия по сравнению с процессом сжатия или расширения. Например, величина ζ должна быть велика, если при сжатии или расширении в жидкости нарушается химическое равновесие, и возникает химическая реакция, имеющая большое время релаксации, т. е. малую скорость. В случае сжатий и разрежений, вызываемых звуковыми волнами, ζ зависит от частоты (*дисперсия второй вязкости*).

4°. Основной задачей гидроаэродинамики является нахождение полей скорости, давления и плотности в

жидкости, движущейся под действием заданных внешних сил, т. е. нахождение следующих пяти функций координат и времени:

$$v_x = f_1(x, y, z, t), \quad v_y = f_2(x, y, z, t), \quad v_z = f_3(x, y, z, t), \\ p = f_4(x, y, z, t), \quad \rho = f_5(x, y, z, t).$$

Уравнения движения и неразрывности достаточны для решения основной задачи гидроаэродинамики всякой жидкости, у которой плотность и оба коэффициента вязкости зависят только от давления, причем вид этих зависимостей задан: $\rho = \rho(p)$, $\zeta = \zeta(p)$ и $\eta = \eta(p)$. В частности это верно для идеальной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, $\eta = \zeta = 0$), идеальной баротропной жидкости ($\eta = \zeta = 0$), а также для изотермического движения вязкой жидкости.

Во всех остальных случаях для решения основной задачи гидроаэродинамики необходимо рассматривать расширенную систему уравнений, состоящую из уравнений движения, неразрывности, энергии, состояния жидкости и уравнений, выражающих зависимости динамической и второй вязкостей от параметров состояния жидкости.

5°. Для учета специфических особенностей конкретной задачи и получения однозначного решения указанной выше системы дифференциальных уравнений гидроаэродинамики необходимо еще указать начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи.

Начальные условия определяют состояние движения жидкости в начальный момент времени $t = 0$:

$$v_{x0} = f_1(x, y, z, 0), \quad v_{y0} = f_2(x, y, z, 0) \text{ и т. д.}$$

В случае установившегося движения жидкости необходимость в задании начальных условий отпадает.

Граничные условия определяют особые условия движения жидкости на ее границах с твердыми телами, на свободной поверхности жидкости и на поверхностях раздела несмешивающихся жидкостей.

6°. Некоторые случаи граничных условий для идеальной жидкости:

а) в точках поверхности неподвижной твердой стенки нормальная к поверхности составляющая скорости жидкости равна нулю (*условие скольжения*):

$$v_n = 0, \text{ или } v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

где $\Phi(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности стенки;

б) если стенка перемещается в пространстве и в общем случае деформируется при этом, то скорость любой точки поверхности и скорость частицы жидкости, находящейся в данный момент в этой точке, должны иметь одинаковые проекции на направление нормали к поверхности:

$$v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

где $\Phi(x, y, z, t) = 0$ — уравнение подвижной поверхности;

в) на свободной поверхности жидкости, $\Phi(x, y, z, t) = 0$, помимо условия б), должно выполняться условие постоянства давления: $p(x, y, z, t) = \text{const}$;

г) на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей должно выполняться условие равенства давлений обеих жидкостей, а также условие равенства нормальных к поверхности раздела составляющих скоростей самой поверхности и обеих жидкостей.

7°. Некоторые случаи граничных условий для вязкой жидкости:

а) в точках поверхности неподвижной стенки скорость жидкости равна нулю (*условие прилипания*);

б) в точках поверхности движущейся стенки скорость жидкости равна скорости соответствующей точки стенки.

8°. Для установившегося движения идеальной баротропной жидкости в потенциальном силовом поле справедливо *уравнение Бернулли (интеграл Бернулли)*:

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

где φ_F — потенциал поля массовых сил, а C — величина, одинаковая для всех точек данной линии тока и, в общем случае, изменяющаяся при переходе от одной линии тока к другой.

Если на жидкость не действуют иные массовые силы, кроме силы тяжести, то $\varphi_F = gz$ (ось Oz направлена вертикально вверх), и уравнение Бернулли имеет вид

$$gz + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C.$$

Для несжимаемой жидкости

$$\rho gz + \frac{\rho v^2}{2} + p = C_1, \text{ или } z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_2,$$

где $\frac{\rho v^2}{2}$ — *скоростной напор (динамическое давление)*,

p — *статическое давление*, $\frac{p}{\rho g}$ — *пьезометрическая*

высота, $\frac{v^2}{2g}$ — *скоростная высота*.

Для сжимаемой баротропной жидкости интеграл $\int \frac{dp}{\rho}$ зависит от вида процесса изменения состояния.

В случае изотермического и адиабатного (изоэнтропийного) процессов идеального газа

$$\int_{\text{изотерм}} \frac{dp}{\rho} = k_1 \ln p + \text{const},$$

$$\int_{\text{адиабат}} \frac{dp}{\rho} = k_2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} p^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} + \text{const},$$

где $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ — отношение удельных теплоемкостей газа

в изобарном и изохорном процессах (показатель адиабаты), k_1 и k_2 — постоянные величины.

9°. Потенциальное движение ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) идеальной баротропной жидкости возможно только в том случае, когда массовые силы являются потенциальными. Для этого случая движения справедливо соотношение Коши (интеграл Коши):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \varphi_F = f(t),$$

где φ — потенциал скорости ($\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$), φ_F — потенциал массовых сил, а $f(t)$ — функция времени, вид которой остается произвольным.

Для установившегося потенциального движения идеальной баротропной жидкости справедливо уравнение Бернулли—Эйлера (интеграл Бернулли—Эйлера)

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const},$$

где константа, в отличие от уравнения Бернулли, одинакова для всех линий тока.

10°. Плоским движением называют такое движение жидкости, при котором все ее частицы движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, причем скорости всех частиц, лежащих на одном и том же перпендикуляре к этой плоскости, одинаковы. Если неподвижную плоскость принять за координатную плоскость, то в случае плоского движения

$$v_x = f_1(x, y, t), \quad v_y = f_2(x, y, t), \quad v_z = 0.$$

Для плоского движения несжимаемой жидкости

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где $\psi(x, y, t)$ — функция тока. Семейство линий $\psi(x, y, t) = \text{const}$ (время t играет роль фиксированного параметра) представляет собой совокупность линий тока на плоскости xOy в момент времени t .

Если поле внешних сил потенциальное, то функция тока идеальной несжимаемой жидкости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа.

Если плоское движение несжимаемой жидкости является потенциальным, то справедливы уравнения Коши—Римана:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Функция тока ψ и потенциал скорости ϕ удовлетворяют уравнению Лапласа: $\Delta \psi = 0$, и $\Delta \phi = 0$. Линии тока являются ортогональными траекториями семейства линий равного потенциала скорости.

11°. Закон сохранения циркуляции скорости (теорема Томсона): при движении идеальной баротропной жидкости в потенциальном поле массовых сил, циркуляция скорости вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного через одни и те же частицы жидкости (*материального контура*), не изменяется с течением времени, т. е.

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Из теоремы Томсона непосредственно следует *теорема Лагранжа*: если в какой-либо момент времени в некоторой области идеальной баротропной жидкости, движущейся под действием потенциальных массовых сил, нет вихрей, то их не было раньше и не будет в дальнейшем.

12°. Теоремы Гельмгольца для идеальной баротропной жидкости, движущейся в потенциальном поле массовых сил.

А. Теорема о сохранении вихревых линий: частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую линию, образуют ее во все время движения.

Б. Теорема о сохранении интенсивности вихревых трубок: интенсивность любой вихревой трубки остается постоянной во все время движения.

Вихри могут возникать и исчезать в движущейся жидкости в следующих случаях: 1) если жидкость не идеальная, а вязкая; 2) если ее плотность зависит не только от давления, а, например, еще и от температуры; 3) если массовые силы непотенциальны.

2. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

1°. Первый закон термодинамики для движущейся системы имеет вид

$$d\left(U + \frac{Mv^2}{2}\right) = \delta Q + \delta A',$$

или

$$d\left(H + \frac{Mv^2}{2}\right) = \delta Q + \delta A' + d(pV),$$

где U и H — внутренняя энергия и энтальпия системы, объем которой равен V ; p — давление; M — масса системы, δQ — подведенное извне количество теплоты; $\delta A'$ — работа, совершенная внешними силами; v — скорость движения системы.

2°. Дифференциальное уравнение энергии для сжимаемой вязкой жидкости:

$$\rho \frac{du}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \Phi,$$

или

$$\rho \frac{dh}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) + \Phi,$$

где u и h — удельные внутренняя энергия и энтальпия жидкости; ρ , T и p — плотность, термодинамическая температура и давление жидкости; v — ее скорость; K , η и ζ — коэффициенты теплопроводности, внутреннего трения и второй вязкости жидкости (предполагается, что η и ζ не зависят от координат), ϵ — количество теплоты, поступающее в единицу объема жидкости за единицу времени вследствие излучения или каких-либо иных причин, кроме теплопроводности (например, химических реакций), а Φ — диссипативная функция, имеющая вид

$$\Phi = \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\operatorname{div} v)^2.$$

Диссипативная функция представляет собой то количество механической энергии жидкости, которое преобразуется вследствие трения во внутреннюю энергию за единицу времени в единице объема жидкости.

Для идеального газа в случае не очень значительных изменений температуры можно считать, что $\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$

и $\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}$, где c_v и c_p — удельные теплоемкости в изохорном и изобарном процессах.

3°. При $K = \eta = \zeta = \epsilon = 0$ уравнение энергии определяет условие адиабатичности движения идеальной жидкости:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} v, \text{ или } \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} s = 0,$$

где s — энтропия единицы массы жидкости ($c = c_v = c_p$).

В случае несжимаемой жидкости, при $\epsilon = 0$, уравнение энергии имеет вид

$$c_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) + \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\},$$

где c — удельная теплоемкость жидкости.

Для несжимаемой идеальной жидкости, при $\varepsilon = 0$ и $K = \text{const}$,

$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T,$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

где $a = \frac{K}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности.

4°. Конвективным теплообменом называют теплообмен между неравномерно нагретыми частями жидкости или газа, либо между жидкостью (газом) и твердым телом, обусловленный движением макроскопических частей жидкости (газа), а также тепловым движением молекул.

Конвективный теплообмен между жидкостью и твердыми телами называют *теплоотдачей*. В зависимости от причин движения жидкости различают теплоотдачу при *свободной (естественной) конвекции* и теплоотдачу при *вынужденной конвекции*. В первом случае движение жидкости происходит под действием силы тяжести и является следствием неоднородности плотности различно нагретых участков жидкости. Во втором случае относительное движение обусловлено либо перемещением тел в неподвижной жидкости, либо действием на жидкость различного рода насосов, вентиляторов и т. п.

5°. Коэффициентом теплоотдачи называют величину α , характеризующую интенсивность теплоотдачи и равную

$$\alpha = \frac{q}{\Delta T},$$

где q — плотность теплового потока, равная количеству теплоты, передаваемой сквозь единицу площади поверхности тела за единицу времени; ΔT — температурный напор, равный модулю разности между температурами жидкости и поверхности тела. В ряде случаев температурный напор определяют иначе, например, при обтекании тела потоком сжимаемой жидкости, ΔT обычно принимают равным модулю разности между температурой жидкости вдали от тела и той равно-

весной температурой, которую имела бы поверхность тела в отсутствие теплообмена.

Вследствие влияния вязкости относительная скорость жидкости на поверхности тела равна нулю. Поэтому около самой поверхности теплообмен в жидкости осуществляется путем теплопроводности: $q = K | \text{grad } T |_{\text{ст}}$, где K — коэффициент теплопроводности жидкости, $| \text{grad } T |_{\text{ст}}$ — модуль градиента температуры жидкости на границе с телом.

Связь между коэффициентами теплоотдачи и теплопроводности имеет вид

$$\alpha = \frac{K}{\Delta T} | \text{grad } T |_{\text{ст}}.$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

1°. Единицей физической величины A называют условно выбранную физическую величину $[A]$, имеющую тот же самый смысл, что и величина A .

Системой единиц называют совокупность единиц физических величин, относящуюся к некоторой системе величин и образованную в соответствии с принятыми правилами. **Основными единицами** данной системы называют единицы нескольких разнородных физических величин, произвольно выбранных при построении этой системы. Соответствующие физические величины называют **основными величинами** данной системы. Систему единиц называют **абсолютной системой единиц**, если в качестве основных физических величин использованы длина, масса и время. **Производными единицами** называют единицы, устанавливаемые через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими физическими величинами.

Размерностью физической величины B (обозначается $\dim B$) называют выражение, характеризующее связь этой физической величины с основными величинами данной системы единиц. Это выражение представляет собой одночлен в виде произведения символов основных

величин A_i в соответствующих степенях n_i (целых или дробных, положительных или отрицательных):

$$\dim B = A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_k^{n_k}.$$

где k — общее число основных величин.

Физическая величина B и ее единица $[B]$ имеют одну и ту же размерность, которую поэтому можно принимать как соотношение между $[B]$ и основными единицами $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$ данной системы единиц:

$$[B] = [A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k}.$$

Единицы и размерности физических величин в различных системах единиц, а также соотношения между единицами одних и тех же величин в различных системах приведены в Приложении 1.

2°. *Однородными физическими величинами* называют величины, имеющие одинаковые размерности и физический смысл, т. е. отличающиеся лишь по числовому значению (например, координаты точек тела и его линейные размеры).

Одноименными физическими величинами называют величины, имеющие одинаковую размерность, но разный физический смысл. Примером одноименных величин могут служить коэффициент диффузии и кинематическая вязкость.

Безразмерными называют величины, числовые значения которых не зависят от выбора системы единиц. Например, отношение двух однородных или двух одноименных величин является безразмерной величиной. Отношение двух однородных величин называют *симплексом*.

3°. *Аксиомы теории размерностей.*

а) Числовое значение a физической величины A равно отношению этой величины к единице ее измерения $[A]$:

$$a = \frac{A}{[A]}.$$

б) Физическая величина не зависит от выбора ее единицы, т. е. при увеличении единицы в q раз числовое значение данной физической величины уменьшается в q раз.

в) Математическое описание какого-либо физического явления, указывающее функциональную зависимость между числовыми значениями физических величин, не зависит от выбора единиц этих величин. Следовательно, все слагаемые уравнения, описывающего физический процесс, должны иметь одинаковую размерность, так что они могут быть преобразованы к безразмерному виду путем деления обеих частей уравнения на какую-нибудь постоянную величину, имеющую ту же размерность.

4°. *π-Теорема*: всякое соотношение между n размерными величинами, для измерения которых использовано k основных единиц, можно представить в виде соотношения между $n - k$ безразмерными комбинациями $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ этих n величин.

Например, пусть зависимость между числовыми значениями $a_1, \dots, a_n$ размерных величин $A_1, \dots, A_n$ в рассматриваемом явлении имеет вид $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, причем единицы первых k величин установлены независимо друг от друга и приняты в качестве основных, а единицы остальных $n - k$ величин являются производными, т. е.

$$[A_{k+1}] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{m_i}, \dots, [A_n] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{p_i}.$$

Тогда, увеличив основные единицы $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$, соответственно, в $a_1, a_2, \dots, a_k$ раз, можно представить написанное выше соотношение в безразмерном виде:

$$\pi_{n-k} = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-k-1})$$

или

$$\pi_{n-k} = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k-1}),$$

где

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{\prod_{i=1}^k a_i^{m_i}} = \frac{A_{k+1}}{\prod_{i=1}^k A_i^{m_i}}, \dots, \pi_{n-k} = \frac{a_n}{\prod_{i=1}^k a_i^{p_i}} = \frac{A_n}{\prod_{i=1}^k A_i^{p_i}}$$

— безразмерные комбинации, или *степенные комплексы*, физических величин $A_1, \dots, A_n$.

Некоторые следствия π -теоремы:

а) если $n - k = 0$, то это значит, что уравнение $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$ составлено неверно, так как его нельзя привести к безразмерному виду;

б) если $n - k = 1$, то $\pi_n - k = \text{const}$.

5°. Два физических процесса называют *подобными*, если они подчинены одним и тем же физическим законам и все величины ξ'_i , характеризующие один процесс, могут быть получены путем умножения однородных с ними величин ξ''_i , характеризующих другой процесс, на постоянные числа c_i , которые называют *константами* подобия и одинаковы для всех однородных величин: $\xi'_i = c_i \xi''_i$.

Критериями подобия называют безразмерные степенные комплексы, которые входят в безразмерное математическое описание рассматриваемого процесса, составленное с помощью π -теоремы. Для установления вида критериев подобия в каждом конкретном случае необходимо с помощью дифференциальных уравнений процесса и условий однозначности их решения составить список всех размерных величин $A_1, \dots, A_n$, характеризующих этот процесс, а затем применить π -теорему к функциональной зависимости $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, представляющей собой неизвестный интеграл (решение) задачи.

Определяющими критериями подобия называют критерии, которые составлены только из величин, заданных в условиях однозначности, и независимых переменных.

6°. *Первая теорема подобия*: для двух подобных процессов все одноименные критерии подобия попарно равны друг другу, т. е.

$$\pi'_1 = \pi''_1, \pi'_2 = \pi''_2, \text{ и т. д.}$$

Вторая теорема подобия: критерии подобия связаны друг с другом *уравнением подобия*, которое является безразмерным решением (интегралом) рассматриваемой задачи, справедливым для всех подобных процессов.

Третья теорема подобия: для того, чтобы два процесса были подобны, необходимо и достаточно, чтобы

они были качественно одинаковы, а их одноименные определяющие критерии подобия были равны.

Качественно одинаковыми называют процессы, математические описания которых отличаются только числовыми значениями содержащихся в них размерных величин.

7°. Теория подобия является научной основой экспериментальных исследований сложных явлений методом моделирования и методом аналогии.

Метод моделирования состоит в воспроизведении и исследовании на модели процессов, качественно одинаковых с процессами, имеющими место в реальных объектах. Результаты эксперимента могут быть распространены на эти объекты, если соблюдены условия, сформулированные в третьей теореме подобия.

Метод аналогии состоит в изучении какого-либо процесса путем экспериментального исследования качественно других физических процессов, дифференциальные уравнения протекания которых и условия однозначности по своей форме совпадают с таковыми для изучаемого процесса. В настоящее время широко применяют экспериментальные методы исследования различных явлений, основанные на аналогии между электрическими, гидродинамическими, тепловыми, механическими и другими явлениями. Применительно к тепловым процессам метод аналогии страдает существенным недостатком, так как не позволяет учесть зависимость от температуры физических свойств среды (вязкости, теплопроводности, теплоемкости и т. д.).

8°. Основными критериями подобия в гидроаэродинамике являются число Рейнольдса Re , число Фруда Fr , число Струхаля Sh и число Маха M .

Число Рейнольдса $Re = \frac{vl}{\nu}$, где v — характерная для данной задачи скорость жидкости, l — характерный линейный размер, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Выбор характерной скорости и характерного размера в зависимости от рассматриваемой задачи можно производить по-разному. Например, при течении несжимаемой жидкости в круглой трубе диаметром d величина $l = d$, а v — средняя по сечению скорость жидкости $\left(v = \frac{4V_{\text{сек}}}{\pi d^2} \right)$, где $V_{\text{сек}}$ — секундный

объемный расход жидкости); при поперечном обтекании жидкостью круглого цилиндра диаметром d величина $l = d$, а v — скорость невозмущенной жидкости, т. е. ее скорость вдали перед цилиндром. Число Рейнольдса характеризует соотношение между силами инерции и силами трения в потоке жидкости.

9°. Число Фруда $Fr = \frac{v^2}{gl}$, где v — скорость жидкос-

ти вдали от обтекаемого ею тела, l — характерный линейный размер тела, g — ускорение свободного падения. Число Фруда характеризует соотношение между силами инерции и силами тяжести в потоке жидкости. Оно играет важную роль при моделировании процессов, связанных с работой различных гидротехнических сооружений, движением корабля и т. п. При моделировании газовых потоков этот критерий подобия не играет существенной роли, так как ввиду малой плотности газов влиянием силы тяжести обычно можно пренебречь.

10°. Число Струхала является критерием подобия неустановившихся движений жидкости. Оно равно $Sh = \frac{l}{vT}$, где v — характерная скорость, l — характерный линейный размер, а T — характерный интервал времени (например, для периодических движений T — период) и $Sh = \frac{lv}{v}$, где $v = \frac{1}{T}$ — частота.

11°. Число Маха $M = \frac{v}{v_{zv}}$, где v — скорость газа в рассматриваемой точке потока, v_{zv} — скорость звука в газе в той же точке. Число M является мерой влияния сжимаемости газа на его движение. В тех случаях, когда $M \ll 1$, газ можно считать несжимаемой жидкостью. Движение газа называют *дозвуковым*, если $M < 1$, и *сверхзвуковым*, если $M > 1$. Число M является основным критерием подобия для установившихся движений газа с большими скоростями.

12°. Основными критериями подобия в случае стационарной теплоотдачи при свободной конвекции несжимаемой жидкости являются числа Нуссельта Nu , Грасгофа Gr и Прандтля Pr , а в случае стационарной

теплоотдачи при вынужденной конвекции — числа Nu , Re и Pr . Часто применяется также число Пекле $Pe = RePr$.

13°. Критерий Нуссельта: $Nu = \frac{\alpha l}{K}$, где α — коэффициент теплоотдачи, l — характерный размер, K — коэффициент теплопроводности жидкости.

14°. Критерий Прандтля характеризует физические свойства жидкости. Он равен $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c}{K}$, где ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, a — ее коэффициент температуропроводности, η и c — коэффициент динамической вязкости и удельная теплоемкость жидкости (для газов $c = c_p$).

15°. Критерий Грасгофа: $Gr = \frac{g l^3}{\nu^2} \alpha \Delta T$, где α — изобарный коэффициент расширения жидкости, ν — ее коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение свободного падения, l — характерный размер, ΔT — температурный напор, равный модулю разности между температурами жидкости и стенки.

4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

1°. В соответствии с механическим принципом относительности задача о силовом взаимодействии между телом, движущемся равномерно и прямолинейно со скоростью u в неподвижной неограниченной жидкости, и жидкостью эквивалентна задаче о взаимодействии между неподвижным телом и набегающим на него стационарным потоком жидкости.

2°. Уравнение Навье—Стокса для стационарного течения жидкости в отсутствие массовых сил имеет вид

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{v}.$$

В случае обтекания тела потоком несжимаемой жидкости ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) при малых значениях числа Рейнольдса $\left(Re = \frac{v_0 l}{\nu} \ll 1 \right.$, где l — характерный размер тела)

инерционный член $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \ll \nu \Delta \mathbf{v}$, и это уравнение можно представить в следующей приближенной форме:

$$\eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad } p = 0 \text{ или } \Delta \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

3°. Силу сопротивления F , действующую со стороны жидкости на медленно движущееся в ней тело шарообразной формы, определяют по формуле Стокса:

$$F = -6\pi\eta R u,$$

где R — радиус тела, u — его скорость, η — коэффициент динамической вязкости жидкости. Формула справедлива при $Re \ll 1$ ($Re = \frac{uR\rho}{\eta}$, ρ — плотность жидкости).

Скорость u установившегося падения твердого шара в вязкой жидкости, происходящего под действием силы тяжести, в пределах применимости формулы Стокса равна

$$u = \frac{2R^2 g(\rho' - \rho)}{9\eta},$$

где ρ' — плотность шара, g — ускорение свободного падения.

Сила сопротивления и скорость установившегося падения шарообразной капли жидкости равны:

$$F = 2\pi\eta R u \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}, \quad u = \frac{2R^2 g(\rho' - \rho)(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')},$$

где ρ' и η' — плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости, образующей каплю.

Для маленького пузырька пара, всплывающего в жидкости, $\rho' \approx 0$ и $\eta' \approx 0$. Поэтому сила сопротивления

$$F = 4\pi\eta R u$$

и скорость перемещения пузырька

$$u = \frac{R^2 g \rho}{3\eta}.$$

4°. При больших значениях числа Рейнольдса приближенно можно считать, что влияние вязкости проявляется только в той части жидкости, которая движется в непосредственной близости от поверхности обтекаемого ею тела и поэтому называется *пограничным слоем*.

Скорость жидкости на поверхности тела равна нулю (*условие прилипания*), скорость на внешней границе пограничного слоя зависит от скорости и поперечных размеров набегающего потока, формы и размеров тела. В случае продольного обтекания тонкой пластины дозвуковым потоком эта скорость равна скорости набегающего потока.

Толщина пограничного слоя постепенно возрастает при перемещении вдоль поверхности тела по направлению течения жидкости. При прочих равных условиях пограничный слой тем тоньше, чем больше число Рейнольдса.

Вне пограничного слоя жидкость с достаточной степенью точности можно считать идеальной.

5°. Возможны два качественно различных типа течения вязкой жидкости — ламинарное и турбулентное. *Ламинарным* называют упорядоченное течение жидкости, при котором траектории соседних частиц мало отличаются друг от друга, так что жидкость можно рассматривать как совокупность отдельных слоев, движущихся с разными скоростями, не перемешиваясь друг с другом. *Турбулентным* называют течение жидкости, при котором ее частицы совершают неустановившиеся неупорядоченные движения по сложным траекториям, в результате чего происходит интенсивное перемешивание различных слоев жидкости.

Ламинарное течение может быть как установившимся, так и неустановившимся, турбулентное — только неустановившимся (скорость жидкости в каждой точке пространства нерегулярно изменяется во времени). Для характеристики турбулентного потока используют понятие *средней скорости* $\langle v \rangle$ в данной точке пространства, получающейся в результате усреднения истинной скорости v за достаточно большой промежуток времени. Разность $v' = v - \langle v \rangle$ называют *пульсацией скорости*. Турбулентное течение условно считают установившимся, если $\langle v \rangle$ не зависит от времени

$$\left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} = 0 \right).$$

Турбулентное течение возникает в результате потери устойчивости ламинарным течением при достаточно больших значениях числа Рейнольдса.

6°. Уравнения установившегося плоского движения несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

где x и y — криволинейные координаты, отсчитываемые вдоль поверхности тела в направлении течения жидкости (x) и по нормали к этой поверхности (y); p — давление на внешней границе пограничного слоя. Давление передается сквозь пограничный слой без изменения, т. е. $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $p = p(x)$, и связано со скоростью $\bar{v}$

на внешней границе пограничного слоя соотношением, вытекающим из уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\bar{v} \frac{d\bar{v}}{dx}.$$

7°. В случае ламинарного пограничного слоя на пластине, продольно обтекаемой несжимаемой жидкостью, касательное напряжение на поверхности пластины, вызываемое силами трения, равно

$$\tau = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho v_0^3}{x}} = 0,332 \rho v_0^2 \sqrt{\frac{1}{Re_x}},$$

где ρ и η — плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости, v_0 — скорость набегающего потока, x — расстояние от передней кромки пластины, $Re_x = x v_0 \frac{\rho}{\eta}$. Если длина пластины по потоку равна l , то среднее значение напряжения трения по всей пластине

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \tau dx = 0,664 \rho v_0^2 \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

где $Re = l v_0 \frac{\rho}{\eta}$.

8°. Число Рейнольдса $(Re_x)_{кр}$, при котором происходит переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный называют *критическим*. Для продольного обтекания пластин и тел с малой кривизной поверхности

$(Re_x)_{кр} \approx 300\,000$ и в сильной степени зависит от степени начальной турбулентности набегающего потока, равной отношению среднеквадратичной пульсации скорости набегающего потока к его средней скорости:

$$\frac{\sqrt{\langle v_0^2 \rangle}}{\langle v_0 \rangle}.$$

Турбулизация пограничного слоя приводит к возрастанию градиента скорости жидкости на поверхности тела и увеличению напряжения трения, так как в этом случае внутреннее трение в жидкости обусловлено одновременно действующими процессами переноса импульса как за счет теплового движения молекул, так и за счет турбулентного перемешивания.

5. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБАХ

1°. Из уравнения неразрывности следует, что при установившемся течении жидкости в трубе

$$m_{сек} = \int_S \rho v_n dS = \text{const},$$

где $m_{сек}$ — масса жидкости, протекающей за единицу времени сквозь каждое поперечное сечение трубы (секундный массовый расход), ρ — плотность жидкости, dS — элемент площади поперечного сечения, v_n — нормальная к площадке dS составляющая скорости жидкости.

Если жидкость несжимаема, то

$$V_{сек} = \int_S v_n dS = \text{const},$$

где $V_{сек}$ — объем жидкости, протекающей за единицу времени сквозь произвольное поперечное сечение трубы (секундный объемный расход).

В случае течения идеальной жидкости в цилиндрической трубе ($S = \text{const}$) скорость $v_n = v$ и одинакова во всех точках данного поперечного сечения.

2°. При движении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрической трубе поток в начальном участке трубы состоит из двух частей — пограничного слоя у стенок и невозмущенного ядра, в пределах которого скорость жидкости во всех точках данного поперечного

сечения одинакова. По мере удаления от входа в трубу толщина пограничного слоя увеличивается до тех пор, пока на расстоянии $l_{\text{стаб}}$ он не заполняет все поперечное сечение трубы. Начальный участок длиной $l_{\text{стаб}}$ называют участком гидродинамической стабилизации, а течение жидкости за этим участком — стабилизированным, так как ему соответствует одинаковое по всем сечениям поле скоростей жидкости. Длина $l_{\text{стаб}}$ возрастает с увеличением размеров трубы и числа Рейнольдса (для ламинарного потока в круглой трубе $l_{\text{стаб}} \sim R \cdot \text{Re}$,

где R — радиус трубы, $\text{Re} = \frac{2V_{\text{сек}}}{\pi R \nu}$).

3°. В случае стабилизированного ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе, ось которой совпадает с осью Oz прямоугольной декартовой системы координат, скорость v жидкости во всех точках трубы параллельна оси Oz : $v_x = v_y = 0$ и $v_z = v$. Из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ т. е. } v = f(x, y).$$

Из уравнения Навье—Стокса следует:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l},$$

где Δp — падение давления на участке трубы длиной l .

4°. Для круглой цилиндрической трубы это уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от оси трубы.

Распределение скоростей жидкости по сечению трубы выражается формулой

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2),$$

где R — радиус трубы, r — расстояние от оси до рассматриваемой точки поперечного сечения, η — коэффициент динамической вязкости жидкости, Δp — падение давления на участке трубы длиной l .

Секундный объемный расход жидкости определяют по формуле Пуазейля:

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p.$$

5°. Если труба имеет эллиптическое сечение, то

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\eta l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right],$$

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi a^3 b^3}{4\eta l (a^2 + b^2)} \Delta p,$$

где a и b — полуоси эллипса, x и y — координаты рассматриваемой точки поперечного сечения в системе координат, оси Ox и Oy которой совпадают с полуосями a и b эллипса.

6°. Для течения в кольцевом зазоре между соосными цилиндрическими поверхностями с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln \frac{r}{R_2} \right] \quad (R_1 \leq r \leq R_2),$$

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} \left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right].$$

7°. Критическое число Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$ ($Re = \frac{4V_{\text{сек}}}{\pi d v}$,

где d — диаметр трубы), соответствующее переходу ламинарного течения в турбулентное, для гладких круглых труб имеет значение порядка 2300.

Для турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе имеется ряд полуэмпирических формул.

8°. Для стационарного адиабатического течения невязкой сжимаемой жидкости газа в трубе переменного сечения зависимость плотности потока жидкости ρv от скорости v имеет вид

$$\frac{d}{dv}(\rho v) = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

где c — местная скорость звука, а ρ — плотность, соответствующие параметрам состояния газа в сечении, где его скорость равна v .

Величина ρv достигает максимального значения $\rho_c v_c$ при скорости v_c , равной местной скорости звука c и пазываемой *критической скоростью*. Отношение $\frac{v}{c} = \lambda$

называют *коэффициентом скорости*. При $\lambda < 1$ поток является дозвуковым, а при $\lambda > 1$ — сверхзвуковым. Для перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому необходимо, чтобы площади S поперечных сечений трубы изменялись вдоль ее оси по закону

$$S = \frac{m_{\text{сек}}}{\rho v} = \frac{\rho_c v_c}{\rho v} S_c,$$

т. е. в области дозвукового течения постепенно уменьшались вплоть до критического значения S_c , а затем вновь увеличивались. Такую трубу называют *соплом Лавала*.

Для идеального газа

$$c_c = c_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} B T_0},$$

$$\rho_c = \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{1/(\kappa - 1)}, \quad T_c = \frac{2}{\kappa + 1} T_0,$$

$$p_c = p_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\kappa/(\kappa - 1)},$$

где κ — показатель адиабаты; B — удельная газовая постоянная; p_0 , ρ_0 и T_0 — давление, плотность и температура газа, адиабатически заторможенного до скорости $v = 0$; c_0 — скорость звука в газе при температуре T_0 ; ρ_c , c_c и T_c — критические значения плотности, температуры и давления.

В произвольном сечении трубы параметры идеального газа удовлетворяют уравнениям:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{1/(\kappa - 1)} = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{v^2}{c_c^2} \right)^{1/(\kappa - 1)},$$

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right) = T_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{v^2}{c_c^2} \right),$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{1/(\kappa - 1)} = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{v^2}{c_c^2} \right)^{1/(\kappa - 1)}.$$

Раздел IV

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Глава 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ЗАКОН КУЛОНА

1°. *Электростатикой* называют учение о свойствах и взаимодействии электрических зарядов, неподвижных относительно избранной для их изучения инерциальной системы отсчета.

Существует два рода электрических зарядов — положительные и отрицательные. Одноименные заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные притягиваются друг другом.

2°. *Закон сохранения электрических зарядов*: алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе постоянна.

Электрический заряд любого тела состоит из целого числа *элементарных зарядов*. Наименьшей стабильной частицей с отрицательным элементарным зарядом является электрон, а с положительным — позитрон — античастица электрона. Ядра любых атомов содержат протоны — носители положительного элементарного заряда. Электроны и протоны входят в состав атомов любого вещества.

В нейтральном (незаряженном) теле содержатся заряды противоположных знаков, равные по абсолютной величине.

Электрические заряды считаются *точечными*, если линейные размеры тел, на которых эти заряды сосредоточены, во много раз меньше любых расстояний, рассматриваемых в данной задаче.

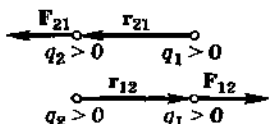
3°. *Закон Кулона*: сила F электростатического взаимодействия между двумя точечными электрическими

зарядами q_1 и q_2 , находящимися неподвижно в вакууме, прямо пропорциональна произведению величин зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

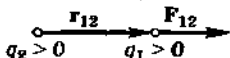
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \dots \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

4°. Силы электростатического взаимодействия — центральные силы. Сила F_{21} действующая в вакууме на точечный заряд q_2 со стороны точечного заряда q_1 , равна



$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} r_{21},$$



где r_{21} — радиус-вектор, соединяющий заряды q_1 и q_2 , $r = |r_{21}|$ (рис. IV.1.1).

Рис. IV.1.1

5°. Если точечные заряды q_1 и q_2 находятся в однородном и безграничном газообразном или жидком диэлектрике, то сила их электростатического взаимодействия

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} r_{21},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами q_1 и q_2 в данной среде меньше, чем в вакууме. Уменьшение силы F_{21} в ϵ раз обусловлено явлением *электрострикции*, т. е. деформации диэлектрика под влиянием электрического поля. При деформации жидкие и газообразные диэлектрики, прилегая вплотную к заряженным телам, производят на них дополнительное механическое воздействие. В твердых диэлектриках заряженные тела располагаются внутри полостей, и при прочих равных условиях силы, действующие на эти тела, зависят от формы полостей.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

1°. Согласно теории близкого действия взаимодействия между частицами вещества и удаленными друг от друга макроскопическими телами осуществляются через посредство физических полей, которые создаются этими частицами или телами в окружающем пространстве. Представление о физических полях тесно связано с конечностью скоростей распространения в пространстве изменений любых взаимодействий. В специальной теории относительности в соответствии с данными опытов утверждается, что эти скорости не превышают скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

2°. Взаимодействие между неподвижными электрически заряженными частицами или телами осуществляется посредством электростатического поля. Электростатическое поле представляет собой стационарное, т. е. не изменяющееся во времени, электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами. Оно является частным случаем электромагнитного поля, посредством которого осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами, которые в общем случае могут произвольным образом двигаться относительно системы отсчета.

3°. Силовой характеристикой электрического поля служит вектор его напряженности

$$E = \frac{F}{q_0},$$

где F — сила, действующая со стороны поля на неподвижный «пробный» заряд q_0 , помещенный в рассматриваемую точку поля. При этом предполагается, что «пробный» точечный заряд q_0 достаточно мал, так что не искажает поля, напряженность которого с его помощью измеряется. Напряженность электрического поля в какой-либо точке равна силе, действующей со стороны поля на помещенный в эту точку единичный положительный «пробный» точечный заряд, и совпадает с ней по направлению.

Напряженность электростатического поля не зависит от времени. Электростатическое поле называют однородным, если его напряженность E во всех точках поля одинакова. В противном случае поле называют неоднородным.

Для графического изображения электростатических полей пользуются *силовыми линиями*. Силовыми линиями (*линиями напряженности*) называют линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности в этой точке поля. Силовые линии электростатического поля разомкнуты. Они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных зарядах (в частности, они могут уходить в бесконечность или приходить из бесконечности). В силу однозначности направления вектора напряженности в каждой точке поля, силовые линии нигде не пересекаются. Траектория свободной заряженной частицы, движущейся в поле, совпадает с силовой линией поля только в том случае, если поле однородно (силовые линии такого поля — система параллельных прямых) и начальная скорость частицы направлена вдоль силовой линии.

4°. Результирующая сила F , действующая на пробный заряд q_0 со стороны поля, созданного системой неподвижных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$, равна векторной сумме сил F_i , приложенных к нему со стороны каждого из полей зарядов q_i :

$$F = \sum_{i=1}^n F_i$$

— принцип наложения (*суперпозиции*).

Отсюда следует принцип наложения (*суперпозиции*) напряженностей электрических полей:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i.$$

Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности.

В случае непрерывного распределения электрических зарядов

$$E = \int dE,$$

интегрирование производится по области, где распределены заряды:

а) вдоль линии, если заряды распределены вдоль линии с линейной плотностью $\tau = \frac{dq}{dl}$ (dq — заряд элемента линии длиной dl);

б) по поверхности, если заряды распределены по поверхности с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (dS — элементарная площадь поверхности);

в) по объему, если заряды распределены в объеме с объемной плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$ (dV — элемент объема).

5°. Если в электростатическом поле имеются диэлектрики, то при рассмотрении этого поля различают два рода зарядов — *свободные* и *связанные*. *Связанными зарядами* называют заряды, входящие в состав атомов и молекул диэлектрика, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой. Все остальные заряды называют *свободными*. Примерами свободных зарядов могут служить электроны проводимости в металлах, ионы в газах и электролитах, избыточные заряды, сообщенные проводящему или непроводящему телу и обуславливающие нарушение его электронейтральности, и т. д.

Напряженность поля E в диэлектрике равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых свободными (E_0) и связанными (E_p) (поляризационными) зарядами:

$$E = E_0 + E_p.$$

В примерах электростатических полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что среда, окружающая свободные заряды, представляет собой изотропный диэлектрик, который однороден либо в пределах всего поля, либо в пределах областей ограниченных эквипотенциальными поверхностями. При этих условиях

$$E = \frac{E_0}{\epsilon},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке поля, т. е. при задан-

ном распределении свободных зарядов напряженность электростатического поля в однородном изотропном диэлектрике меньше, чем в вакууме, в ϵ раз (обобщенный закон Кулона).

6°. Напряженность электростатического поля точечного заряда q равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} r,$$

где r — радиус-вектор, проведенный из точечного заряда в исследуемую точку поля ($|r| = r$), ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 — электрическая постоянная.

7°. Напряженность электростатического поля системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$ равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon r_i^3} r_i.$$

В частности, для электрического диполя — системы двух равных по модулю и противоположных по знаку электрических зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, малом по сравнению с расстоянием r до рассматриваемой точки поля,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{3(p_e \cdot r)r}{r^5} - \frac{p_e}{r^3} \right),$$

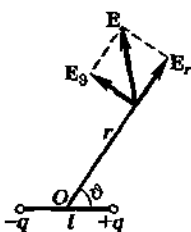


Рис. IV.1.2

где $p_e = ql$ — электрический момент диполя; вектор l направлен по оси диполя от отрицательного заряда, к положительному. В сферической системе координат r, ϑ и φ с центром в середине диполя и полярной осью, параллельной p_e (рис. IV.1.2),

$$E_r = \frac{p_e \cos \vartheta}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p_e \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}, \quad E_\varphi = 0.$$

Модуль вектора напряженности:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{\epsilon r^3} \sqrt{3\cos^2 \vartheta + 1}.$$

8°. Напряженность электростатического поля вне равномерно заряженной бесконечной прямой линии,

кругового цилиндра, заряженного по поверхности, в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами (коаксиальный кабель, цилиндрический конденсатор):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{r}{r},$$

где τ — линейная плотность зарядов, r — радиус-вектор кратчайшего расстояния до рассматриваемой точки поля от оси цилиндра. Напряженность поля внутри цилиндра $E_i = 0$.

9°. Напряженность однородного электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon},$$

где σ — поверхностная плотность зарядов.

10°. Напряженность электростатического поля между двумя равномерно и разноименно заряженными бесконечными параллельными плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon},$$

где σ — модуль поверхностной плотности зарядов обеих плоскостей.

11°. Напряженность электростатического поля шара радиуса R , заряд q которого равномерно распределен по его поверхности, совпадает вне шара с напряженностью поля точечного заряда q , помещенного в центре шара:

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}.$$

Напряженность поля внутри шара $E_i = 0$.

12°. Напряженность электростатического поля шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью ρ :

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{R}{r} \right)^3 r, \quad (r > R)$$

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0\epsilon} \rho r, \quad (r \leq R).$$

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ. ТЕОРЕМА ГАУССА—ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ ПОТОКА СМЕЩЕНИЯ

1°. Электрическим смещением (электрической индукцией) D называют векторную величину, характеризующую электрическое поле.

Для поля в вакууме

$$D = \epsilon_0 E.$$

Для поля в диэлектрике

$$D = \epsilon_0 E + P,$$

где P — вектор поляризации.

Если среда изотропна, то

$$D = \epsilon \epsilon_0 E.$$

Если, кроме того, среда однородна, то E обратно пропорционально ϵ и D не зависит от ϵ (при заданном распределении свободных зарядов).

2°. Основной задачей электростатики является отыскание векторов D и E в каждой точке электрического поля, созданного данной системой источников поля — электрических зарядов. Для решения этой задачи, помимо принципа суперпозиций полей, применяют метод, основанный на вычислении потока смещения.

Элементарный поток $d\Phi_e$ смещения D сквозь участок поверхности dS равен

$$d\Phi_e = D \cdot n \, dS = D \, dS \cos(D, n) = D_n \, dS = D \, dS_n,$$

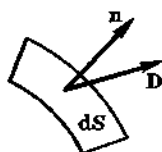


Рис. IV.1.3

где n — единичный вектор внешней нормали к площадке dS (рис. IV.1.3), D_n — проекция вектора D на направление нормали, $dS_n = dS \cos(D, n)$. Поток смещения Φ_e сквозь произвольную поверхность S находят суммированием (интегрированием) всех элементарных потоков:

$$\Phi_e = \int_S D \, dS \cos(D, n) = \int_S D_n \, dS = \int_S D \, dS_n.$$

Если поле однородно и плоская поверхность S расположена перпендикулярно полю, то $D_n = D = \text{const}$ и $\Phi_e = DS$.

3°. Теорема Гаусса—Остроградского: поток смещения Φ_e сквозь произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме свободных электрических зарядов q_i , охватываемых этой поверхностью:

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i.$$

Поток смещения Φ_e сквозь произвольную замкнутую поверхность, не охватывающую свободных зарядов, равен нулю.

Теорема Гаусса—Остроградского в дифференциальной форме (ρ — объемная плотность свободных зарядов):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

В такой форме теорема показывает, что источниками электрического смещения являются свободные электрические заряды. Теорема Гаусса—Остроградского является одним из уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Применение теоремы Гаусса—Остроградского к вычислению $\mathbf{D}$ сводится к выбору такой замкнутой поверхности, чтобы она допускала элементарным путем вычисление потока смещения Φ_e .

4. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1°. Элементарная работа δA , совершаемая силой $\mathbf{F}$, действующей на точечный электрический заряд q' , находящийся в электростатическом поле с напряженностью $\mathbf{E}$, равна

$$\delta A = F dl \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = q' E \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) dl,$$

где $d\mathbf{l}$ — элементарное перемещение заряда, $(\mathbf{F}, d\mathbf{l})$ — угол между направлениями векторов $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$.

Полная работа A при конечном перемещении заряда q' из точки 1 в точку 2 поля (рис. IV.1.4) равна

$$A = q' \int_1^2 E dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

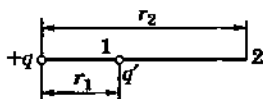


Рис. IV.1.4

2°. Если электростатическое поле создано точечным зарядом q , то

$$A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек 1 и 2 от заряда q , ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость.

Работа электрических сил отталкивания одноименных зарядов положительна при удалении их друг от друга и отрицательна, если заряды сближаются. Работа электрических сил притяжения разноименных зарядов положительна при сближении их и отрицательна при удалении зарядов друг от друга. Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда q' в поле, созданном зарядом q , не зависит от формы пути, а зависит лишь от начального и конечного положений заряда (потенциальность электростатических сил).

Работа, которую совершают электрические силы при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому пути L , равна

$$A = \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Этот интеграл называют *циркуляцией напряженности* по замкнутому контуру L .

Циркуляция напряженности электростатического поля равна нулю (потенциальный характер электростатического поля):

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \, dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

Условие потенциальности электростатического поля в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

3°. Работа, совершаемая силами поля при перемещении электрического заряда q' в электростатическом поле, созданном зарядом q , равна убыли потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ заряда q' :

$$A = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}},$$

где $W_{\text{п1}}$ и $W_{\text{п2}}$ — значения потенциальной энергии заряда в начальной и конечной точках траектории. При

перемещении заряда q' в электростатическом поле, созданном произвольной системой зарядов ($q_1, q_2, \dots, q_n$), электростатические силы совершают работу, равную алгебраической сумме работ, произведенных силами, действующими на q' со стороны каждого из зарядов q_i .

Изменение потенциальной энергии $\Delta W_{\text{п}}$ заряда q' при перемещении его из точки 1 в точку 2 в поле системы точечных зарядов q_i :

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{r_{i2}} - \frac{q_i}{r_{i1}} \right),$$

где r_{i1} и r_{i2} — начальное и конечное расстояния между зарядами q_i и q' ; суммирование проводится по всем n зарядам системы.

4°. Потенциальная энергия электрического заряда q' в данной точке электростатического поля, удаленной на расстояние r от заряда q , создающего поле, при условии, что $W_{\text{п}}(\infty) = 0$, равна

$$W_{\text{п}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Потенциальная энергия отталкивания одноименных зарядов положительна и возрастает при сближении зарядов. Потенциальная энергия притяжения разноименных зарядов отрицательна и возрастает до нуля при удалении одного из зарядов в бесконечность. На рис. IV.1.5 показана зависимость $W_{\text{п}}(r)$ для двух точечных зарядов: кривая 1 соответствует их отталкиванию, кривая 2 — притяжению.

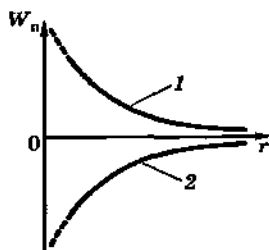


Рис. IV.1.5

5°. Потенциал электрического поля является его энергетической характеристикой. *Потенциалом* в данной точке поля называют скалярную величину, равную потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ единичного положительно заряда, помещенного в эту точку:

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q}.$$

6°. Работа, которая совершается силами электростатического поля при перемещении точечного электрического заряда q , равна произведению этого заряда на разность потенциалов в начальной (1) и конечной (2) точках пути:

$$A = W_{\pi 1} - W_{\pi 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если точка 2 находится в бесконечности, то $W_{\pi 2} = 0$ и принимается, что $\varphi_2 = 0$. Работа A_{∞} перемещения заряда q из точки 1 в бесконечность:

$$A_{\infty} = W_{\pi 1} = q\varphi_1;$$

следовательно, $\varphi = \frac{A_{\infty}}{q}$.

Потенциал электростатического поля равен работе, совершаемой электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность. Потенциал равен также работе, которую совершают внешние силы (против сил электрического поля) при перемещении единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку.

За нуль потенциала часто принимают не значение его в бесконечности, а значение потенциала Земли. Это несущественно, физический смысл имеет разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, а не потенциалы в этих точках.

7°. *Эквипотенциальной поверхностью* называют геометрическое место точек в электростатическом поле, имеющих одинаковый потенциал. В любой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности электростатического поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала.

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Напряженность в произвольной точке электростатического поля равна градиенту потенциала поля в этой точке, взятому со знаком минус. Знак минус показывает, что вектор $\mathbf{E}$ направлен в сторону убывания потенциала.

Так как в любой точке поля $\mathbf{E}$ — величина конечная, то φ — непрерывная функция координат точек поля.

8°. При наложении электростатических полей их потенциалы складываются алгебраически. Если в электростатическом поле имеются диэлектрики, то потенциал φ в произвольной точке поля равен алгебраической сумме потенциалов в этой точке для полей, создаваемых свободными (φ_0) и связанными (φ_p) зарядами:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_p$$

При условии, что $\varphi(\infty) = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho + \rho_p}{r} dV + \int \frac{\sigma + \sigma_p}{r} dS \right],$$

где ρ и ρ_p — объемные плотности свободных и связанных зарядов, σ и σ_p — поверхностные плотности свободных и связанных зарядов, r — расстояние от элементов объема dV и поверхности dS до рассматриваемой точки поля, а интегрирование производится по всему пространству, занятому свободными и связанными зарядами.

В примерах электростатических полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что диэлектрик, заполняющий поле, однороден и изотропен. В таком случае при заданном распределении свободных зарядов потенциал электростатического поля в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем в вакууме: $\varphi = \frac{\varphi_0}{\epsilon}$ — и удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \text{ или } \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0},$$

где Δ — оператор Лапласа, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, ρ — объемная плотность свободных зарядов.

9°. Потенциал поля точечного заряда q при условии $\varphi(\infty) = 0$ равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где r — расстояние точки поля, обладающей потенциалом φ , от заряда q ; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 — электрическая постоянная.

10°. Потенциал поля произвольной системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$ при условии $\varphi(\infty) = 0$ равен

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}.$$

В частности, потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{\epsilon r^3},$$

где $\mathbf{p}_e$ — электрический момент диполя, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра диполя в исследуемую точку поля.

11°. Потенциал электростатического поля, созданного заряженными поверхностями (потенциал поля поверхностных зарядов), при условии $\varphi(\infty) = 0$ равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r}.$$

Потенциал поля объемных зарядов при условии $\varphi(\infty) = 0$ равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Здесь ρ и σ — объемная и поверхностная плотности свободных зарядов, r — расстояние от элементарного объемного заряда ρdV или поверхностного заряда σdS до рассматриваемой точки поля. Интегрирование производится по поверхностям и объемам, где распределены электрические заряды.

12°. Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от равномерно заряженной бесконечной прямой линии, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где τ — линейная плотность зарядов, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 — электрическая постоянная. Те же формулы справедливы для поля, создаваемого равномерно заряженным круговым цилиндром радиуса R и бесконечной длины, если $r \geq R$.

13°. Разность потенциалов между двумя точками поля 1 и 2, расположенными на расстояниях x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} (x_2 - x_1),$$

где σ — поверхностная плотность зарядов.

14°. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя равномерно и разноименно заряженными бесконечными параллельными плоскостями равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0\epsilon},$$

где d — расстояние между плоскостями.

15°. Потенциал электростатического поля шара радиуса R с зарядом q , равномерно распределенным по его поверхности, вне шара совпадает с потенциалом поля точечного заряда q , помещенного в центре шара [$\varphi(\infty) = 0$]:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Внутри шара потенциал поля постоянен и равен $\varphi(R)$.

16°. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками электростатического поля шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с объемной плотностью зарядов ρ :

внутри шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{6\epsilon_0\epsilon} (r_2^2 - r_1^2),$$

вне шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

где $q = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ — общий заряд шара, r_1 и r_2 — расстояния от точек до центра шара.

5. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1°. Под действием внешнего электростатического поля заряды в проводнике (электроны проводимости в металлическом проводнике) перераспределяются та-

ким образом, что напряженность результирующего поля в любой точке внутри проводника равна нулю ($E = 0$). Во всех точках его поверхности $E = E_n \neq 0$ и $E_t = 0$, где E_n и E_t — соответственно нормальная и касательная составляющие вектора напряженности. Весь объем проводника является эквипотенциальным: во всех точках внутри проводника потенциал ϕ одинаков. Поверхность проводника также эквипотенциальна. В заряженном проводнике некомпенсированные электрические заряды располагаются только на его поверхности.

2°. Электрическое смещение и напряженность поля в однородном и изотропном диэлектрике вблизи поверхности заряженного проводника (вне его):

$$D = \sigma,$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, σ — поверхностная плотность электрических зарядов на проводнике.

Распределение электрических зарядов на поверхности проводников различной формы, находящихся в однородном диэлектрике, зависит от кривизны поверхности: σ возрастает с увеличением кривизны. На поверхностях внутренних полостей в проводниках $\sigma = 0$. Многократная передача зарядов изнутри полому проводнику повышает его потенциал до величин, ограничиваемых стеканием зарядов с внешней поверхности проводника. На этом принципе основан *электростатический генератор Ван-де-Граафа*, применяемый в линейных ускорителях.

3°. На элемент dS поверхности заряженного проводника действует сила dF , направленная в сторону внешней нормали к поверхности проводника. Если проводник находится в вакууме, то

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dS,$$

где E — напряженность электростатического поля у поверхности проводника. Если проводник находится в однородном жидком или газообразном диэлектрике, то

благодаря явлению электрострикции сила dF в ϵ раз меньше ($\sigma = \text{const}$), чем в вакууме:

$$dF = \frac{\sigma^2 dS}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} dS,$$

где E — напряженность электростатического поля в диэлектрике вблизи поверхности проводника.

Давление p на поверхность заряженного проводника, вызванное этой силой, равно

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2}.$$

Силы F притяжения, действующие на разноименно заряженные обкладки плоского конденсатора, разделенные твердым диэлектриком, такие же как и в том случае, когда между обкладками находится вакуум:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S,$$

где S — площадь обкладки, σ — поверхностная плотность свободных зарядов на обкладках.

Если пространство между пластинами заполнено однородным жидким или газообразным диэлектриком, то

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon\epsilon_0} S = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} S,$$

где E — напряженность поля в конденсаторе.

4°. Явление, состоящее в электризации незаряженного проводника во внешнем электростатическом поле, называют *электростатической индукцией*. Оно заключается в разделении положительных и отрицательных зарядов, имеющих в проводнике в равных количествах. *Наведенные (индуцированные) заряды* исчезают при удалении проводника из электростатического поля. При любом способе электризации проводника электрические заряды распределяются на его поверхности, и внутренняя полость в замкнутом проводнике экранируется от внешних электростатических полей. На этом основана *электростатическая защита*.

6. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

1°. При увеличении заряда q проводника пропорционально возрастает поверхностная плотность зарядов в любой точке его поверхности:

$$\sigma = kq,$$

где k — некоторая функция координат рассматриваемой точки поверхности. Потенциал поля, создаваемого заряженным проводником в однородном и изотропном диэлектрике:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{k dS}{r}.$$

Для точек поверхности S проводника интеграл зависит только от ее размеров и формы.

Потенциал φ уединенного заряженного проводника, на который не действуют внешние электростатические поля, пропорционален его заряду q . Величину

$$C = \frac{q}{\varphi} \text{ или } C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \left(\oint_S \frac{k dS}{r} \right)^{-1}$$

называют *электрической емкостью (электроемкостью)* уединенного проводника. Она равна заряду, изменяющему потенциал проводника на единицу. Электроемкость проводника зависит от его формы и линейных размеров. Геометрически подобные проводники имеют емкости, прямо пропорциональные их линейным размерам. Электроемкость не зависит от материала проводника, его агрегатного состояния и прямо пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник.

2°. Электроемкость уединенного шара:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R,$$

где R — радиус шара, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды; ϵ_0 — электрическая постоянная.

3°. *Взаимной электроемкостью* двух проводников называют величину, равную заряду q , который нужно перенести с одного проводника на другой для того, чтобы изменить разность потенциалов между ними $\varphi_1 - \varphi_2$ на единицу:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Взаимная емкость зависит от формы, размеров и взаимного расположения проводников, а также от относительной диэлектрической проницаемости среды, в которой они находятся.

4°. *Конденсатором* называют систему двух разноименно заряженных равными по модулю зарядами проводников, имеющих такую форму и расположение друг относительно друга, что поле, создаваемое такой системой, сосредоточено (локализовано) в ограниченной области пространства. Сами проводники называют *обкладками конденсатора*. Емкость конденсатора является взаимной емкостью его обкладок.

5°. Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

где S — площадь каждой из пластин или меньшей из них, d — расстояние между пластинами. Емкость плоского многопластинчатого конденсатора отличается от емкости плоского конденсатора заменой S на $S(n-1)$, где n — число пластин.

6°. Емкость цилиндрического конденсатора и коаксиального кабеля:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

где r_2, r_1 — радиусы соответственно внешнего и внутреннего цилиндров, l — длина цилиндра.

7°. Емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_2, r_1 — радиусы соответственно внешней и внутренней сфер.

8°. Емкость двухпроводной линии:

$$C = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{d-r}{r}},$$

где d — расстояние между осями проводов, r — радиус проводов, l — длина линии.

9°. Для всех типов конденсаторов существует *пробивное напряжение* — разность потенциалов между обкладками, при которой происходит электрический разряд через слой диэлектрика. Пробивное напряжение зависит от толщины диэлектрика, его свойств и формы обкладок.

10°. Для увеличения электроемкости применяют *параллельное соединение конденсаторов* одноименно заряженными обкладками. Результирующая электроемкость при таком соединении равна

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

где C_i — электроемкость i -го конденсатора.

11°. При *последовательном соединении конденсаторов* они соединяются разноименно заряженными обкладками. При этом

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Результирующая электроемкость всегда меньше минимальной электроемкости любого конденсатора, входящего в соединение.

7. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1°. *Диэлектриками* называют вещества, не проводящие электрического тока. В них отсутствуют свободные электрические заряды.

2°. По своим электрическим свойствам молекулы диэлектрика эквивалентны электрическим диполям с моментом $p_e = ql$, где q — суммарная величина положительных (или равных им отрицательных) зарядов молекулы, l — расстояние между центрами масс положительных и отрицательных зарядов. Если в отсутствие внешнего электрического поля $l = 0$, то диэлектрики называют *неполярными*; если в тех же условиях $l \neq 0$, то диэлектрики называют *полярными*.

3°. В молекулах неполярных диэлектриков (H_2 , N_2 , CCl_4 , углеводороды и др.) центры масс положительных и

отрицательных зарядов в отсутствие внешнего поля совпадают и дипольный момент молекулы равен нулю. При помещении таких диэлектриков во внешнее электрическое поле происходит деформация молекулы (атома) и возникает индуцированный дипольный электрический момент молекулы (*индуцированный*, или *квазипругий диполь*), пропорциональный напряженности поля E :

$$p_e = \epsilon_0 \alpha E, \quad (1.1)$$

где α — коэффициент поляризуемости (поляризуемость) молекулы или атома, ϵ_0 — электрическая постоянная. Поляризуемость молекулы зависит только от ее объема. Тепловое движение молекул неполярных диэлектриков не влияет на возникновение у них дипольных моментов: α не зависит от температуры.

4°. Молекулы полярных диэлектриков (H_2O , NH_3 , HCl , CH_3Cl и др.) имеют *постоянный дипольный момент* $p_e = \text{const}$, связанный с асимметрией в расположении электронных оболочек и ядер этих молекул. Центры масс положительных и отрицательных зарядов в таких молекулах не совпадают (находятся на практически постоянном расстоянии l друг от друга — «жесткий» диполь).

5°. На жесткий диполь с электрическим моментом p_e , помещенный во внешнее однородное электрическое поле с напряженностью E , действует пара сил с моментом M :

$$M = p_e \times E,$$

стремящаяся повернуть диполь в направлении вектора напряженности поля. В реальных молекулах полярных диэлектриков действие внешнего поля приводит, кроме того, к появлению индуцированного дипольного момента (п. 3°).

6°. На жесткий диполь, помещенный во внешнее неоднородное электрическое поле, действует сила F :

$$F = \text{grad} (p_e \cdot E) = (p_e \cdot \nabla) E = p_e \frac{\partial E}{\partial l},$$

где $\frac{\partial E}{\partial l}$ — изменение E на единице длины вдоль оси диполя. Сила F направлена вдоль вектора $\frac{\partial E}{\partial l}$ и стремится переместить диполь в область больших значений E поля.

7°. Потенциальная энергия W_{Π} жесткого диполя, помещенного во внешнее электрическое поле, равна

$$W_{\Pi} = -p_e \cdot E = -p_e E \cos \theta,$$

где p_e — электрический момент диполя, E — напряженность внешнего поля в месте расположения диполя, θ — угол между вектором дипольного момента p_e и вектором E . Знак минус показывает, что устойчивым положением диполя, соответствующим минимуму потенциальной энергии, является расположение его вектора p_e вдоль вектора E .

8°. На каждый элемент объема диэлектрика, находящегося в неоднородном электростатическом поле E , действует сила, равная равнодействующей всех сил, приложенных к отдельным его молекулам. Объемная плотность f сил, т. е. сила, приложенная к единице объема диэлектрика:

$$f = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{2} \operatorname{grad} E^2.$$

Формула справедлива для слабо поляризующихся диэлектриков ($\epsilon - 1 = \chi_e \ll 1$, п. 10°). Сила f направлена в сторону возрастания модуля вектора E , независимо от направления этого вектора.

9°. В отсутствие внешнего электрического поля электрические моменты молекул диэлектрика не являющегося сегнетоэлектриком, если и отличны от нуля, то ориентированы совершенно беспорядочно. Поэтому результирующий дипольный электрический момент любого элемента объема ΔV диэлектрика, содержащего большое число молекул, равен нулю.

Во внешнем электрическом поле диэлектрики *поляризуются*, т. е. переходят в состояние, при котором дипольные моменты каждого элемента объема ΔV диэлектрика отличны от нуля. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называют *поляризованным*. Различают:

а) *ориентационную поляризацию* диэлектрика с полярными молекулами. Она состоит в повороте осей жестких диполей вдоль направления вектора напряженности поля. В результате ориентирующего действия электрического поля и дезориентирующего действия теплового движения, возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул вдоль направления поля. Ориентационная поляризация возрас-

тает с увеличением напряженности поля и убывает при повышении температуры: она имеет место в ряде жидкостей и газов;

б) *электронную поляризацию* диэлектрика с неполярными молекулами, состоящую в возникновении у каждой молекулы индуцированного электрического момента и осуществляющуюся в ряде жидкостей и газов;

в) *ионную поляризацию* в кристаллических диэлектриках типа NaCl, CsCl и др., имеющих ионные кристаллические решетки. Она состоит в смещении положительных ионов решетки вдоль направления поля, а отрицательных ионов — в противоположную сторону.

10°. Количественной мерой поляризованного состояния диэлектрической среды является вектор $\mathbf{P}$, называемый *поляризованностью* (вектором поляризации) и равный:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{\Delta n} \mathbf{p}_{ei}.$$

Здесь $\mathbf{p}_{ei}$ — электрический дипольный момент i -й молекулы диэлектрика, а суммирование проводят по всем Δn молекулам, содержащимся в *физически малом объеме* ΔV диэлектрика (объем ΔV столь мал, что в его пределах поляризацию диэлектрика можно считать однородной, но в то же время он содержит еще настолько большое число Δn молекул, что к ним можно применять статистические методы). Для однородного диэлектрика с неполярными молекулами, находящегося в однородном электрическом поле,

$$\mathbf{P} = n_0 \mathbf{p}_e,$$

где $\mathbf{p}_e$ — индуцированный момент одной молекулы, n_0 — концентрация молекул. Используя формулу (1.1), получим

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 n_0 \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

где $\chi_e = n_0 \alpha$ — *диэлектрическая восприимчивость* вещества, или *поляризуемость* единицы объема диэлектрика.

В случае однородного диэлектрика с полярными молекулами, помещенного в однородное электрическое поле,

$$\mathbf{P} = n_0 \langle \mathbf{p}_e \rangle,$$

где $\langle p_e \rangle$ — среднее значение составляющей вдоль поля вектора постоянного дипольного момента молекулы, вычисляемое с помощью распределения Больцмана для частиц в силовом поле:

$$\langle p_e \rangle = L(a) p_e = \left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a} \right) p_e,$$

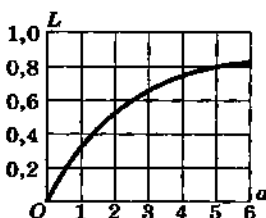


Рис. IV.1.6

где $L(a)$ — классическая функция Ланжевена (рис. IV.1.6),

$a = \frac{p_e E}{kT}$. При $a \ll 1$ $L(a) \approx \frac{a}{3}$ и

$$P = \epsilon_0 \chi_e E,$$

χ_e вычисляется по формуле Дебая—Ланжевена:

$$\chi_e = \frac{n_0 p_e^2}{3 \epsilon_0 kT},$$

где k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура, n_0 — концентрация молекул в диэлектрике.

В действительности полярные молекулы деформируются во внешнем электрическом поле так же, как и неполярные. Поэтому ориентационная поляризация диэлектрика с полярными молекулами сопровождается электронной поляризацией:

$$\chi = \left(\alpha + \frac{p_e^2}{3 \epsilon_0 kT} \right) n_0,$$

где α — поляризуемость молекулы. Часто при не слишком высокой температуре можно в первом приближении пренебречь электронной поляризацией диэлектрика с полярными молекулами.

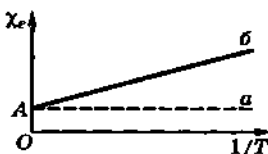


Рис. IV.1.7

На рис. IV.1.7 приведена зависимость χ_e от $\frac{1}{T}$ для неполярных (a) и полярных (b) молекул. Отрезок OA характеризует электронную поляризуемость в полярных молекулах.

11°. В поляризованном диэлектрике на каждую молекулу действует *эффективное электрическое поле* с напряженностью $E_{\text{эфф}}$, внешнее по отношению к данной молекуле. Величина $E_{\text{эфф}}$ отличается от напряженности среднего макроскопического поля E в диэлектрике. Для газообразных диэлектриков с неполярными молекулами

$$E_{\text{эфф}} = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P,$$

где P — вектор поляризованности. К диэлектрикам с жесткими диполями эта формула неприменима, и зависимость $E_{\text{эфф}}(P)$ носит сложный характер.

12°. В неполяризованном диэлектрике объемная (ρ_p) и поверхностная (σ_p) плотности связанных зарядов равны нулю. В процессе поляризации диэлектрика происходит смещение связанных зарядов. В поляризованном диэлектрике значения ρ_p и σ_p зависят от вектора поляризации. Поэтому соответствующие объемные и поверхностные связанные заряды называют *поляризационными зарядами*. Объемные поляризационные заряды возникают в диэлектрике, поляризация которого неоднородна:

$$\rho_p = -\operatorname{div} P.$$

Если диэлектрик однороден и находится в однородном электрическом поле (рис. IV.1.8), то $\operatorname{div} P = 0$ и $\rho_p = 0$.

Поверхностные поляризационные заряды возникают на поверхностях раздела либо между разнородными поляризованными диэлектриками, либо между поляризованным диэлектриком и вакуумом или проводником. Если P_1 и P_2 — векторы поляризации первой и второй сред в какой-либо точке A поверхности S их раздела а P_{1n} и P_{2n} — проекции этих векторов на внешнюю (по отношению к первой среде) нормаль к поверхности S в точке A , то поверхностная плотность поляризационных зарядов в точке A

$$\sigma_p = -(P_{2n} - P_{1n}).$$

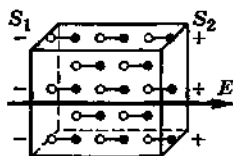


Рис. IV.1.8

В частности, если вторая среда — вакуум или проводник, то

$$P_2 = 0, P_1 = P \text{ и } \sigma_p = P_n.$$

13°. Внешнее, поляризующее электрическое поле E_0 , которое является причиной появления поляризационных зарядов, создается системой свободных электрических зарядов. В диэлектрике векторно складываются поле E_0 и поле поляризационных зарядов E_p . Вектор напряженности поля в диэлектрике E характеризует результирующее макроскопическое поле. Поэтому E зависит от электрических свойств среды.

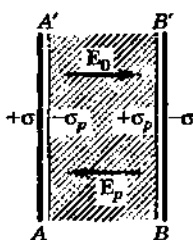


Рис. IV.1.9

Пример. Однородный диэлектрик в однородном электростатическом поле между двумя параллельными проводящими плоскостями AA' и BB' , равномерно заряженными, с поверхностными плотностями, соответственно равными $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. IV.1.9).

Объемная плотность поляризационных зарядов $\rho_p = 0$. Поверхностные плотности поляризационных зарядов на поверхностях диэлектрика, прилегающих к плоскостям AA' и BB' , соответственно равны $-\sigma_p$ и $+\sigma_p$, где

$$\sigma_p = P_e = \epsilon_0 \chi_e E.$$

Поляризационные заряды создают внутри диэлектрика дополнительное поле, напряженность которого E_p противоположна по направлению E_0 и E и равна

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \chi_e E.$$

Напряженность результирующего поля в диэлектрике:

$$E = E_0 + E_p = E_0 - \chi_e E.$$

Следовательно,

$$E = \frac{1}{1 + \chi_e} E_0 = \frac{E_0}{\epsilon},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика (см. п. 15°).

14°. Теорема Гаусса—Остроградского для вектора смещения $\mathbf{D}$ в произвольной среде:

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum q_{\text{своб}},$$

где $\sum q_{\text{своб}}$ — сумма свободных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S , $\oint_S \mathbf{D}_n dS$ — поток смещения сквозь эту поверхность.

Теорема Гаусса—Остроградского для вектора напряженности $\mathbf{E}$ в диэлектрике:

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}_n dS = \sum q_{\text{своб}} + \sum q_{\text{связ}},$$

где $\oint_S \mathbf{E}_n dS$ — поток напряженности сквозь замкнутую поверхность S ;

$\sum q_{\text{своб}}$ и $\sum q_{\text{связ}}$ — суммы свободных и, соответственно, связанных зарядов, охватываемых поверхностью S ; $\sum q_{\text{связ}} = -\oint_S \mathbf{P}_n dS$, $\mathbf{P}_n$ —

проекция вектора поляризации $\mathbf{P}$ на направление внешней нормали к элементу поверхности dS .

15°. Связь векторов смещения $\mathbf{D}$, напряженности $\mathbf{E}$ и поляризованности $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

В изотропных диэлектриках вектор поляризованности $\mathbf{P}$ пропорционален напряженности поля $\mathbf{E}$ и совпадает с $\mathbf{E}$ по направлению. Поэтому

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды. Связь между ϵ и диэлектрической восприимчивостью χ_e имеет вид

$$\epsilon = 1 + \chi_e.$$

16°. С учетом отличия эффективного поля, действующего в диэлектрике, от среднего макроскопического поля, для неполярных диэлектриков связь ϵ и $n_0 \alpha$ выражается формулой Клаузиуса—Мосотти:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} n_0 \alpha,$$

или

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A \alpha}{3} = \Omega,$$

где μ — молярная масса вещества, ρ — его плотность, N_A — постоянная Авогадро, α — поляризуемость молекулы, Ω — величина молярной (молекулярной) рефракции, пропорциональная объему всех молекул в 1 моле вещества, n_0 — концентрация молекул.

17°. Условия для электростатического поля на границе раздела двух изотропных диэлектрических сред имеют вид:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} \text{ и } D_{2\tau} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1\tau},$$

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ и } D_{1n} - D_{2n} = \sigma.$$

Здесь E_τ и D_τ — проекции E и D на направление единичного вектора τ , касательного к поверхности раздела сред, E_n и D_n — проекции E и D на направление единичного вектора n , проведенного из второй среды в первую по нормали к поверхности раздела сред, а σ — поверхностная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке на границе раздела сред.

18°. В анизотропном кристаллическом диэлектрике электрические свойства различны в разных направлениях (χ_e и ϵ — тензорные величины). Поэтому в общем случае векторы P и D не совпадают по направлению с вектором E напряженности поля.

Для анизотропных кристаллов, не являющихся сегнетоэлектриками, т. е. не обладающих спонтанной поляризацией в отсутствие внешнего поля, связь между проекциями векторов P , D и E на оси прямоугольной декартовой системы координат x , y , z имеет вид

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ej} E_j,$$

$$D_i = \epsilon_0 \sum_j \epsilon_{ij} E_j,$$

где $i, j = x, y, z$; $\chi_{eij} = \chi_{eji}$ и $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

Значения χ_{eij} и ϵ_{ij} зависят от ориентации осей координат по отношению к кристаллографическим осям диэлектрика. При соответствующем выборе осей x , y , z величины χ_{exx} , χ_{exx} , χ_{eyz} , ϵ_{xy} , ϵ_{xz} и ϵ_{yz} могут быть одновременно обращены в нуль, так что диэлектрические свойства анизотропного кристалла будут полностью характеризоваться тремя главными значениями диэлектрической восприимчивости:

$$\chi_{e1} = \chi_{exx}, \quad \chi_{e2} = \chi_{eyy}, \quad \chi_{e3} = \chi_{ezz}$$

и соответствующими им тремя главными значениями относительной диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{xx} = 1 + \chi_{e1}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_{yy} = 1 + \chi_{e2}, \quad \epsilon_3 = \epsilon_{zz} = 1 + \chi_{e3}.$$

8. СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ. ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

1°. *Сегнетоэлектриками* называют кристаллические диэлектрики и полупроводники, обладающие в определенном диапазоне температуры спонтанной (самопроизвольной) поляризацией, которая легко изменяется под влиянием внешних воздействий — электрического поля, деформации, изменения температуры и т. п.

Свое название сегнетоэлектрики получили по первоначально обнаруженному кристаллическому веществу с такими свойствами — сегнетовой соли. Сегнетоэлектриками являются также титанат бария, дигидрофосфат калия и др.

Сегнетоэлектрический образец разбит на небольшие по объему области — *домены*, которые спонтанно поляризованы в различных направлениях.

2°. Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ сегнетоэлектрика зависит от напряженности E электрического поля в нем. В слабых полях ϵ быстро возрастает с увеличением E , а затем, достигнув большого максимального значения, монотонно убывает, асимптотически стремясь к 1 в очень сильных полях. Зависимость электрического смещения от напряженности поля — нелинейная. При сравнительно не очень больших значениях E осуществляется состояние насыщения, при котором поляризованность P сегнетоэлектрика достигает максимального значения и дальше не изменяется с ростом E .

3°. Спонтанная поляризация в сегнетоэлектриках происходит в области температур, ограниченных, вообще говоря, верхней и нижней точками Кюри Θ .

Для сегнетовой соли $\Theta_{\text{верх}} = 297 \text{ К}$, $\Theta_{\text{нижн}} = 255 \text{ К}$. Наличие одной точки Кюри Θ , выше которой характерные свойства сегнетоэлектриков исчезают, обязательно для всех представителей этого типа веществ. При $T > \Theta$ тепловое движение нарушает спонтанную ориентацию дипольных моментов внутри доменов.

У разных сегнетоэлектриков в точке Кюри происходит фазовый переход первого или второго рода.

4°. У сегнетоэлектриков наблюдается явление диэлектрического гистерезиса — неоднозначная зависимость поляризованности P от напряженности E внешнего электрического поля при его циклическом изменении (рис. IV.1.10). Величина P_{e0} — остаточная поляризованность, а $-E_c$ — напряженность

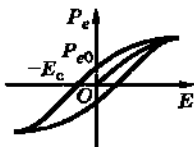


Рис. IV.1.10

электрического поля обратного направления, при которой исчезает поляризация сегнетоэлектрика.

5°. Пьезоэлектрический эффект (пъезоэффект) состоит в том, что при механических деформациях некоторых кристаллов в определенных направлениях на их гранях появляются электрические заряды противоположных знаков. Пъезоэффект наблюдается в кварце, турмалине, сегнетовой соли, титанате бария, цинковой обманке и других веществах. Пьезоэлектрический эффект в кварце происходит вдоль электрических осей X_1 , X_2 , X_3 кристалла (рис. IV.1.11), перпендикулярных к его оптической оси Z . Обращение направления деформации кристалла изменяет знаки зарядов на поверхностях на противоположные.

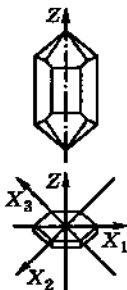


Рис. IV.1.11

Обратный пьезоэлектрический эффект заключается в изменении линейных размеров некоторых кристаллов под действием электрического поля. Изменение направления электрического поля вызывает изменение характера деформаций на противоположный.

Этот эффект имеет большое значение для получения ультразвука.

9. ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1°. Энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$ равна

$$W_{\text{ва}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где φ_i — потенциал в точке нахождения заряда q_i для электростатического поля, создаваемого всеми зарядами системы, за исключением заряда q_i .

Если заряды находятся в однородном изотропном диэлектрике, то

$$W_{\text{ва}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{\substack{i,k \\ (k \neq i)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}},$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, r_{ik} — расстояние между зарядами q_i и q_k .

2°. Полная электрическая энергия W_e системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$, т. е. заряженных тел, расстояния между которыми во много раз больше линейных размеров этих тел, отличается от $W_{\text{ва}}$ на величину, равную сумме собственных энергий заряженных тел (зарядов q_i):

$$W_e = W_{\text{ва}} + \sum_{i=1}^n W_{\text{соб}i}.$$

Собственной энергией заряженного проводника называют энергию взаимодействия зарядов, находящихся на этом проводнике. Энергия проводника, не подверженного действию внешнего поля, представляет собой собственную энергию этого проводника. Она равна

$$W_{\text{соб}} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2},$$

где C — емкость проводника, q и φ — его заряд и потенциал (при $q = 0$, $\varphi = 0$). Собственная энергия проводника, в отличие от $W_{\text{ва}}$, не может быть отрицательной. Она равна нулю, если проводник не заряжен.

Для любых двух проводников сумма их собственных энергий всегда больше (или в крайнем случае равна, если проводники не заряжены) их взаимной энергии:

$$W_{\text{соб1}} + W_{\text{соб2}} \geq W_{\text{вз}}.$$

3°. Полная электрическая энергия системы заряженных проводников

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где q_i — заряд i -го проводника, а φ_i — потенциал проводника, обусловленный как полем всех остальных проводников, так и его собственным полем.

Энергия заряженного конденсатора

$$W_e = \frac{q \Delta \varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C \Delta \varphi^2}{2},$$

где q — заряд конденсатора, C — его емкость, $\Delta \varphi$ — разность потенциалов между обкладками.

4°. Энергия любой системы зарядов в вакууме или диэлектрике может быть представлена в форме

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS,$$

где ρ и σ — объемная и поверхностная плотности свободных зарядов, φ — потенциал в элементе объема dV или на элементе поверхности dS для электростатического поля всех объемных и поверхностных зарядов, а интегрирование распространено на весь объем V , занятый свободными объемными зарядами, и на все заряженные поверхности S . Влияние диэлектрика на величину W_e сказывается в том, что при одном и том же распределении свободных зарядов значения φ в разных диэлектриках различны (в однородном изотропном диэлектрике φ в ϵ раз меньше, чем в вакууме).

Для поля в некоторой среде, не являющейся сегнетоэлектриком, выражение для W_e может быть представлено также в форме:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV,$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ — соответственно электрическое смещение и напряженность в элементе объема dV для поля рассмат-

риваемой системы зарядов, а интегрирование распространено на весь объем V_e пространства, занятого полем. Отсюда следует, что энергия W_e распределена по этому пространству, т. е. электрическое поле обладает энергией. *Объемная плотность энергии электрического поля, т. е. энергия единицы объема поля, равна*

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}.$$

Для изотропного диэлектрика имеем

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon \epsilon_0}.$$

В термодинамике энергия W_e электрического поля в диэлектрической среде представляет собой часть свободной энергии диэлектрика, связанную с существованием в нем поля. Соответственно, w_e — объемная плотность «электрической части» свободной энергии диэлектрика.

5°. В макроскопической теории электричества постулируется, что w_e представляет собой *объемную плотность свободной энергии электрического поля в диэлектрике*, т. е. является мерой работы, связанной с обратимым изотермическим изменением поля в единице объема диэлектрика.

В диэлектрике с неполярными молекулами, часть энергии, затрачиваемой на создание поля, расходуется на поляризацию диэлектрика (на «растяжение» упругих диполей). *Объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика:*

$$w_{\text{диэл}} = (\epsilon - 1) \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Разность между w_e и $w_{\text{диэл}}$ представляет собой *объемную плотность энергии электрического поля такой же напряженности, созданного в вакууме*. Ее часто называют *объемной плотностью собственно электрической энергии поля в диэлектрике*:

$$w_e - w_{\text{диэл}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Глава 2

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК
В МЕТАЛЛАХ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. *Электрическим током* называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов в пространстве.

2°. Упорядоченное движение свободных зарядов, возникающее в проводнике под действием электрического поля, называют *током проводимости*.

Упорядоченное движение электрических зарядов может быть осуществлено путем перемещения в пространстве заряженного тела (проводника или диэлектрика). Такой электрический ток называют *конвекционным* (например, ток, связанный с движением по орбите Земли, обладающей избыточным отрицательным зарядом).

3°. За направление электрического тока принимают направление движения положительных зарядов. В действительности в металлических проводниках электрический ток создается движением электронов в направлении, обратном току.

4°. *Силой тока* (в электротехнике — *током*) сквозь некоторую поверхность S называют скалярную величину I , равную первой производной по времени от заряда q , проходящего сквозь эту поверхность:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

5°. Ток называют *постоянным*, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t},$$

где q — электрический заряд, t — время. Сила постоянного тока равна заряду q , проходящему сквозь поверхность S за единицу времени.

6°. Распределение электрического тока по сечению S характеризуется *вектором плотности тока* $\mathbf{j}$. Он направлен в сторону движения положительных зарядов и равен

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS},$$

где dS' — проекция элемента поверхности dS на плоскость, перпендикулярную к $\mathbf{j}$, dI — сила тока сквозь dS и dS' .

Проекция j_n вектора $\mathbf{j}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ к элементу поверхности dS равна

$$j_n = \frac{dI}{dS} = j \cos \alpha,$$

где α — угол между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{n}$.

7°. Сила тока в проводнике

$$I = \int_S j dS;$$

интегрирование распространяется на все поперечное ($\alpha = 0$) сечение S проводника.

8°. Плотность постоянного тока одинакова по всему сечению S проводника. Для постоянного тока

$$I = jS.$$

Плотности постоянного тока в двух поперечных сечениях проводника обратно пропорциональны площадям сечений:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

2. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОВОДИМОСТИ

1°. Носителями тока в металлах являются *электроны проводимости*, возникающие вследствие того, что валентные электроны атомов металла являются обобществленными, т. е. не принадлежащими определенному атому. В классическом приближении электроны проводимости рассматриваются как *электронный газ*, частицы которого обладают тремя степенями свободы. В более строгом приближении электронный газ рассматривается как вырожденный *квантовый газ*, подчиняющийся статистике Ферми—Дирака. В классическом приближении концентрация электронов проводимости одновалентного металла принимается равной

$$n_0 = \frac{N_A}{A} D,$$

где N_A — постоянная Авогадро, A — атомная масса металла, D — его плотность. По порядку величины $n_0 \approx 10^{28} - 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

2°. Согласно классической теории хаотическое тепловое движение электронов происходит при комнатных температурах со средними скоростями порядка 100 м/с. Согласно теории Друде—Лоренца электрон имеет среднюю длину свободного пробега (λ) равную по порядку величины периоду кристаллической решетки металла (10^{-10} м).

3°. В квантовой теории электроны в металле описываются законами квантовой механики и подчиняются квантовой статистике Ферми—Дирака. В пренебрежении электрическим полем положительных ионов кристаллической решетки и взаимодействием электронов рассматривается модель «потенциального ящика» с плоским дном: вне металла потенциальная энергия электронов равна нулю, а внутри металла энергии электронов образуют квазинепрерывный спектр. На верхнем занятом уровне энергия электрона равна $-A$, где A — положительная работа выхода электрона из металла. Учет влияния поля ионов на движение электронов приводит к зонной структуре энергетического спектра электронов в металле.



Рис. IV.2.1

4°. Импульсы и энергии электронов в металле квантованы, т. е. имеют определенные значения. Заполнение электронами энергетических уровней в металле происходит в соответствии с принципом Паули: на каждом уровне располагается не более двух электронов с противоположными спинами. Верхний энергетический уровень, занятый электронами при абсолютном нуле температуры, называют *уровнем Ферми*. От него отсчитывается работа выхода электрона из металла (рис. IV.2.1). Число занятых электронами энергетических уровней равно по порядку величины числу свободных электронов в металле.

Близко расположенные (квазинепрерывные) энергетические уровни в металле образуют *энергетические зоны*. Самую нижнюю зону, не полностью занятую электронами, называют *зоной проводимости металла*. Возможны случаи, когда две последовательные зоны металла перекрываются (например, у щелочноземельных и переходных металлов). Наличие зоны, не полностью занятой электронами, является характерной особенностью металлической проводимости.

5°. Взаимодействие электронов с положительными ионами кристаллической решетки в квантовой теории металлов рассматривается как рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях ионов решетки.

6°. Упорядоченное движение электронов в металлическом проводнике возникает под действием внешнего электрического поля. Плотность тока

$$\mathbf{j} = -n_0 e \langle \mathbf{v} \rangle,$$

где n_0 — концентрация электронов проводимости, e — элементарный заряд, $\langle \mathbf{v} \rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов. При наибольших допустимых плотностях токов $|\langle \mathbf{v} \rangle| = 10^{-4}$ м/с. Время установления тока в цепи $t = \frac{L}{c}$, где L — длина цепи, c —

скорость света в вакууме, совпадает со временем, в течение которого вдоль цепи устанавливается стационарное электрическое поле и начинается упорядоченное движение электронов. Это движение практически возникает на всем протяжении проводника одновременно с замыканием цепи.

7°. Закон Ома для плотности тока:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Плотность тока проводимости равна произведению удельной электропроводности проводника σ на напряженность электрического поля $\mathbf{E}$. Величину $\rho = \frac{1}{\sigma}$ называют удельным сопротивлением.

Выражение для σ в классической электронной теории:

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle},$$

где n_0 — концентрация электронов в металле, $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега, $\langle u \rangle$ — средняя (арифметическая) скорость теплового движения электронов при данной температуре. По квантовой теории металлов

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \langle \lambda \rangle}{P_F},$$

где p_F — импульс электрона, находящегося на уровне Ферми W_F ; p_F не зависит от температуры; $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина пробега электронов на уровне Ферми. Величина $\langle \lambda \rangle$ зависит от температуры T . В области комнатных температур $\langle \lambda \rangle \sim T^{-1}$, так что удельное сопротивление металлов $\rho = \frac{1}{\sigma}$, в согласии с данными опытов, растет, пропорционально T . При более низких температурах $\langle \lambda \rangle \sim T^{-n}$, где $n > 1$, и увеличивается по мере уменьшения T (на рис. IV.2.2 показана зависимость $\langle \lambda \rangle$ от T для серебра).

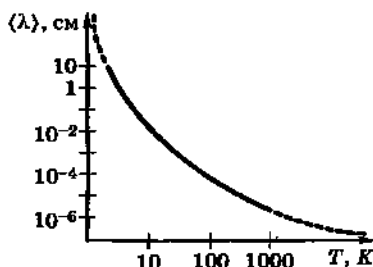


Рис. IV.2.2

В металлах отклонения от закона Ома не наблюдалось вплоть до плотностей тока порядка 10^{11} А/м².

8°. *Плотностью тепловой мощности тока w называют энергию, которая в результате взаимодействия ионов с электронами передается ионам кристаллической решетки в единице объема проводника за единицу времени. Закон Джоуля—Ленца для плотности тепловой мощности тока:*

$$w = \rho j^2.$$

Плотность тепловой мощности тока в проводнике равна произведению квадрата плотности тока j на удельное сопротивление ρ проводника.

9°. *Закон Видемана—Франца:* для большинства металлов отношение коэффициента теплопроводности K к удельной электропроводности σ одинаково при постоянной температуре:

$$\frac{K}{\sigma} = C = \text{const.}$$

Закон Видемана—Франца является следствием того, что теплопроводность металлов (как и их электропроводность) осуществляется свободными электронами. Согласно квантовой теории металлов

$$C = LT = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

где k — постоянная Больцмана, e — элементарный заряд, L — универсальная постоянная, называемая числом Лоренца; $L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}$.

Это значение L находится в хорошем согласии с экспериментом при комнатных температурах.

10°. Зависимость удельного сопротивления проводника ρ от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 — удельное сопротивление проводника при 0°C , t — температура в градусах Цельсия, α — температурный коэффициент сопротивления. Для большинства металлов в интервале температур 0 — 100°C α изменяется в пределах $(3,3\text{—}6,2) \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Зависимость ρ и σ от температуры для чистых металлов (и некоторых сплавов) объясняется зависимостью $\langle \lambda \rangle$ от температуры.

При всех температурах, кроме $T = 0$, электроны испытывают рассеяние на тепловых колебаниях ионов тем большее, чем выше температура. При этом $\langle \lambda \rangle$ и σ обратно пропорциональны температуре T (в области не слишком низких температур). В некоторых металлах и сплавах обнаруживается явление сверхпроводимости.

3. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1°. Кулоновские силы электростатического взаимодействия между электрическими зарядами приводят к такому их перераспределению в проводнике, при котором электрическое поле в проводнике исчезает, а потенциалы во всех его точках выравниваются. Поэтому поле кулоновских сил не может являться причиной возникновения постоянного электрического тока.

2°. Постоянный ток проводимости может быть осуществлен только при условии, что напряженность электрического поля в проводнике отлична от нуля и не изменяется с течением времени. Цепи постоянного тока проводимости должны быть замкнутыми, а на свободные заряды, помимо электростатических (кулоновских) сил, должны действовать неэлектростатические силы, называемые *сторонними силами*. Электрическое поле сторонних сил в цепи создается включенными в нее *источниками ЭДС* (гальваническими элементами, аккумуляторами, электрическими генераторами и т. д.). Перемещая электрические заряды и поддерживая постоянными разности потенциалов между любыми двумя точками цепи постоянного тока, сторонние силы совершают работу за счет энергии, затрачиваемой в источнике ЭДС, который, таким образом, играет роль *источника энергии в цепи*. Поле сторонних сил существует внутри источника ЭДС. На участках цепи постоянного тока, не содержащих источников ЭДС, перемещение зарядов происходит под действием сил электростатического поля.

3°. Для любой точки внутри проводника, по которому проходит постоянный ток,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{кул}} + \mathbf{E}_{\text{стор}},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля в данной точке, $\mathbf{E}_{\text{кул}}$ и $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ — напряженности соответственно кулоновского поля и поля сторонних сил. Для участка 1—2 проводника сечением S справедливо соотношение

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{кул}} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{стор}} \cdot d\mathbf{l},$$

где I — сила тока в проводнике, $d\mathbf{l}$ — вектор, численно равный элементу dl длины проводника и направленный по касательной к проводнику в ту же сторону, что и вектор плотности тока $\mathbf{j}$:

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{\text{кул}} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы электростатического поля в точках 1 и 2.

4°. Линейный интеграл от вектора $E_{\text{стор}}$ напряженности электрического поля сторонних сил вдоль участка цепи 1—2 называют *электродвижущей силой* (ЭДС) $\mathcal{E}_{21}$, действующей на этом участке цепи:

$$\mathcal{E}_{21} = \int_1^2 E_{\text{стор}} \cdot dl.$$

ЭДС равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении на участке 1—2 проводника единичного положительного заряда. Величина $\mathcal{E}_{21}$ равна алгебраической сумме ЭДС всех источников, включенных на участке цепи 1—2. При этом ЭДС источника считают положительной, если он, будучи один включен в рассматриваемую замкнутую цепь, возбуждает в ней ток, направленный на участке 1—2 от точки 1 к точке 2.

5°. *Напряжением (падением напряжения)* U_{21} на участке цепи 1—2 называют величину, численно равную работе, совершаемой суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении на участке 1—2 цепи единичного положительного заряда:

$$U_{21} = \int_1^2 (E_{\text{кул}} + E_{\text{стор}}) \cdot dl = \int_1^2 E \cdot dl.$$

Таким образом,

$$U_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{21}.$$

6°. Интеграл

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{21}$$

называют *сопротивлением участка цепи* между сечениями 1 и 2. Для однородного цилиндрического проводника ($\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$)

$$R_{21} = \rho \frac{l_{21}}{S} = \frac{l_{21}}{\sigma S},$$

где l_{21} — длина участка 1—2 проводника.

7°. Закон Ома для произвольного участка цепи:

$$IR_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{21},$$

или

$$U_{21} = IR_{21}.$$

Напряжение на участке цепи равно произведению его сопротивления на силу тока.

Примеры.

1. В случае замкнутой электрической цепи $\varphi_1 = \varphi_2$, общее сопротивление всей цепи $R_{21} = R$ и

$$\mathcal{E} = IR,$$

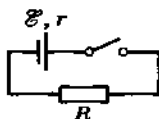


Рис. IV.2.3

где $\mathcal{E}$ — алгебраическая сумма всех ЭДС, действующих в этой цепи. Для замкнутой электрической цепи, изображенной на рис. IV.2.3, где источник имеет ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r , напряжение U на клеммах источника тока (на внешней цепи) равно

$$U = IR_1,$$

где $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$ и $R_1 = R - r$. Поэтому

$$U = \frac{\mathcal{E} R_1}{r + R_1} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E} r}{r + R_1} = \mathcal{E} - Ir.$$

2. В случае разомкнутой цепи $I = 0$ и $\mathcal{E}_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$. Для нахождения ЭДС источника нужно измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой внешней цепи.

8°. Если образующие цепь проводники неподвижны, а электрический ток постоянен, то работа сторонних сил целиком расходуется на нагревание проводников. Энергия W , выделяющаяся в цепи за время t во всем объеме проводника, равна

$$W = IUt,$$

где I — сила тока, U — напряжение на концах проводника. Соответствующее этой энергии количество теплоты Q , выделяющееся в проводнике,

$$Q = IUt.$$

Эта формула выражает закон *Джоуля—Ленца*: количество теплоты, выделяемое током в проводнике, пропорционально силе тока, времени его прохождения и падению напряжения.

4. ПРАВИЛА КИРХГОФА

1°. Расчет сложных (разветленных) цепей постоянного тока заключается в отыскании по заданным сопротивлениям участков цепи и приложенным к ним ЭДС сил токов в каждом участке. Для решения этой задачи применяют правила Кирхгофа.

2°. Узел в разветвленной цепи называют точку, в которой имеется более двух возможных направлений тока (рис. IV.2.4). В узле сходится больше двух проводников.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов): алгебраическая сумма токов I_k , сходящихся в узле, равна нулю:

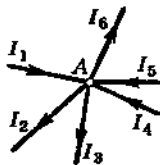


Рис. IV.2.4

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

где n — число проводников, сходящихся в узле. Положительными считают токи, подходящие к узлу, отрицательными — токи, отходящие от него.

3°. Второе правило Кирхгофа (правило контуров): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_k на сопротивления R_k соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме приложенных в нем ЭДС $\mathcal{E}_k$:

$$\sum_{k=1}^{n_1} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n_1} \mathcal{E}_k.$$

При использовании второго правила Кирхгофа выбирают определенное направление обхода контура; токи I_k ,

совпадающие по направлению с направлением обхода, считают положительными. ЭДС $\mathcal{E}_k$ источников тока считают положительными, если они создают токи, направленные в сторону обхода контура.

4°. Порядок расчета сложной цепи постоянного тока:

а) произвольно выбирают направления токов во всех участках цепи;

б) для m узлов цепи записывают $m - 1$ независимых уравнений правила узлов;

в) выделяют произвольные замкнутые контуры так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входящий в уже рассмотренные контуры. В разветвленной цепи, состоящей из p ветвей (участков цепи между соседними узлами) и m узлов, число независимых уравнений правила контуров равно $p - m + 1$.

Примеры.

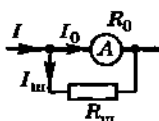


Рис. IV.2.5

1. Для измерения токов I , превышающих максимальный ток I_0 , на который рассчитан амперметр, имеющий сопротивление R_0 , параллельно ему включают добавочное сопротивление $R_{ш}$, называемое шунтом (рис. IV.2.5). Расчет шунта производят по правилам Кирхгофа:

$$I = I_0 + I_{ш}, \quad I_0 R_0 = I_{ш} R_{ш},$$

откуда

$$R_{ш} = \frac{R_0 I_0}{I - I_0};$$

$I_{ш}$ — сила тока в шунте.

2. Для измерения напряжения U на участке цепи параллельно этому участку включают вольтметр, рассчитанный на напряжение U_0 при максимальной силе тока в приборе I_0 ($U_0 = I_0 R_0$). Если $U > U_0$, то последо-

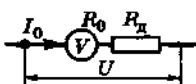


Рис. IV.2.6

вательно с вольтметром включают добавочное сопротивление R_d (рис. IV.2.6), определяемое из уравнения

$$(R_0 + R_d) I_0 = U,$$

откуда

$$R_A = \frac{U}{I_0} - R_0.$$

3. В электрической схеме, приведенной на рис. IV.2.7, заданы сопротивления R_2 , R_3 , R_4 и электродвижущие силы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Требуется определить сопротивление R_1 при условии, что ток в цепи гальванометра G отсутствует ($I_g = 0$). Выберем направления токов так, как показано на рис. IV.2.7,

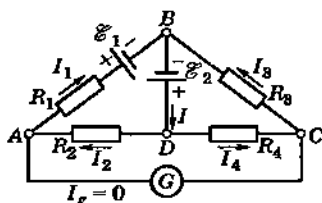


Рис. IV.27

тогда для узлов A , B и C первое правило Кирхгофа записывается в виде:

$$I_2 - I_1 = 0,$$

$$I_1 + I_3 = I,$$

$$I_4 - I_3 = 0.$$

Замкнутые контуры $ABCGA$, $ADCGA$ и $BCDB$ обходим против часовой стрелки, получим:

$$-I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0,$$

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_2.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4} - \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_4} \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}.$$

При $\mathcal{E}_1 = 0$ результат не зависит от $\mathcal{E}$, и мы получим схему мостика Уитстона для измерения сопротивлений:

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4}.$$

Эта формула остается справедливой, если гальванометр G и источник ЭДС $\mathcal{E}_2$ в мостике Уитстона поменять местами.

Глава 3

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ**1. ПРОВОДИМОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ.
ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ДИССОЦИАЦИЯ**

1°. Электрический ток во многих жидкостях (водных растворах солей, кислот и проч.) осуществляется упорядоченным перемещением *ионов* — атомов или групп атомов, обладающих избыточным или недостаточным количеством электронов по сравнению с нейтральными атомами или молекулами. Электрическое поле, которое вызывает упорядоченное движение ионов, создается в жидкости *электродами* — проводниками, соединенными с полюсами источника ЭДС. Положительный электрод называют *анодом*, отрицательный — *катодом*. Соответственно положительные ионы (*катионы*) — ионы металлов и водорода — движутся к катоду, отрицательные ионы (*анионы*) — ионы кислотных остатков и гидроксильной группы — движутся к аноду.

2°. Прохождение электрического тока через такие жидкости сопровождается *явлением электролиза* — выделением на электродах составных частей растворенных веществ или других веществ, являющихся результатом вторичных реакций. Проводники, в которых прохождение электрического тока сопровождается электролизом, называют *электролитами* или *проводниками второго рода*. В отличие от металлических проводников (*проводников первого рода*) ток в электролитах обусловлен переносом вещества.

3°. *Электролитической диссоциацией* называют распад молекул растворенного вещества на положительно и отрицательно заряженные ионы в результате взаимодействия с растворителем. Это явление обусловлено совместным действием двух причин: теплового движения и взаимодействия полярных молекул растворенного вещества, состоящих из взаимосвязанных ионов (например, молекул солей, кислот и щелочей), с полярными молекулами растворителя (например, воды). Указанное взаимодействие приводит к ослаблению свя-

зи между ионами и облегчает разрыв этой связи при столкновении молекулы растворенного вещества с достаточно быстро движущейся молекулой растворителя (или растворенного вещества).

Коэффициентом (степенью) диссоциации α называют отношение числа молекул n'_0 , диссоциировавших на ионы, к общему числу n_0 молекул растворенного вещества: $\alpha = \frac{n'_0}{n_0}$.

4°. Вследствие хаотического теплового движения ионов в растворе происходит процесс воссоединения ионов противоположных знаков в нейтральные молекулы, называемый *молизацией*.

В условиях динамического равновесия между процессами диссоциации и молизации α удовлетворяет уравнению

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \text{const} \cdot n_0.$$

Если $n_0 \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 1$, т. е. в слабых растворах $\alpha \approx 1$ и почти все молекулы диссоциированы. С увеличением концентрации раствора α убывает. В сильно концентрированных растворах

$$\alpha \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{n_0}}.$$

2. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОЛИЗА

1°. *Первый закон электролиза (первый закон Фарадея)*: количество вещества M , выделяющегося на электроде, прямо пропорционально электрическому заряду q , прошедшему через электролит:

$$M = kq.$$

Коэффициент пропорциональности k , равный массе вещества, выделившегося при прохождении через электролит единицы электрического заряда, называют *электрохимическим эквивалентом* вещества. При пропускании через электролит постоянного тока I в течение времени t

$$q = It \text{ и } M = kIt.$$

2°. Второй закон электролиза (второй закон Фарадея): электрохимические эквиваленты элементов k_x относятся как их химические эквиваленты k_x :

$$\frac{k_{x2}}{k_{x1}} = \frac{k_{x2}}{k_{x1}}.$$

Химическим эквивалентом иона называют отношение молярной массы μ иона к его валентности Z :

$$k_x = \frac{\mu}{Z}.$$

Поэтому электрохимический эквивалент

$$k_x = \frac{1}{F} \frac{\mu}{Z},$$

где F — постоянная (число) Фарадея.

3°. Объединенный закон Фарадея:

$$M = \frac{1}{F} \frac{\mu}{Z}.$$

Если $M = \frac{\mu}{Z}$, то $q = F$. Таким образом, постоянная Фарадея равна электрическому заряду, при прохождении которого через электролит на электроде выделяется 1 моль одновалентного вещества. Постоянная Фарадея, одна из фундаментальных физических постоянных, равна произведению постоянной Авогадро N_A на элементарный заряд e :

$$F = N_A e = 9,648456 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}.$$

3. ДИСКРЕТНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Из законов Фарадея определяется величина q заряда любого иона: $q = \pm Z \frac{F}{N_A}$, где Z — валентность иона, F — постоянная Фарадея, N_A — постоянная Авогадро. Заряд одновалентного иона ($Z = 1$) равен элементарному заряду:

$$q_1 = e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Установлено, что любой электрический заряд является кратным от наименьшего заряда e , который является элементарным зарядом.

4. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ТОКА В ЖИДКОСТЯХ

1°. Плотность тока j в жидкостях равна сумме плотностей токов положительных и отрицательных ионов:

$$j = j_+ + j_-.$$

Зависимость плотности тока в жидкостях j от напряженности E электрического поля имеет вид

$$j = eZ_+n_{0+}(u_+ + u_-)E,$$

где e — элементарный заряд, Z_+ — валентность положительных ионов в растворе, n_{0+} — концентрация положительных ионов в электролите, u_+ и u_- — подвижности соответственно положительного и отрицательного ионов, т. е. средние скорости направленного движения этих ионов под действием электрического поля, напряженность которого равна единице. Эта формула выражает закон Ома для плотности тока в электролитах.

2°. Удельное сопротивление электролита

$$\rho = \frac{1}{eZ_+n_{0+}(u_+ + u_-)}.$$

Если молекула электролита диссоциирует на k_+ положительных и k_- отрицательных ионов, то $k_+Z_+ = k_-Z_-$, и тогда можем записать

$$n_{0+} = k_+\alpha n_0 \quad \text{и} \quad n_{0-} = k_-\alpha n_0,$$

где α — коэффициент диссоциации, n_0 — концентрация электролита. В этом случае

$$\rho = \frac{1}{eZ_+k_+\alpha n_0(u_+ + u_-)} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{1}{N_A e \alpha C(u_+ + u_-)},$$

где $C = \frac{k_+Z_+n_0}{N_A} = \frac{k_-Z_-n_0}{N_A}$. Величину C называют эквивалентной концентрацией раствора.

5. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ

1°. Газы состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и в нормальных условиях являются изоляторами. Электропроводность газов возникает при их ионизации — удалении из атомов и молекул газов электронов. Атомы (молекулы) превращаются при

этом в положительные ионы. Отрицательные ионы возникают в газах при соединении нейтральных атомов (молекул) со свободными электронами.

2°. При ионизации атома (молекулы) ему передается энергия ионизации W_i , необходимая для вырывания электронов. Величина W_i зависит от сорта атома и энергетического состояния электрона в атоме (молекуле), она возрастает с увеличением кратности ионизации, т. е. числа электронов, вырванных из атома.

3°. Потенциалом ионизации ϕ_i называют разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле для того, чтобы увеличение его энергии было равно энергии ионизации: $\phi_i = \frac{W_i}{e}$, где e — элементарный заряд.

4°. Ионизация газа происходит в результате внешних воздействий: сильного нагревания, рентгеновских лучей, радиоактивных излучений, при бомбардировке молекул (атомов) газа быстро движущимися электронами или ионами. Интенсивность ионизации измеряют числом пар противоположных по знаку заряженных частиц, возникающих в единице объема газа за единицу времени.

5°. Ударная (столкновительная) ионизация одноатомного газа электронами или ионами происходит при кинетической энергии ионизирующей частицы

$$\frac{mv^2}{2} \geq W_i \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

где W_i — энергия ионизации (столкновительная), M — масса атома, m — масса ионизирующей частицы.

Для осуществления ударной ионизации одновалентные ионы должны пройти в ускоряющем поле большую разность потенциалов, чем электроны. Это справедливо для ионизации молекул, состоящих из любого числа атомов.

6. НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

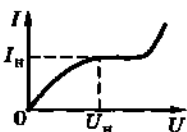


Рис. IV.3.1

1°. Если электропроводность газа вызывается внешними ионизаторами, то процесс прохождения электрического тока через газ называют *несамостоятельным газовым разрядом*. Кривая зависимости силы тока I при несамостоятельном газовом раз-

ряде от напряжения U между электродами изображена на рис. IV.3.1. При небольших напряжениях плотность тока j в разряде пропорциональна напряженности поля E :

$$j = en_0(u_+ + u_-)E,$$

где u_+ и u_- — подвижности положительных и отрицательных ионов, n_0 — число пар электронов и одновалентных положительных ионов в единице объема, e — элементарный заряд. В интервале давлений от 10 до 10^7 Па величины u_+ и u_- обратно пропорциональны давлению газа. При дальнейшем увеличении напряженности поля E концентрация ионов в разряде убывает и линейная зависимость силы тока от напряжения нарушается.

2°. Максимальную силу тока I_n (см. рис. VI.3.1), возможную при данной интенсивности ионизации, называют *током насыщения*. При этом все ионы, возникающие в газе, достигают электродов: $I_n = eN_0$, где N_0 — максимальное число пар одновалентных ионов, образующихся в 1 с в газе под действием ионизатора.

7. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

1°. Электрический разряд в газе, продолжающийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называют *самостоятельным газовым разрядом*. Свободные электрические заряды, необходимые для поддержания такого разряда, возникают главным образом в результате ударной ионизации молекул газа под действием электронов (*объемная ионизация*) и выбивания электронов из катода при бомбардировке его положительными ионами (*поверхностная ионизация*). Ударную ионизацию молекул газа положительными ионами нужно учитывать только в случае достаточно сильных полей. Вырывание электронов из катода может также происходить вследствие его нагрева (*термоэлектронная эмиссия*) и внешнего фотоэффекта, связанного со свечением разряда (*фотоэлектронная эмиссия*).

2°. Переход несамостоятельного газового разряда в самостоятельный называют *электрическим пробоем газа*; этот переход происходит при *напряжении зажигания* U_z (*напряжение пробоя*). Согласно приближенной теории

Таунсенда условие зажигания самостоятельного разряда в газе между плоскими электродами имеет вид

$$\gamma(e^{ad} - 1) = 1,$$

где d — расстояние между электродами, a — коэффициент объемной ионизации газа электронами, равный среднему значению количества актов ионизации, производимых одним электроном на пути единичной длины, γ — коэффициент поверхностной ионизации, равный среднему числу электронов, выбиваемых из катода одним положительным ионом. Для данного газа и материала катода

$$\frac{a}{p} = f_1\left(\frac{U}{pd}\right) \quad \text{и} \quad \gamma = f_2\left(\frac{U}{pd}\right),$$

где p — давление газа, U — напряжение между электродами. Таким образом, напряжение зажигания U_z зависит от произведения pd (закон Пашена). Характер этой зависимости показан на рис. IV.3.2.

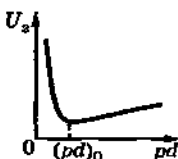


Рис. IV.3.2

С уменьшением потенциала ионизации и работы выхода электронов из катода, при прочих равных условиях, U_z уменьшается.

Зависимость разрядного тока от напряжения, приложенного к электродам в разряде, называют *вольт-амперной характеристикой разряда*.

3°. При низких давлениях (несколько десятых мм рт. ст.) наблюдается *тлеющий самостоятельный газовый разряд*. Основными частями тлеющего разряда являются следующие четыре области:

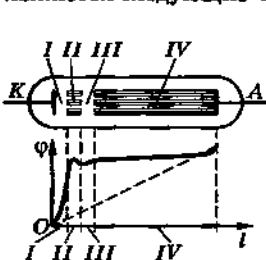


Рис. IV.3.3

I — *катодное темное пространство*, II — *отрицательное (тлеющее) свечение*, III — *фарадеево темное пространство*, IV — *положительный столб разряда* (рис. IV.3.3). Области I—III образуют *катодную часть разряда*. Вблизи катода происходит резкое падение потенциала, связанное с большой концентрацией положительных

ионов на границе областей I — II . В области II электроны, ускоренные в области I , производят интенсивную ударную ионизацию. Тлеющее свечение в основном вызывается обратным воссоединением (*рекомбинацией*) электронов и ионов в нейтральные атомы или молекулы. Тлеющее свечение имеет сплошной спектр. В положительном столбе наблюдается постоянная и большая концентрация электронов и положительных ионов (газоразрядная плазма), обусловленная ударной ионизацией молекул газа электронами. Падение потенциала в пределах положительного столба сравнительно невелико и при прочих равных условиях возрастает с уменьшением диаметра газоразрядной трубки.

Свечение положительного столба, определяющее, оптические свойства тлеющего разряда, обусловлено излучением возбужденных атомов (молекул) газа. Рекомбинация электронов и положительных ионов в основном происходит на стенках газоразрядной трубки и вызывает нагрев стенок. Положительный столб часто бывает *слоистым*, т. е. состоит из чередующихся светлых слоев (*страт*) и темных промежутков. Положительный столб по своей форме следует форме газоразрядной трубки независимо от формы и расположения катода и анода. Это связано с наличием поперечного (радиального) электрического поля, возникающего благодаря осаждению электронов на стенках трубки. При тлеющем разряде в достаточно коротких трубках или в широких сосудах светящийся положительный столб не наблюдается.

Основной областью тлеющего разряда, в которой происходят процессы объемной ионизации газа, необходимые для поддержания разряда, является область катодного темного пространства. Длинной l_k катодного темного пространства называют расстояние от катода до той точки разряда, в которой кривая $\phi = \phi(l)$ (см. рис. IV.3.3.) имеет максимум, или точку перегиба. Тлеющий разряд может существовать лишь при условии, что расстояние между электродами $d \geq l_k$. Изменение потенциала $\Delta\phi_k$ на длине катодного темного пространства называют *катодным падением*.

Различают два режима тлеющего разряда; *нормальный*, при котором плотность разрядного тока не зависит от величины тока, изменяемой с помощью внешнего нагрузочного сопротивления, и *аномальный*, при

котором плотность тока возрастает вместе с током. В первом случае катод не полностью покрыт отрицательным свечением, во втором — полностью. В случае нормального тлеющего разряда I_k обратно пропорционально давлению газа, а $\Delta\phi_k$ зависит от рода газа, материала и состояния поверхности катода, возрастая с увеличением работы выхода электронов из катода. С увеличением разрядного тока падение потенциала в положительном столбе уменьшается. Поэтому вольтамперная характеристика нормального тлеющего разряда *падающая*, т. е. с увеличением тока напряжение на электродах уменьшается. При аномальном разряде с увеличением разрядного тока длина катодного темного пространства l_k уменьшается, а $\Delta\phi_k$ возрастает. Вольтамперная характеристика аномального тлеющего разряда *возрастающая*.

Если давление в трубке с нормальным тлеющим разрядом достаточно мало, то катодное темное пространство почти полностью заполняет всю трубку. При этом пучок электронов движется от катода до стенок трубки практически свободно, т. е. не испытывая столкновений с молекулами газа. Такие пучки электронов называют *катодными лучами*.

Каналовыми лучами называют пучки свободно движущихся положительных ионов. Они также могут быть получены с помощью тлеющего разряда: если в катоде разрядной трубки сделать небольшое отверстие (канал), то положительные ионы, попадающие в этот канал, будут проходить через него в эвакуированное закатодное пространство в виде пучка каналовых лучей.

4°. При нормальном и больших давлениях наблюдают несколько типов газового разряда: кистевой, коронный, искровой и дуговой.

Коронный разряд возникает в газе, находящемся в сильно неоднородном электрическом поле, т. е. около электродов с малыми радиусами кривизны поверхности (например, около острий, проводов линий высокого напряжения и т. п.). При коронном разряде ионизация газа и его свечение происходят только в сравнительно небольшой области, прилегающей к электроду с малым радиусом кривизны поверхности и называемой *коронирующим слоем*. Соответствующий электрод называют *коронирующим электродом*. Остальную часть разрядного промежутка, находящуюся за преде-

лами коронирующего слоя (или двух слоев, если коронируют оба электрода), называют *внешней* («темной») *областью коронного разряда*.

В случае коронирования катода (*отрицательная корона*) электроны, вызывающие объемную ионизацию газа, выбиваются из катода положительными ионами. Если коронирует анод (*положительная корона*), то электроны возникают вблизи анода благодаря фотоионизации газа под действием излучения коронирующего слоя. Во внешней области разряда проводимость газа сравнительно невелика, так как осуществляется только за счет заряженных частиц одного знака, поступающих в нее из коронирующего слоя. Поэтому сила тока в коронном разряде, в отличие от других видов самостоятельного разряда, определяется не сопротивлением внешней части цепи, а сопротивлением внешней области разряда.

При повышенном напряжении коронный разряд на острие приобретает вид светящейся кисти — системы выходящих из острия и перемежающихся во времени тонких светящихся линий, имеющих изломы и изгибы. Такой разряд называют *кистевым*.

Если напряжение между электродами становится равным *напряжению искрового перекрытия* U_k , то коронный разряд переходит в искровой. При прочих равных условиях U_n для положительной короны меньше, чем для отрицательной. Напряжение U_n и *напряжение* U_k *зажигания коронного разряда* зависят от расстояния d между электродами. По мере уменьшения d напряжение U_n уменьшается быстрее, чем U_k , т. е. область напряжений от U_k до U_n , при которых осуществляется коронный разряд, сокращается. При значении $d_{кр}$ (*критическое расстояние*) U_n становится равным U_k . Если $d < d_{кр}$, то $U_n < U_k$ и коронный разряд вообще не может возникнуть.

5°. *Искровой разряд* имеет вид прерывистых ярких зигзагообразных разветвляющихся нитей — каналов ионизованного газа, которые пронизывают разрядный промежуток и исчезают, сменяясь новыми. Искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты и ярким свечением газа. Явления, характеризующие такой разряд, вызываются

электронными и ионными *лавинами*, возникающими в искровых каналах, где давление увеличивается до сотен атмосфер, а температура повышается до 10^4 °С. Примером искрового разряда является *молния*. Главный канал молнии имеет диаметр от 10 до 25 см. Длина молнии достигает нескольких километров при максимальной силе тока импульса молнии, достигающей сотен тысяч ампер.

6°. *Дуговой разряд* происходит при большой плотности тока и при напряжении между электродами порядка нескольких десятков вольт. Он является результатом интенсивного испускания термоэлектронов раскаленным катодом. Электроны ускоряются электрическим полем и производят ударную ионизацию молекул газа. Поэтому, электрическое сопротивление газового промежутка между электродами дуги невелико. При увеличении силы тока дугового разряда проводимость газового промежутка настолько сильно возрастает, что напряжение между электродами дуги падает (*падающая вольтамперная характеристика*). Температура катода (при атмосферном давлении) достигает 3000 °С. Бомбардировка электронами анода создает в нем углубление — *кратер дуги* с температурой около 4000 °С (при $p = 760$ мм рт. ст.). Температура газа в канале электрической дуги 5000—6000 °С. Если дуговой разряд происходит при сравнительно низкой температуре катода (например, ртутная дуговая лампа), то основную играет холодная эмиссия электронов из катода.

8. ПОНЯТИЕ О ПЛАЗМЕ

1°. *Плазмой* называют квазинейтральный ионизованный газ, т. е. частично или полностью ионизованный газ, в котором средние объемные плотности положительных ρ_+ и отрицательных ρ_- зарядов одинаковы по модулю:

$$\rho_+ = |\rho_-| \quad \text{или} \quad \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Из-за теплового движения ионов и электронов мгновенные значения ρ_+ и ρ_- отклоняются (флуктуируют) от своих средних значений, удовлетворяющих написанному выше соотношению. Поэтому ионизованный газ можно считать плазмой, если его объем V во много раз больше объемов D^3 областей газа, в которых воз-

можны сколь-либо заметные случайные отклонения от нуля суммы положительных и отрицательных зарядов, обусловленные тепловым движением ионов и электронов: $V \gg D^3$, где D — характерный размер, называемый *дебаевским радиусом экранирования*.

2°. Дебаевский радиус экранирования зависит от параметров плазмы — ее термодинамической температуры T , зарядов и концентраций электронов и ионов. Для простейшей изотермической плазмы, состоящей из электронов и однозарядных ионов, равновесные концентрации которых в силу квазинейтральности плазмы одинаковы и равны n_0 , дебаевский радиус экранирования

$$D = \left(\frac{\epsilon_0 k T}{e^2 n_0} \right)^{1/2},$$

где e — элементарный заряд, ϵ_0 — электрическая постоянная, k — постоянная Больцмана.

3°. В плазме любая заряженная частица A (положительный ион или электрон) окружена преимущественно частицами, заряды которых противоположны по знаку заряду q частицы A . Соответственно потенциал ϕ поля точечного заряда q убывает в плазме с расстоянием r значительно быстрее, чем в вакууме:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right).$$

Приближенно можно считать, что на расстояниях $r > D$ электростатическое поле иона или электрона в плазме практически полностью экранируется.

4°. Плазму называют *идеальной* (или *газовой*), если потенциальная энергия кулоновского взаимодействия двух заряженных частиц, находящихся на среднем расстоянии $\langle r \rangle = n_0^{-1/3}$ (n_0 — концентрация частиц), мала по сравнению с их средней кинетической энергией теплового движения, т. е.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \langle r \rangle} < kT.$$

Это условие выполняется, если в плазме достаточно велико *дебаевское число* N_D — число частиц одного знака заряда, находящихся внутри сферы радиуса D :

$$N_D = \frac{4}{3} \pi D^3 n_0 \gg 1.$$

Термодинамические свойства идеальной плазмы хорошо описываются уравнением состояния идеального газа.

5°. *Степенью ионизации плазмы α называют отношение числа ионизованных атомов к их общему числу в плазме. В зависимости от степени ионизации различают плазму слабо ионизованную (α порядка долей процента), умеренно ионизованную и полностью ионизованную (α близка к 1).*

Ионизация газа и образование плазмы может вызываться рядом процессов, таких как термическая ионизация при столкновениях атомов в достаточно сильно нагретом газе, ударная ионизация заряженными частицами (например, при электрическом разряде в газе), фотоионизация.

6°. Термодинамические функции плазмы и того же самого идеального газа отличаются благодаря влиянию кулоновского взаимодействия частиц плазмы. Для почти идеальной плазмы, подчиняющейся статистике Максвелла—Больцмана и состоящей из нейтральных атомов, электронов и однозарядных положительных ионов, внутренняя энергия в состоянии термодинамического равновесия при температуре T равна

$$U = U_{ид} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ne^2}{D},$$

где $U_{ид}$ — внутренняя энергия идеального газа, N — число заряженных частиц одного сорта в плазме (электронов или ионов), D — дебаевский радиус экранирования.

Свободная энергия плазмы:

$$F = F_{ид} - \frac{Ne^2}{6\pi\epsilon_0 D}.$$

Энтродия плазмы:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = S_{ид} - \frac{Ne^2}{12\pi\epsilon_0 TD}.$$

Давление плазмы (термическое уравнение состояния плазмы):

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = p_{ид} - \frac{Ne^2}{12\pi\epsilon_0 VD}.$$

Теплоемкость плазмы:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_{V_{ид}} + \frac{Ne^2}{8\pi\epsilon_0 T D}.$$

7°. *Неизотермической плазмой* называют термодинамически неравновесную плазму, в которой средние энергии теплового движения различных сортов частиц (электронов, ионов и атомов) неодинаковы. Такую плазму нельзя охарактеризовать с помощью одного определенного значения температуры. Из законов сохранения импульса и энергии следует, что при упругих столкновениях очень легких электронов с ионами и атомами, массы которых на несколько порядков больше, они практически не обмениваются энергией. Поэтому приближенно считают, что в неизотермической плазме каждый сорт частиц находится в квазиравновесном состоянии со своим значением температуры. Соответственно используют понятия *электронной температуры* T_e и *ионной температуры* T_i . Эти температуры могут отличаться весьма значительно (например, в газоразрядной плазме тлеющего разряда T_e больше T_i в несколько десятков раз). В зависимости от значения ионной температуры различают *низкотемпературную плазму* ($T_i < 10^5$ K) и *высокотемпературную плазму* ($T_i \sim 10^7$ K).

8°. Дебаевский радиус экранирования для неизотермической плазмы:

$$D = \left(\sum_i \frac{q_i^2 n_i}{\epsilon_0 k T_i} \right)^{-1/2}.$$

Здесь q_i , n_i и T_i — заряд, концентрация и температура i -го сорта частиц плазмы, k — постоянная Больцмана, ϵ_0 — электрическая постоянная, а суммирование проводится по всем сортам частиц.

В частности, для неизотермической плазмы с однозарядными ионами концентрации электронов n_e и ионов n_i одинаковы и равны n_0 , а дебаевский радиус экранирования

$$D = \left(\frac{\epsilon_0 k T_i}{n_0 e^2 (1 + T_i/T_e)} \right)^{1/2}.$$

Если $T_e \gg T_i$, то D зависит только от ионной температуры плазмы.

9°. Дальнодействующее кулоновское взаимодействие заряженных частиц в плазме приводит к качественному своеобразию плазмы, позволяющему считать ее особым *четвертым агрегатным состоянием вещества*. Важнейшие свойства плазмы:

а) сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями, связанное с высокой электропроводностью плазмы;

б) специфическое *коллективное взаимодействие частиц плазмы*, осуществляющееся через усредненные электрические и магнитные поля, которые создают сами эти частицы;

в) благодаря коллективным взаимодействиям плазма ведет себя как своеобразная упругая среда, в которой легко возбуждаются и распространяются различного рода колебания и волны;

г) во внешнем магнитном поле плазма ведет себя как диамагнитная среда;

д) удельная электрическая проводимость σ полностью ионизованной плазмы не зависит от плотности плазмы и увеличивается с ростом термодинамической температуры T пропорционально $T^{3/2}$ и при $T \geq 10^7$ К столь велика, что плазму можно приближенно считать *идеальным проводником* ($\sigma \rightarrow \infty$).

Движение плазмы в магнитном поле используется в методе прямого преобразования внутренней энергии ионизованного газа в электрическую, которое осуществляется в *магнитогидродинамическом генераторе* (МГД-генераторе).

10°. Плазма — наиболее распространенное состояние вещества во Вселенной. Солнце и другие звезды состоят из полностью ионизованной высокотемпературной плазмы. Основным источником энергии излучения звезд — термоядерные реакции синтеза, протекающие в недрах звезд при огромных значениях температуры порядка 10^7 — 10^8 К. Холодные туманности и межзвездная среда также находятся в плазменном состоянии. Они представляют собой низкотемпературную плазму, ионизация которой происходит главным образом под действием ультрафиолетового излучения звезд. В околоземном пространстве слабоионизованная плазма находится в радиационных поясах в ионосфере Земли. С процессами, происходящими в этой плазме, связаны такие процессы как магнитные бури, полярные сияния, нарушения дальней радиосвязи.

Низкотемпературная газоразрядная плазма, образующаяся при тлеющем, искровом дуговом разрядах в газах, широко используется в различных источниках света, газовых лазерах, во многих технологических процессах.

Глава 4

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1. СОБСТВЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

1°. *Полупроводники* — широкий класс веществ, удельная электропроводность которых лежит в пределах $(10^6—10^8) \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ (при $T = 300 \text{ K}$) и очень сильно возрастает при увеличении температуры, а также изменяется при освещении, деформации и введении сравнительно небольшого количества примеси.

Полупроводниковым свойством обладают в кристаллическом состоянии такие элементы как кремний, германий, селен, теллур, углерод (алмаз) и др.; некоторые соединения типа $A^{III}B^V$ (содержат элементы III и V групп Периодической системы Менделеева — InSb , InAs , InP , GaSb , GaAs , GaP); соединения элементов группы VI (O , S , Se , Te) с некоторыми элементами I—V групп, а также с редкоземельными и переходными металлами; некоторые тройные соединения типа $A^{III}B^V C^V$; карбид кремния (SiC); некоторые стеклообразные материалы.

2°. Химически чистый полупроводник с идеально правильной кристаллической решеткой называют *собственным* или *беспримесным полупроводником*, а его способность проводить электрический ток — *собственной проводимостью*. Согласно зонной теории твердых тел собственная проводимость полупроводника связана с тем, что в результате теплового возбуждения часть электронов перебрасывается из валентной зоны (ВЗ) в зону проводимости (ЗП) (рис. IV.4.1;

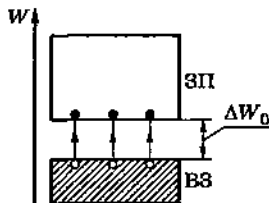


Рис. IV.4.1

W — энергия электрона в полупроводнике). Эти электроны называют *электронами проводимости*; под действием внешнего электрического поля напряженности E они приходят в полупроводнике в упорядоченное движение — дрейф, образуя электрический ток. Электроны, оставшиеся в валентной зоне, тоже участвуют в образовании электрического тока, переходя под действием поля E на освободившиеся энергетические уровни вблизи «потолка» валентной зоны. *Эффективная масса* этих электронов $m_p^* < 0$, а их движение в полупроводнике под действием внешнего поля E можно рассматривать как движение положительно заряженных носителей заряда, называемых *дырками*.

Концентрация p дырок в собственном полупроводнике равна концентрации n электронов проводимости ($p = n$). Собственный и примесный полупроводники называют *невырожденными*, если концентрация p дырок во много раз меньше числа возможных различных квантовых состояний этих носителей заряда, соответственно в зоне проводимости и валентной зоне полупроводника.

3°. Удельная электрическая проводимость собственного полупроводника

$$\sigma = e(u_n + u_p)n,$$

где $u_n = \frac{\langle v_n \rangle}{E}$ и $u_p = \frac{\langle v_p \rangle}{E}$ — подвижности электронов проводимости и дырок, $\langle v_n \rangle$ и $\langle v_p \rangle$ — средние скорости их дрейфа в поле напряженностью E , e — элементарный заряд.

4°. Подвижности u_n и u_p определяются рассеянием электронов проводимости и дырок на тепловых колебаниях кристаллической решетки полупроводника («рассеяние на фононах») и зависят от температуры и эффективных масс этих носителей заряда:

$$u_n \sim (m_n^*)^{-5/2} T^{-3/2} \quad \text{и} \quad u_p \sim (m_p^*)^{-5/2} T^{-3/2}.$$

Вследствие различия значений m_n^* и m_p^* эффективных масс электронов у дна зоны проводимости и дырок у верхнего края валентной зоны подвижности электронов и дырок не одинаковы. Например, для кремния (при $T = 300$ K) $\frac{u_n}{u_p} = 2,1$, а для антимонида индия $\frac{u_n}{u_p} = 59$.

5°. Равновесные концентрации электронов проводимости и дырок в невырожденном собственном полупроводнике одинаковы и равны:

$$n = p = \sqrt{N_C N_V} \exp\left(-\frac{\Delta W_0}{2kT}\right),$$

где $N_C = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n^* kT)^{3/2}$ и $N_V = \frac{2}{h^3} (2\pi m_p^* kT)^{3/2}$ — так называемые *эффективные числа состояний* соответственно в зоне проводимости и валентной зоне, приходящихся на единичный объем полупроводника; h и k — постоянные Планка и Больцмана, ΔW_0 — ширина запрещенной зоны, называемая *энергией активации собственной проводимости*.

6°. Удельная электропроводность σ быстро (по экспоненциальному закону) возрастает при нагревании полупроводника за счет увеличения концентрации электронов и дырок. В этом состоит коренное отличие полупроводников от металлов, у которых при нагревании растет удельное электрическое сопротивление $\rho = \frac{1}{\sigma}$

вследствие уменьшения длины свободного пробега электронов проводимости при неизменности их концентрации.

7°. Равновесное значение химического потенциала электронов в невырожденном собственном полупроводнике (энергия электрона равна нулю на «дне» зоны проводимости)

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right).$$

Равновесный уровень химического потенциала (уровень Ферми $E_F = \mu$) при $T = 0$ К находится посередине запрещенной зоны и обычно мало смещается вверх (если $m_p^ > m_n^*$) или вниз (если $m_p^* < m_n^*$) при нагревании.*

2. ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

1°. *Примесной проводимостью* полупроводников называют их электропроводность, обусловленную наличием *примесных центров*. Под примесными центрами (примесями) подразумеваются; а) атомы посторон-

них элементов; б) избыточные (по сравнению со стехиометрическим составом) атомы элементов, входящих в полупроводники; в) всевозможные дефекты кристаллической решетки: пустые узлы, атомы или ионы, внедренные в междузлия решетки, сдвиги, связанные с пластической деформацией кристалла, трещины и т. п.

2°. Примесные включения вносят изменения в периодическое электрическое поле кристалла и влияют на движение электронов и на их энергетические состояния. Энергетические уровни валентных электронов примесных атомов не размещаются в разрешенных энергетических зонах основного кристалла и образуют примесные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне (*локальные уровни*).

3°. Примеси могут служить дополнительными источниками электронов в кристалле. Например, при замещении одного четырехвалентного атома германия пятивалентным атомом фосфора, мышьяка или сурьмы один электрон не может образовать ковалентной связи и является «лишним».

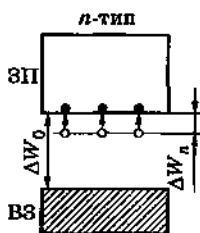


Рис. IV.4.2

Энергетический уровень такого электрона располагается ниже зоны проводимости (рис. IV.4.2). Подобные уровни, заполненные электронами, называют *донорными*. Атомы примесей, поставляющие электроны, называют *атомами-донорами*. Для перевода электронов с донорных уровней в незаполненную зону проводимости необходима малая энергия ΔW . Например, для кремния $\Delta W = 0,054$ эВ, если примесью является мышьяк.

В результате переброса электронов с донорных уровней в зону проводимости в полупроводнике возникает *электронная примесная проводимость*. Полупроводники такого типа называют *электронными* или *полупроводниками n-типа*.

4°. Энергия ΔW_n активации примесной электронной проводимости обычно намного меньше энергии ΔW_0 активации собственной проводимости этого полупроводника. Поэтому при низкой температуре существование электронов в зоне проводимости связано

только с процессом термической ионизации доноров. В этом случае равновесная концентрация электронов проводимости

$$n = \sqrt{N_d N_c} \exp\left(-\frac{\Delta W_n}{2kT}\right),$$

где N_d — концентрация атомов-доноров, а $N_c = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n^* kT)^{3/2}$.

Удельная электропроводность

$$\sigma = e n \mu_n,$$

где подвижность электронов μ_n определяется главным образом рассеянием на примесях ($\mu_n \sim T^{3/2}$).

Равновесное значение химического потенциала электронов, отсчитываемого от дна зоны проводимости и определяющего положение уровня Ферми полупроводника *n*-типа, равно

$$\mu = -\frac{\Delta W_n}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_d}{N_c}\right).$$

При $T = 0$ К уровень Ферми находится посередине между дном зоны проводимости и локальными уровнями донорной примеси: $\mu(0) = -\frac{\Delta W_n}{2}$. С увеличением температуры до $T = T_0$ уровень Ферми постепенно смещается вверх, а при $T > T_0$ — вниз. Так как $N_c(T_0) = N_d$, то

$$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m_n^* k} \left(\frac{N_d}{2}\right)^{2/3}.$$

5°. С увеличением температуры концентрация n электронов растет, а донорные уровни истощаются. При полном истощении последних $n = N_d$. Это происходит при температуре истощения примеси

$$T_s = \frac{\Delta W_n}{k \ln\left(\frac{2N_c}{N_d}\right)}.$$

При дальнейшем повышении температуры концентрация электронов проводимости может увеличиваться

только за счет переброса электронов в зону проводимости из валентной зоны, т. е. при $T > T_g$:

$$n = N_d + \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{\Delta W_0}{2kT}\right).$$

Роль первого члена в правой части этой формулы убывает при увеличении температуры. Считается, что при температуре

$$T_i = \frac{\Delta W_0}{k \ln\left(\frac{N_c N_v}{N_d^2}\right)}$$

происходит переход к собственной проводимости, т. е. при $T > T_i$ имеем

$$n = p = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{\Delta W_0}{2kT}\right),$$

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\left(\frac{N_v}{N_c}\right),$$

где N_c и N_v — см. п. 1°.

6°. В переходной области температуры от T_g до T_i концентрация электронов проводимости изменяется мало, так что температурная зависимость удельной электрической проводимости σ определяется главным образом температурной зависимостью подвижности носителей заряда. Если в этой области температуры главную роль играет рассеяние носителей на фононах, то $\mu_n \sim T^{3/2}$ и σ растет с увеличением T (но медленнее, чем в области $T < T_g$).

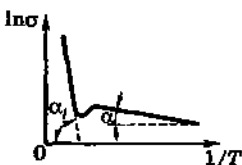


Рис. IV.4.3

Зависимость σ от T в широком диапазоне изменения температуры для полупроводника n -типа показана на рис. IV.4.3, где $\mu \sim T^{3/2}$,

$$\text{а } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Delta W_0}{\Delta W_n}.$$

7°. В случае трехвалентной примеси (бор, алюминий, индий) в кристалле германия примесному атому недостает одного электрона для образования ковалентных связей

с 4 соседними атомами германия (рис. IV.4.4). Этот недостающий электрон может быть получен примесным атомом из валентной зоны полупроводника с образованием в этой зоне дырки. Такие примеси называют *акцепторными*, а их локальные энергетические уровни, называемые *акцепторными уровнями* (*уровнями прилипания*), находятся в запрещенной зоне полупроводника на небольшом по сравнению с ΔW_0 расстоянии ΔW_p от «потолка» валентной зоны (рис. IV.4.5). Такие примесные полупроводники обладают при низкой температуре *дырочной проводимостью* (*проводимостью р-типа*), их называют *дырочными* или *полупроводниками р-типа*. Энергию ΔW_p называют *энергией активации дырочной примесной проводимости (р-типа)*.

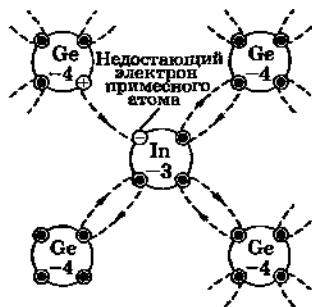


Рис. IV.4.4

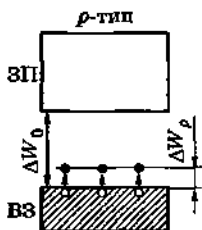


Рис. IV.4.5

8°. Зависимости от температуры концентрации p и химического потенциала дырок μ_p , уровня Ферми μ и удельной электропроводности σ дырочного полупроводника (N_a — концентрация акцепторов):

а) в области низких температур ($T < T_s$)

$$p = \sqrt{N_a N_v} \exp\left(-\frac{\Delta W_0}{2kT}\right),$$

$$\mu_p = -\frac{\Delta W_p}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_a}{N_v},$$

$$\mu = -\Delta W_0 - \mu_p,$$

$$\sigma = e \mu_p p;$$

б) в области истощения примеси ($T_s < T < T_i$)

$$p \approx N_a,$$

$$\mu_p = kT \ln \frac{N_a}{N_v},$$

$$\mu = -\Delta W_0 - \mu_p,$$

$$\sigma \approx eN_a u_p;$$

температура истощения примеси (все акцепторные уровни заняты электронами)

$$T_s = \frac{\Delta W_p}{k \ln(2N_v/N_a)};$$

в) в области высоких температур ($T > T_i$)

$$p = N_a + \sqrt{N_a N_v} \exp\left(-\frac{\Delta W_0}{2kT}\right),$$

$$\mu_p = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_c}{N_v},$$

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{N_c}{N_v},$$

$$\sigma \approx ep(u_n + u_p);$$

температура перехода к собственной проводимости

$$T_i = \frac{\Delta W_0}{k \ln(N_c N_v / N_a^2)}.$$

Зависимость σ от T в широком диапазоне изменения T имеет такой же вид, как показано на рис. IV.4.3, с той лишь разницей, что для полупроводника p -типа

$$\frac{\lg \alpha_i}{\lg \alpha} = \frac{\Delta W_0}{\Delta W_p}.$$

9°. В случае примесных полупроводников подвижные носители заряда в них принято подразделять на основные и неосновные носители. Основными носителями называют электроны проводимости в полупроводниках n -типа и дырки в полупроводниках p -типа. Неосновными носителями называют дырки в полупроводниках n -типа и электроны проводимости в полупроводниках p -типа. При температуре, заметно меньшей температу-

ры T , перехода к собственной проводимости, концентрация основных носителей во много раз больше концентрации неосновных носителей.

3. ЯВЛЕНИЕ ХОЛЛА В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1°. *Эффектом Холла* называют возникновение поперечного электрического поля и разности потенциалов в металле или полупроводнике, по которым проходит электрический ток, при помещении их в магнитное поле, перпендикулярное к направлению тока. Если в магнитное поле помещен металл или электронный полупроводник, то электроны, движущиеся со скоростью v в магнитном поле (рис. IV.4.6, а), под действием силы Лоренца отклоняются в определенную сторону. На противоположной стороне скапливаются положительные заряды. В дырочном полупроводнике (рис. IV.4.6, б) знаки зарядов на поверхностях противоположные.

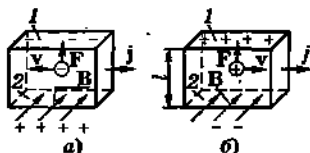


Рис. IV.4.6

2°. Поперечное электрическое поле препятствует отклонению электронов магнитным полем. Разность потенциалов при эффекте Холла:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = R \frac{BI}{d},$$

где B — индукция магнитного поля, I — сила тока, d — линейный размер образца в направлении вектора B , R — *постоянная Холла*.

Напряженность поперечного электрического поля:

$$E_B = R B \times j,$$

где j — вектор плотности тока.

3°. Для металлов и примесных полупроводников с одним типом проводимости

$$R = \frac{A}{nq},$$

где q и n — заряд и концентрация носителей тока, A — безразмерный числовой коэффициент порядка единицы, связанный со статистическим характером распределения скоростей носителей тока. По знаку постоянной Холла можно судить о типе проводимости полупроводника или проводника (при электронной проводимости $q = -e$ и $R < 0$, при дырочной проводимости $q = e$ и $R > 0$), а по ее значению можно определить концентрацию носителей тока.

4°. Для полупроводников со смешанной (n - и p -типа) проводимостью постоянная Холла в общем случае зависит не только от подвижностей и концентраций обоих типов носителей тока — электронов (u_n, n) и дырок (u_p, p), но и от магнитной индукции. В случае слабых полей, т. е. при условии

$$B \ll \max \left\{ \frac{1}{u_n}, \frac{1}{u_p} \right\}$$

постоянная Холла равна

$$R = \frac{A}{e} \frac{u_p^2 n_p - u_n^2 n}{(u_p n_p + u_n n)^2}.$$

Знак постоянной Холла позволяет определить тип преимущественной проводимости полупроводника.

Глава 5

КОНТАКТНЫЕ, ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

1. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ. ЗАКОНЫ ВОЛЬТЫ

1°. *Работой выхода* A электрона из металла называют наименьшую энергию, которую нужно сообщить электрону проводимости металла для того, чтобы он мог выйти из металла в вакуум. Она находится из следующего соотношения:

$$A = e(\varphi - \varphi') - \mu,$$

где φ и φ' — электрические потенциалы соответственно в точках внутри металла и вакууме около поверхности металла, μ — химический потенциал электронного газа в металле. Величину $\mu - e\varphi$ называют *электрохимическим потенциалом* электронного газа в металле.

Работа выхода зависит от рода металла и состояния его поверхности. Для чистых металлов она имеет значение порядка нескольких электронвольт.

2°. В классической электронной теории работа выхода истолковывается как работа, совершаемая электроном при его вылете из металла, во-первых, против сил притяжения со стороны положительных зарядов, индуцируемых электроном на поверхности металла, и, во-вторых, против сил электрического поля *двойного электрического слоя*. Этот слой возникает у поверхности металла благодаря тому, что в процессе теплового движения электроны проводимости могут пересекать поверхность металла, образуя около нее «электронное облако». Плотность этого «облака» практически отличается от нуля лишь в пределах нескольких межатомных расстояний ($\approx 10^{-10}$ м). Такой двойной электрический слой подобен весьма тонкому заряженному конденсатору, одной из обкладок которого служит поверхность металла с находящимися на ней положительными ионами, а другой — «электронное облако». За пределами двойного слоя напряженность его электрического поля равна нулю.

3°. Величину

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' = \frac{A + \mu}{e}$$

называют *поверхностным скачком потенциала на границе металл—вакуум* или *контактной разностью потенциалов между металлом и вакуумом*. В классической электронной теории поверхностный скачок потенциала

$$\Delta\varphi_{\text{кя}} = \frac{A}{e}.$$

Это значение отличается от истинного, приведенного выше, и согласуется с ним лишь качественно.

4°. **Законы Вольты:**

1) при соединении двух проводников, изготовленных из различных металлов, между ними возникает контактная разность потенциалов, которая зависит только от их химического состава и температуры;

2) разность потенциалов между концами цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников; она равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

5°. В состоянии равновесия электрохимические потенциалы $\mu - e\phi$ для обоих контактирующих металлов должны быть равны. Поэтому при приведении в контакт двух незаряженных металлов ($\phi' = 0$) с различными работами выхода A_1 и $A_2 < A_1$ электроны переходят преимущественно из второго металла в первый. При этом оба металла заряжаются (металл 1 отрицательно, металл 2 положительно) и создают в окружающем пространстве электрическое поле. Одновременно происходит относительное смещение энергетических уровней электронов в контактирующих металлах. В металле 1 все уровни смещаются вверх, а в металле 2 — вниз. Для установления равновесия достаточно, чтобы из металла 2 перешла в металл 1 ничтожная часть электронов проводимости. Поэтому при приведении металлов в контакт значения химических потенциалов μ_1 и μ_2 не изменяются.

6°. Условие равновесия для контакта двух металлов имеет вид

$$e\phi_1 - \mu_1 = e\phi_2 - \mu_2,$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — равновесные значения потенциалов первого и второго металлов. Величину

$$\Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}$$

называют *внутренней контактной разностью потенциалов*. Она обусловлена различием химических потенциалов электронов в контактирующих металлах. В соответствии с выражением для химического потенциала

$$\Delta\phi_{12} = \frac{1}{e} \left[(W_{F_1} - W_{F_2}) + \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \left(\frac{1}{W_{F_2}} - \frac{1}{W_{F_1}} \right) \right],$$

где k — постоянная Больцмана, а W_{F_1} и W_{F_2} — значения энергии Ферми для первого и второго металлов. Величина $\Delta\phi_{12}$ зависит от температуры T контакта металлов и обуславливает термоэлектрические явления.

7°. Изменение потенциала от φ_1 до φ_2 происходит в пределах двойного электрического слоя, образующегося на поверхности контакта и называемого *контактным слоем*. Толщина контактного слоя порядка 10^{-10} — 10^{-9} м. Возникновение этого слоя при контактировании двух металлов связано с переходом из одного металла, заряжающегося положительно, в другой, заряжающийся отрицательно, лишь ничтожной части электронов проводимости, имеющих в объеме контактного слоя. Поэтому для каждого из металлов концентрация электронов в контактном слое практически такая же, как и в остальном объеме металла, так что удельное электрическое сопротивление контактного слоя не отличается от удельного сопротивления остальной части металла.

8°. В классической электронной теории металлов внутренняя контактная разность потенциалов рассматривается как следствие различия концентраций n_0 электронов проводимости в контактирующих металлах. В состоянии равновесия диффузионный поток электронов из металла с большим значением n_0 в металл с меньшим значением n_0 полностью компенсируется потоком электронов в обратном направлении под влиянием электрического поля контактного слоя. Соответствующее выражение для внутренней контактной разности потенциалов имеет вид

$$\Delta\varphi_{12\text{кл}} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}.$$

Это значение отлично от точного значения $\Delta\varphi_{12}$ (п. 6°). Оно может быть использовано только для качественного рассмотрения зависимости внутренней контактной разности потенциалов от температуры.

9°. *Внешней контактной разностью потенциалов* называют разность потенциалов между двумя точками, находящимися вблизи поверхностей первого (φ'_1) и второго (φ'_2) контактирующих металлов вне их. Из условия равенства электрохимических потенциалов электронов в контактирующих металлах следует, что

$$\Delta\varphi'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e},$$

где A_1 и A_2 — работы выхода электронов из первого и второго металлов.

2. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1°. *Работой выхода A (термодинамической работой выхода)* электрона из полупроводника называют наименьшую энергию, которую нужно затратить для удаления электрона из полупроводника в вакуум, если начальная энергия электрона в полупроводнике равна электрохимическому потенциалу. Уровень энергии, равной электрохимическому потенциалу, обычно называют *уровнем химического потенциала или уровнем Ферми полупроводника*. Его положение по отношению к дну зоны проводимости определяется, как и для металлов, значением химического потенциала μ (обычно $\mu < 0$, т. е. уровень Ферми в полупроводниках, в отличие от металлов, располагается ниже дна зоны проводимости).

2°. Если металл привести в контакт с полупроводником, то так же, как и при контактировании двух металлов, должно произойти выравнивание электрохимических потенциалов электронов в металле и полупроводнике — «выравнивание уровней Ферми», осуществляющееся в результате перехода электронов из тела с меньшей работой выхода в тело с большей работой выхода. При этом между металлом и полупроводником устанавливается контактная разность потенциалов, обусловленная двойным электрическим слоем, образующимся в области контакта и называемым *контактным слоем*. Вследствие малой концентрации носителей тока в полупроводнике (порядка $(10^{20}—10^{22})\text{ м}^{-3}$ вместо 10^{28} м^{-3} в металлах) толщина контактного слоя в полупроводнике достигает $(10^{-7}—10^{-6})\text{ м}$, т. е. на несколько порядков больше толщины контактного слоя в металлах. В пределах этого слоя в полупроводнике распределен объемный заряд и существует контактное электрическое поле. Знак объемного заряда зависит от соотношения между работами выхода электрона из металла (A_1) и из полупроводника (A_2): если $A_1 > A_2$, то объемный заряд положительный, а если $A_1 < A_2$ — отрицательный.

3°. Вследствие существования электрического поля контактного слоя потенциал в точках этого слоя полупроводника при $A_1 > A_2$ ниже, чем в остальном объеме полупроводника, а при $A_1 < A_2$ — выше. Поэтому, если $A_1 > A_2$, то при прочих равных условиях энергия элект-

ронов в контактном слое полупроводника больше, чем в остальном объеме. Так как электрохимический потенциал во всех частях полупроводника одинаков, то в контактном слое дно зоны проводимости поднимается вверх, удаляясь от уровня Ферми, а верхний край валентной зоны также поднимается вверх, приближаясь к уровню Ферми. При этом ширина запрещенной зоны ΔW_0 между верхним краем валентной зоны и дном зоны проводимости остается такой же, как и в остальном объеме полупроводника.

Если $A_1 < A_2$, то направление вектора напряженности контактного электрического поля изменяется на противоположное, так что потенциал в точках контактного слоя полупроводника выше, чем в остальном объеме. Поэтому в контактном слое дно зоны проводимости опускается вниз, приближаясь к уровню Ферми, а верхний край валентной зоны также опускается вниз, удаляясь от уровня Ферми.

4°. Возможны следующие четыре случая контакта металла с примесными полупроводниками (рис. IV.5.1):

а) $A_1 > A_2$, полупроводник n -типа.

Объемный положительный заряд обусловлен избытком в контактном слое полупроводника положительных ионов донорных примесей. Контактный слой полупроводника обеднен основными носителями тока — электронами в зоне проводимости. Поэтому удельное сопротивление контактного слоя во много раз больше удельного сопротивления остальной части полупроводника. Такой контактный слой называют *запирающим*;

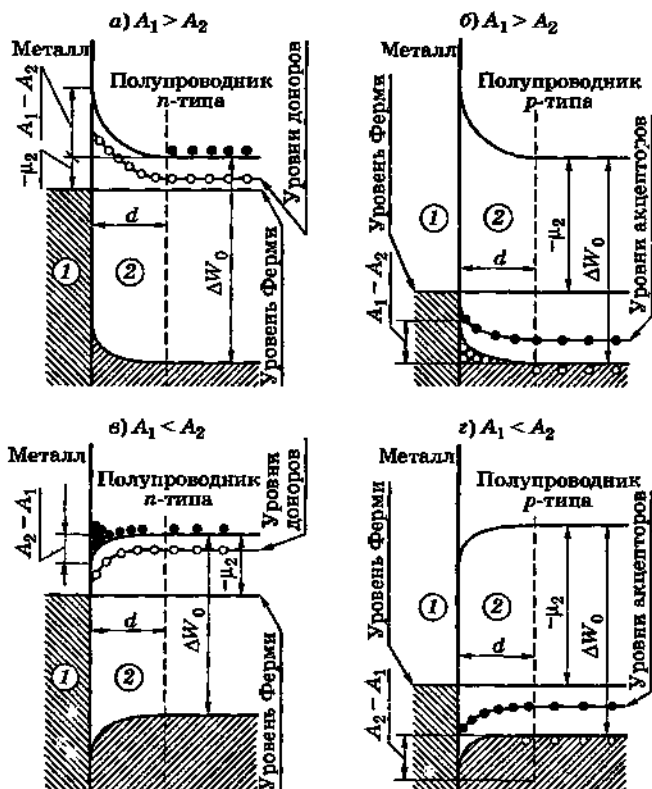
б) $A_1 > A_2$, полупроводник p -типа.

В контактном слое полупроводника имеется избыток основных носителей тока — дырок в валентной зоне.

Поэтому контактный слой обладает повышенной проводимостью. Такой контактный слой называют *антизапирающим*;

в) $A_1 < A_2$, полупроводник n -типа.

Отрицательный объемный заряд контактного слоя полупроводника обусловлен избытком основных носителей тока — электронов в зоне проводимости. Поэтому контактный слой полупроводника обладает повышенной проводимостью, т. е. представляет собой антизапирающий слой;



• — электроны в зоне проводимости и отрицательные ионы акцепторных примесей; ○ — дырки в валентной зоне и положительные ионы донорных примесей; d — толщина контактного слоя.

Рис. IV.5.1

г) $A_1 < A_2$, полупроводник p -типа.

В контактном слое полупроводника имеется избыток отрицательных ионов акцепторных примесей и недостаток основных носителей тока — дырок в валентной зоне. Поэтому контактный слой запирающий.

5°. Запирающий контактный слой на границе металла с полупроводником обладает *односторонней (вентильной) проводимостью*, т. е. при включении металла и полупроводника в электрическую цепь пропускает ток практически только в одном направлении (либо из металла в полупроводник, либо из полупроводника в металл).

На рис. IV.5.2 показаны зонные диаграммы для контакта металл—полупроводник n -типа (работа выхода $A_2 = A_n < A_1$) в состоянии термодинамического равновесия (см. рис. IV.5.2, а) и для двух полярностей включения контакта в электрическую цепь внешнего источника постоянного тока (см. рис. IV.5.2, б и в). Электрический ток через поверхность контакта осуществляется электронами проводимости, переходящими из полупроводника в металл путем туннелирования сквозь потенциальный барьер контактного слоя (ток I_1), и электронами, переходящими из металла в полупроводник за счет диффузии (I_2). Результирующий ток через контакт $I = I_1 - I_2$. В состоянии термодинамического равновесия $I_0 = I_1 - I_2 = 0$. Через E_k на рис. IV.5.2 обозначена напряженность контактного электрического поля, создаваемого положительными зарядами ионизированных донорных атомов в контактном слое, n -полупроводника.

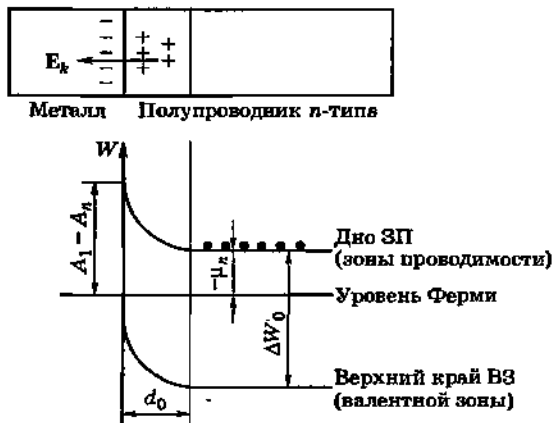


Рис. IV.5.2, а

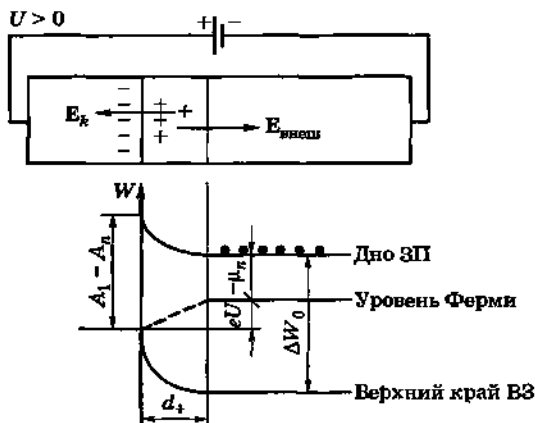


Рис. IV.5.2, б

В случае, показанном на рис. IV.5.2, б, контакт включен во внешнюю электрическую цепь в *пропускном направлении тока*. Удельное электрическое сопротивление в контактном слое во много раз больше, чем в остальном объеме полупроводника. Поэтому внешнее напряжение на контактном слое практически равно падению напряжения $U > 0$ на всей системе металл-полупроводник. Напряженность $E_{\text{внеш}}$ внешнего поля в контактном слое противоположен по направлению вектору E_k . Высота потенциального барьера для электронов проводимости полупроводника меньше равновесной на eU , а ширина $d_+ < d_0$. Поэтому вероятность перехода электронов из полупроводника в металл и ток I_1 быстро увеличиваются с ростом U . Диффузия электронов не зависит от U , так что $I_2 = I_2$, и результирующий ток $I = (I_1 - I_2) > 0$ идет в пропускном направлении из металла в полупроводник.

При противоположной полярности включения контакта во внешнюю электрическую цепь (рис. IV.5.2, в) внешнее напряжение считают отрицательным ($U < 0$). В этом случае вектор $E_{\text{внеш}}$ сонаправлен с E_k , потенциальный барьер для электронов проводимости полупроводника выше равновесного на $-eU$ и шире его: $d < d_0$.

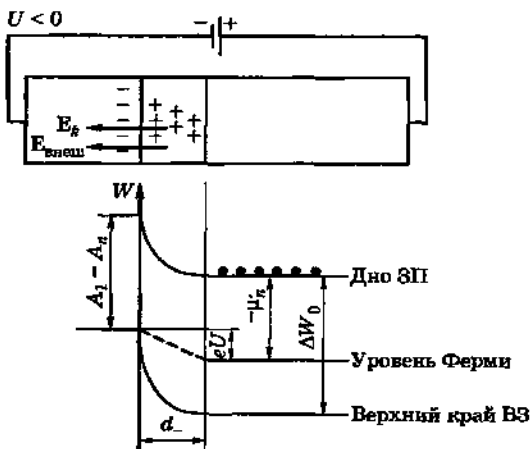


Рис. IV.5.2, в

Поэтому $I_1 < I_1^0$, и результирующий ток $I = (I_1 - I_2) < 0$, причем $|I_1| < I_1^0$.

Вольт-амперная характеристика контакта, т. е. зависимость тока I от внешнего напряжения U имеет вид (рис. IV.5.3):

$$I = I_s \left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right),$$

где $I_s = I_2^0 = I_1^0$, e — элементарный заряд, k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура.

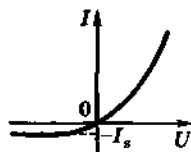


Рис. IV.5.3

6°. *Электронно-дырочным переходом, или р-п-переходом, называют обедненный основными носителями тока контактный слой, образующийся по обе стороны от поверхности контакта примесных полупроводников n- и р-типа, полученных путем введения соответствующих примесей в исходный кристалл собственного полупроводника.*

П р и м е ч а н и е. Контакт двух различных по химическому составу полупроводников называют *гетеропереходом*.

Двойной электрический слой *p-n*-перехода образуется в результате перемещения электронов из *n*- в *p*-полупроводник (так как $A_p > A_n$, где A_p и A_n — работы выхода электрона из полупроводников *p*- и *n*-типа), а дырок — в противоположном направлении. При этом в контактном слое *n*-полупроводника оказывается избыток положительных ионов донорных примесей, а в контактном слое *p*-полупроводника — избыток отрицательных ионов акцепторных примесей. Таким образом, контактный слой в обоих полупроводниках обеднен основными носителями и обладает пониженной проводимостью, т. е. является запирающим.

7°. На рис. IV.5.4 показаны зонные диаграммы для *p-n*-перехода в равновесном состоянии (а) и для двух полярностей включения в электрическую цепь внешнего источника тока (б, в). Контактный слой представляет собой потенциальный барьер для перехода через него основных носителей (электронов из *n*- в *p*-область и дырок из *p*- в *n*-область). Соответственно неосновные носители проходят через контактный слой беспрепятственно.

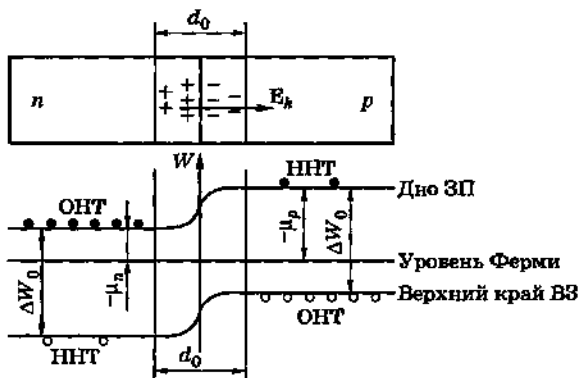


Рис. IV.5.4, а

В состоянии термодинамического равновесия электрический ток $I_{\text{осн}}^0$, идущий из p - в n -область за счет перехода через контактный слой основных носителей, полностью компенсируется электрическим током $I_{\text{неосн}}^0$, идущим в обратном направлении за счет перехода через контактный слой неосновных носителей. Результирующий электрический ток из p - в n -область

$$I_0 = I_{\text{осн}}^0 - I_{\text{неосн}}^0 = 0.$$

При включении p - n -перехода во внешнюю цепь в пропускном направлении (рис. IV.5.4, б) напряженность $E_{\text{внеш}}$ внешнего поля противоположна по направлению напряженности E_k контактного электрического поля, создаваемого ионизированными атомами донорных и акцепторных примесей в контактном слое. В этом случае с ростом внешнего напряжения $U < 0$ уменьшаются и высота и ширина потенциального барьера для основных носителей. Поэтому ток $I_{\text{осн}}$ быстро увеличивается с ростом U , тогда как сила тока $I_{\text{неосн}}$ не изменяется и остается равной $I_{\text{неосн}}^0$. Соответственно растет и результирующий ток $I > 0$ через p - n -переход.

$U > 0$

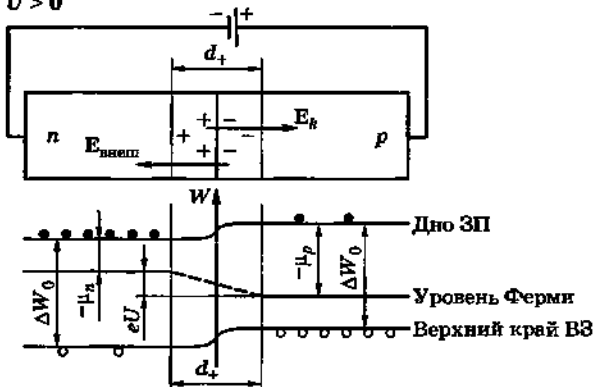


Рис. IV.5.4, б

В случае включения p - n -перехода во внешнюю цепь в запиорном направлении, показанном на рис. IV.5.4, e и соответствующем $U < 0$, вектор $E_{\text{внеш}}$ сонаправлен с E_k . С увеличением $|U|$ возрастают и высота и ширина потенциального барьера для основных носителей. Поэтому ток $I_{\text{осн}}$ $I_{\text{осн}}^0 = I_{\text{неосн}}^0$ и быстро убывает с увеличением $|U|$. Результирующий ток $I = I_{\text{осн}} - I_{\text{неосн}}^0 < 0$ и быстро приближается к значению $-I_{\text{неосн}}^0$.

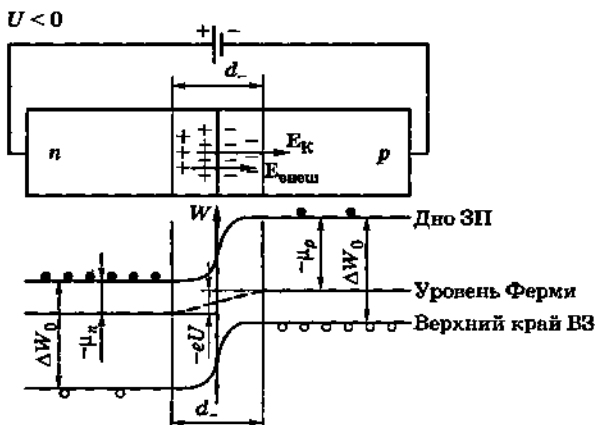


Рис. IV.5.4, в

Вольт-амперная характеристика p - n -перехода имеет вид

$$I = I_{\text{неосн}}^0 \left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right).$$

3. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

1°. В металлах и полупроводниках процессы переноса заряда (электрический ток) и энергии взаимосвязаны, так как осуществляются посредством перемещения подвижных носителей тока — электронов проводимос-

ти и дырок. Эта взаимосвязь обуславливает ряд явлений (Зеебека, Пельтье и Томсона), которые называют *термоэлектрическими явлениями*.

Выражения для плотности постоянного тока j и плотности потока энергии u в изотропном металле или полупроводнике в отсутствие внешнего магнитного поля имеют вид:

$$\frac{1}{\sigma} j = -\alpha \operatorname{grad} T - \operatorname{grad} \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right), \quad (5.1)$$

$$u = -K \operatorname{grad} T + \Pi j + \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) j. \quad (5.2)$$

Здесь μ — химический потенциал электронов, φ — электрический потенциал, e — элементарный заряд, $(\mu - e\varphi)$ — электрохимический потенциал, K и σ — коэффициент теплопроводности и удельная электропроводность. Коэффициенты α и Π называют соответственно *удельной термоэлектродвижущей силой* и *коэффициентом Пельтье*. Они зависят от материала проводника или полупроводника, а также от температуры. Величины Π и α связаны между собой соотношением, вытекающим из законов термодинамики и называемым *вторым соотношением Томсона*:

$$\Pi = \alpha T.$$

2°. Явлением Зеебека называют возникновение электродвижущей силы $\mathcal{E}_T$ в замкнутой электрической цепи, составленной из последовательно соединенных разнородных проводников (или полупроводников), если места их контакта (спаи) поддерживают при различных значениях температуры. Величину $\mathcal{E}_T$ называют *термоэлектродвижущей силой (термо-ЭДС)*. Так как

$\left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right)$ — непрерывная функция координат, то

$$\mathcal{E}_T = - \oint_L \alpha \operatorname{grad} T \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L \alpha dT,$$

где интегрирование производится по всему замкнутому контуру L электрической цепи.

Простейшую замкнутую электрическую цепь (рис. IV.5.5), состоящую из двух разнородных проводников (или полупроводников) 1 и 2, называют *термо-*

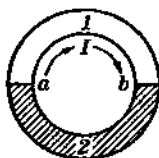


Рис. IV.5.5

элементом, или термопарой. Если T_a и T_b — температуры спаев a и b термоэлемента, то при выбранном на рис. IV.5.5 направлении обхода цепи по часовой стрелке термо-ЭДС термоэлемента равна

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_a}^{T_b} \alpha_1 dT - \int_{T_b}^{T_a} \alpha_2 dT = \int_{T_a}^{T_b} \alpha_{12} dT,$$

где α_1 и α_2 — значения α для двух различных материалов 1 и 2 ветвей термоэлемента, а $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$ — удельная дифференциальная термоэлектродвижущая сила для данной пары материалов:

$$\alpha_{12} = \frac{d\mathcal{E}_T}{dT}.$$

Если интервал температур $T_b - T_a$ невелик, то в его пределах можно считать, что α_{12} — постоянная величина и

$$\mathcal{E}_T = \alpha_{12}(T_b - T_a).$$

При $T_b > T_a$ $\mathcal{E}_T > 0$, если $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 > 0$, и $\mathcal{E}_T < 0$, если $\alpha_{12} < 0$. В первом случае термоток I в цепи термоэлемента идет в направлении, показанном на рис. IV.5.4 (по часовой стрелке), а во втором — в противоположном направлении. Таким образом, в горячем спае термоэлемента термоток всегда идет из ветви с меньшим значением α в ветвь с большим значением α .

Если в разрыв одной из ветвей термоэлемента включить последовательно любое число проводников другого состава, все спаи которых термостатированы, т. е. поддерживаются при одной и той же температуре, то термо-ЭДС в такой цепи будет равна термо-ЭДС исходного термоэлемента.

3°. Явление Зеебека обусловлено следующими тремя причинами:

а) преимущественной диффузией носителей тока в проводнике или полупроводнике от нагретого конца к холодному (объемная составляющая термо-ЭДС);

б) зависимостью контактной разности потенциалов от температуры, связанной с зависимостью химического потенциала μ от температуры (контактная составляющая термо-ЭДС);

в) увлечением электронов фононами, которые преимущественно перемещаются от горячего конца проводника к холодному и, взаимодействуя с электронами, вызывают преимущественное перемещение их в том же направлении (*фононная составляющая* термо-ЭДС); при низких температурах эта составляющая термо-ЭДС может играть определяющую роль.

Соответственно удельная термо-ЭДС α равна сумме трех составляющих:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_k + \alpha_{\text{ф}},$$

где

$$\alpha_k = -\frac{1}{e} \frac{d\mu}{dT}.$$

В металлах электронный газ находится в сильно вырожденном состоянии. Концентрация электронов проводимости очень велика и не зависит от температуры, а их распределение по энергиям и скоростям теплового движения незначительно изменяется при нагревании. Поэтому значения удельной термо-ЭДС металлов очень малы (порядка нескольких мкВ/К). Явление Зеебека в металлах используют в основном для измерения температуры.

В полупроводниках концентрация носителей тока (электронов проводимости и дырок) значительно меньше, чем в металлах. Обычно она столь невелика, что носители тока подчиняются классической статистике Больцмана (невырожденный полупроводник), т. е. средняя энергия их теплового движения равна $\frac{3}{2} kT$,

где k — постоянная Больцмана. С повышением температуры полупроводника увеличивается концентрация носителей тока (иногда она может сохраняться неизменной) и, что особенно существенно, возрастает скорость их теплового движения. Поэтому значения удельной термо-ЭДС α для невырожденных полупроводников с одним типом носителей тока во много раз больше, чем для металлов (порядка 10^2 — 10^3 мкВ/К). Коэффициенты α у электронных и дырочных полупроводников противоположны по знаку. Следовательно, наибольшие значения удельной дифференциальной термо-ЭДС α_{12} получаются для пар, составленных из электронного и дырочного полупроводников.

Полупроводниковые термоэлементы используют для прямого преобразования внутренней энергии в электрическую.

4°. *Явлением Пельтье* называют выделение или поглощение (в зависимости от направления тока) теплоты, избыточной над джоулевой и называемой *теплотой Пельтье*, осуществляющееся в спае разнородных проводников или полупроводников при прохождении через спай постоянного электрического тока.

На поверхности контакта двух проводников 1 и 2 непрерывны электрохимический потенциал ($\mu - e\varphi$), температура T и нормальные составляющие плотности потока энергии u и плотности тока j . Поэтому из выражения для u (5.2) следует, что при прохождении постоянного тока I из первого проводника во второй на поверхности контакта за промежуток времени t выделяется (или поглощается) теплота Пельтье

$$Q_{\Pi} = \Pi_{12}It = \Pi_{12}q,$$

где

$$\Pi_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = -\alpha_{12}T \quad \text{и} \quad q = It.$$

В отличие от джоулевой теплоты, пропорциональной квадрату силы тока и всегда выделяющейся в проводнике, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока, а ее знак зависит от направления тока в спае. Если ток в спае идет из проводника с большим значением коэффициента Пельтье в проводник с меньшим значением коэффициента Пельтье ($\Pi_1 > \Pi_2$ и $\Pi_{12} > 0$), то $Q_{\Pi} > 0$, т. е. теплота Пельтье выделяется в спае. При противоположном направлении тока через спай $Q_{\Pi} < 0$, т. е. теплота Пельтье поглощается в спае.

5°. Явление Пельтье обусловлено тем, что в разнородных проводниках или полупроводниках, находящихся в контакте, значения w_1 и w_2 средней энергии подвижных зарядов, участвующих в образовании тока, не равны друг другу. Пусть, например, $w_1 > w_2$ и ток имеет такое направление, что носители тока переходят через поверхность контакта из 1-го проводника во 2-й. Во 2-м проводнике носители тока, перешедшие из 1-го проводника, имеют энергию, превышающую ту, которая соответствует термодинамическому равновесию между носителями тока и узлами кристаллической решетки. Поэтому, сталкиваясь с узлами кристалличе-

ской решетки 2-го проводника, носители тока передают им избыток своей энергии, вызывая нагревание проводника. Этот процесс происходит в очень тонком слое 2-го проводника, прилегающем к поверхности контакта, т. е. проявляется в нагревании спая. Если при тех же условиях ток в спаяе имеет противоположное направление, то носители тока переходят из 2-го проводника в 1-й, имея энергию, меньшую равновесной в 1-м проводнике. Сталкиваясь с узлами кристаллической решетки 1-го проводника, носители тока получают энергию, недостающую им до равновесной. Следовательно, в этом случае спай должен охлаждаться.

Явление Пельтье обратное явлению Зеебека. При прохождении термотока в цепи термоэлемента в горячем спаяе теплота Пельтье поглощается, а в холодном — выделяется. Поэтому, в полном согласии со вторым началом термодинамики, для поддержания постоянного термотока необходимо к горячему спаяу термоэлемента непрерывно подводить извне теплоту, а от холодного спая — непрерывно отводить теплоту. Явление Пельтье в полупроводниках используют для создания достаточно экономичных и производительных холодильных установок.

6°. *Явлением Томсона* называют выделение (или поглощение) теплоты, избыточной над Джоулевой, при прохождении постоянного тока по неравномерно нагретому однородному проводнику или полупроводнику. Из выражений (5.1) и (5.2) для плотности потока энергии u и плотности тока j следует, что за единицу времени в единице объема проводника выделяется количество теплоты

$$w = -\operatorname{div} u = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T) + \frac{1}{\sigma} j^2 + \tau j \cdot \operatorname{grad} T,$$

где τ — коэффициент Томсона, связанный с удельной термо-ЭДС α проводника и коэффициентом Пельтье Π первым соотношением Томсона:

$$\tau = -\left(\frac{d\Pi}{dT} - \alpha\right) = -T \frac{d\alpha}{dT}.$$

За единицу времени в единице объема проводника выделяется *теплота Томсона*

$$u_{\tau} = \tau j \cdot \operatorname{grad} T.$$

Знак w_T зависит от направления тока: если $t > 0$, то $w_T > 0$, если ток в проводнике идет от холодного его конца к нагретому, и $w_T < 0$, если ток идет в обратном направлении.

В участке проводника длиной dl за промежуток времени t выделяется теплота Томсона

$$dQ_T = \tau I t \left(\frac{dT}{dl} \right) dl = \tau q \left(\frac{dT}{dl} \right) dl,$$

где $q = It$ — заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника, а производная $\frac{dT}{dl} > 0$, если ток идет в направлении возрастания температуры проводника.

Явление Томсона связано с тем, что в более нагретой части проводника средняя энергия носителей тока больше, чем в менее нагретой. Если носители тока перемещаются в направлении убывания температуры, то они отдают избыток своей энергии кристаллической решетке проводника, т. е. теплота Томсона выделяется: $dQ_T > 0$. Если носители тока движутся в противоположном направлении, то они пополняют свою энергию за счет энергии кристаллической решетки, т. е. теплота Томсона поглощается: $dQ_T < 0$. Таким образом, для проводников и полупроводников, обладающих электронной проводимостью, коэффициент Томсона $\tau > 0$, а для проводников и полупроводников, обладающих дырочной проводимостью, $\tau < 0$.

4. ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ

1°. *Термоэлектронной эмиссией* называют испускание электронов твердыми или жидкими телами, происходящее вследствие нагревания этих тел. Электроны, испускаемые нагретым телом, называют *термоэлектронами*, а само тело — *эмиттером*.

Для того чтобы электрон мог вылететь из металла, он должен обладать энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металл—вакуум, т. е. для совершения работы выхода.

При обычной (комнатной) температуре число таких электронов в металле ничтожно мало и термоэлектронная эмиссия практически отсутствует. Она становится заметной при значительно более высокой температуре, соответствующих видимому свечению раскаленного металла.

2°. Явление термоэлектронной эмиссии используют в электронных лампах и других электронных приборах с накаливаемым катодом.

Термоэлектронный ток в вакуумной двухэлектродной лампе (диоде), раскаленный катод которой испускает термоэлектроны, зависит от напряжения U_A , приложенного между анодом и катодом (анодное напряжение диода), формы, размеров и взаимного расположения электродов, работы выхода электронов из катода и его температуры. При прочих равных условиях зависимость силы тока I_A от U_A имеет вид, изображенный на рис. IV.5.6. Эта зависимость нелинейна, т. е. ток в диоде не подчиняется закону Ома.

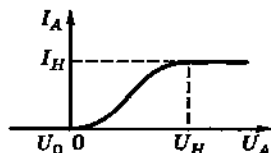


Рис. IV.5.6

Небольшой ток, существующий в цепи диода при отрицательных анодных напряжениях ($U_0 < U_A < 0$), обусловлен тем, что некоторые электроны, эмиттируемые катодом, имеют начальную кинетическую энергию, достаточную для преодоления задерживающего электрического поля между анодом и катодом. Обычно этот ток очень мал даже при $U_A = 0$, т. е. начальной кинетической энергией термоэлектронов можно пренебречь. В этом случае при небольших положительных значениях анодного напряжения величина термоэмиссионного тока, ограничиваемая объемным отрицательным зарядом, удовлетворяет формуле Лэнгмюра («закон трех вторых»): сила тока пропорциональна анодному напряжению в степени $3/2$.

Так, для бесконечно протяженных плоских электродов, находящихся на расстоянии d друг от друга, плотность тока

$$j = BU_A^{3/2},$$

где

$$B = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\epsilon_0}{d^2} \sqrt{\frac{e}{m}},$$

e и m — заряд и масса электрона, ϵ_0 — электрическая постоянная.

Для электродов в форме бесконечных коаксиальных цилиндров, внутренний из которых является катодом, ток с единицы длины катода

$$J = BU_A^{3/2},$$

где

$$B = \frac{8\pi\sqrt{2}}{9} \frac{\epsilon_0}{r_A\beta^2} \sqrt{\frac{e}{m}},$$

r_A — радиус анода, β^2 — табулированная функция от отношения радиусов анода и катода r_K .

3°. Максимальный термоэлектронный ток, возможный при данной температуре катода, называют *током насыщения*. При этом все электроны, вылетающие из катода, достигают анода. Ток насыщения растет с повышением температуры катода. Плотность тока насыщения j_n вычисляется по формуле Ричадсона—Дёшмана:

$$j_n = DCT^2 \exp\left(-\frac{A}{kT}\right),$$

где D — средняя прозрачность потенциального барьера на границе металл—вакуум для электронных волн.

$C = \frac{4\pi me k^2}{h^3} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ А}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^2)$ — эмиссионная постоянная, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка и A — работа выхода электрона из металла.

4°. *Автоэлектронной эмиссией* называют вырывание электронов из металла внешним электрическим полем. Этот эффект может происходить при комнатных температурах, причем температура металла в процессе холодной эмиссии практически не изменяется. Холод-

ная эмиссия объясняется туннельным эффектом — прохождением электронов любой скорости сквозь потенциальный барьер на границе металла. Вероятность просачивания электронов сквозь потенциальный барьер, а следовательно, и плотность тока j холодной эмиссии зависят от напряженности E внешнего электрического поля:

$$j \sim e^{-E_0/E},$$

где

$$E_0 = \frac{8\pi}{3he} \sqrt{2m\phi^3},$$

$\phi = A/e$, A — работа выхода электрона из металла.

5°. Явление фотоэлектронной эмиссии состоит в вырывании электронов с поверхности тел (главным образом металлов), помещенных в вакууме или газе, под действием света.

6°. Если поверхность металла в вакууме бомбардируется электронами, то наблюдается встречный поток электронов от поверхности. Это явление называют *вторичной электронной эмиссией*. Помимо отражения электронов от поверхности происходит их вырывание из металла. Наибольшая эмиссия вторичных электронов наблюдается при энергиях первичных электронов в несколько сотен эВ. Вторичная эмиссия характеризуется коэффициентом вторичной эмиссии δ , равным отношению суммы числа отраженных и эмиттированных электронов к числу первичных. Типичный вид зависимости δ от энергии первичных электронов W приведен на рис. IV.5.6. Для большинства обезгаженных металлов при нормальном падении электронов на поверхность $\delta_{\text{макс}}$ не превышает 2. При наличии адсорбированного газа δ увеличивается до 3. Вторичная электронная эмиссия применяется в электронных умножителях, служащих для многократного усиления слабых электронных токов.

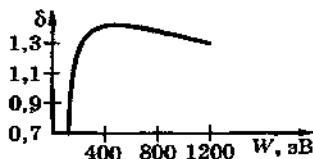


Рис. IV.5.6

Глава 6

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЗАКОН АМПЕРА

1°. *Магнитным полем* называют одну из форм проявления электромагнитного поля, особенностью которой является то, что это поле действует только на движущиеся частицы и тела, обладающие электрическим зарядом, а также на намагниченные тела независимо от состояния их движения.

Магнитное поле создается проводниками с током, движущимися электрически заряженными частицами и телами, намагниченными телами, а также переменным электрическим полем (токами смещения).

2°. Силовой характеристикой магнитного поля служит *вектор магнитной индукции* B . Он равен пределу отношения силы, действующей со стороны магнитного поля на элемент проводника с электрическим током, к произведению тока и длины элемента проводника, если длина этого элемента стремится к нулю, а элемент так расположен в поле, что этот предел имеет наибольшее значение:

$$B = \frac{1}{I} \left(\frac{dF}{dl} \right)_{\text{макс}}.$$

Вектор B направлен перпендикулярно направлению элемента проводника, удовлетворяющему указанному выше условию, и к направлению силы, действующей на этот элемент со стороны магнитного поля, причем из конца вектора B вращение по кратчайшему расстоянию от направления силы к направлению тока в элементе проводника должно быть видно происходящим против часовой стрелки.

3°. Силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с током, называют *силой Ампера*. Элементарная сила Ампера dF , действующая на малый элемент dl длины проводника, по которому идет электрический ток I , равна

$$dF = Idl \times B = j \times B dV, \quad (6.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор, равный по модулю длине dl элемента проводника и направленный в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{j}$ плотности тока в этом элементе проводника, а dV — объем элемента проводника. Соотношение (6.1) называют **законом (формулой) Ампера**.

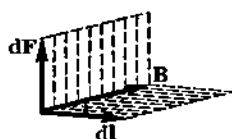


Рис. IV.6.1

Взаимное расположение векторов $d\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ показано на рис. IV.6.1. В частности, если $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$, то направление силы $d\mathbf{F}$ можно найти по *правилу левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца указывали бы направление электрического тока, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей со стороны поля на проводник.

4°. Для графического изображения магнитных полей вводится представление о *линиях магнитной индукции*. Линиями магнитной индукции называют кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{B}$ в этих точках поля. Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с токами, создающими поле. Замкнутость линий индукции является выражением отсутствия в природе свободных магнитных зарядов. Магнитное поле называют *однородным*, если векторы $\mathbf{B}$ во всех его точках одинаковы. В противном случае поле называют *неоднородным*.

5°. Направление линий индукции магнитного поля тока определяется *правилом Максвелла (правилом буравчика)*: если ввинчивать буравчик по направлению тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление линий магнитной индукции.

6°. В отличие от электростатических сил, которые являются центральными, сила Ампера, как и другие силы электромагнитного взаимодействия, не является центральной. Она направлена перпендикулярно к линиям индукции магнитного поля.

2. ЗАКОН БИО—САВАРА—ЛАПЛАСА

1°. *Закон Био—Савара—Лапласа* определяет вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ в произвольной точке C магнитного поля, создаваемый в вакууме эле-

ментом проводника длиной dl с постоянным током I (рис. IV.6.2):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} dl \times r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} j \times r dV,$$

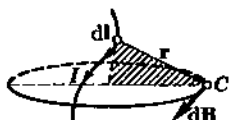


Рис. IV.6.2

где dl — вектор элемента проводника, равный длине dl и проведенный в направлении тока, dV — объем элемента проводника, r — радиус-вектор, проведенный из этого элемента проводника в рассматриваемую точку поля, $r = |r|$, $\mu_0 =$

$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ В} \cdot \text{с}/(\text{А} \cdot \text{м}) = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — магнитная постоянная. Вектор dB перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы dl и r , и направлен таким образом, чтобы из его конца кратчайшее вращение вектора dl до совмещения с вектором r казалось происходящим против часовой стрелки (рис. IV.6.2). Такое же направление dB следует из правила буравчика.

Модуль вектора dB равен

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол, под которым виден из рассматриваемой точки поля элемент dl проводника.

2°. Если проводники с током находятся не в вакууме, а в каком-либо веществе (магнетике), то это вещество намагничивается и магнитная индукция результирующего поля равна

$$B = B_0 + B_{\text{внутр}},$$

где B_0 — магнитная индукция внешнего (намагничивающего) поля, создаваемого токами проводимости и конвекционными токами (макроскопическими токами), а $B_{\text{внутр}}$ — магнитная индукция поля, создаваемого намагниченным веществом, т. е. молекулярными токами в веществе.

В тех случаях, когда однородный и изотропный магнетик полностью заполняет все пространство, где имеется магнитное поле, или часть его таким образом, что линии индукции намагничивающего поля не пересекают поверхность магнетика, то в магнетике

$$B = \mu B_0,$$

где μ — относительная магнитная проницаемость магнетика, показывающая, во сколько раз при заданном распределении макроскопических токов магнитная индукция в рассматриваемой точке поля в данном веществе, заполняющем все поле, больше, чем в вакууме.

3°. Напряженностью магнитного поля называют векторную физическую величину H , характеризующую магнитное поле и определяемую следующим образом:

$$H = \frac{B}{\mu_0} - I,$$

где вектор I — намагниченность среды в рассматриваемой точке поля. В частности, для магнитного поля в вакууме

$$H = \frac{B}{\mu_0}.$$

Если среда изотропна, то

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0},$$

где μ — скалярная величина, так что векторы H и B коллинеарны.

Если выполнены условия, указанные в п. 2°, т. е. в частности, для магнитного поля в однородном изотропном магнетике, заполняющем весь объем поля, напряженность H не зависит от μ и совпадает с напряженностью в рассматриваемой точке, то для магнитного поля, создаваемого той же системой макроскопических токов в вакууме, имеем

$$H = \int_l dH,$$

где dH находят из закона Био—Савара—Лапласа для напряженности магнитного поля:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^2} dl \times r$$

(смысл обозначений см. в п. 1°).

4°. Магнитная индукция B_q и напряженность H_q магнитного поля заряда q , движущегося в безграничной, однородной и изотропной среде со скоростью v , малой по сравнению со скоростью света в вакууме ($v \ll c$) равны:

$$B_q = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} v \times r, \quad H_q = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} v \times r,$$

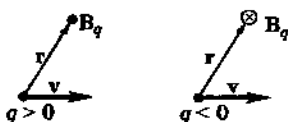


Рис. IV.6.3

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из движущегося заряда в рассматриваемую точку поля. Векторы $\mathbf{B}_q$ и $\mathbf{H}_q$ направлены перпендикулярно плоскости, проведенной через векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$. Если $q > 0$, то из концов векторов $\mathbf{B}_q$ и $\mathbf{H}_q$ кратчайшее вращение от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{r}$ кажется происходящим против часовой стрелки. Если $q < 0$, то $\mathbf{B}_q$ и $\mathbf{H}_q$ направлены в противоположную сторону (рис. IV.6.3). Магнитное поле движущегося заряда переменное, ибо числовое значение и направление $\mathbf{r}$ изменяются даже при $\mathbf{v} = \text{const}$. В отличие от электростатического поля неподвижного заряда, которое обладает сферической симметрией, магнитное поле обладает зеркальной симметрией относительно направления $\mathbf{v}$.

3. ПРОСТЕЙШИЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ТОКОВ

1°. По *принципу суперпозиции* полей, который справедлив также для магнитного поля, магнитная индукция $\mathbf{B}$ в любой точке магнитного поля проводника с током I равна векторной сумме индукций $\Delta \mathbf{B}_i$ элементарных полей, создаваемых всеми участками проводника:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{B}_i,$$

где n — общее число участков, на которые разбит проводник. При $n \rightarrow \infty$ $\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$, где интегрирование распространяется на всю длину проводника.

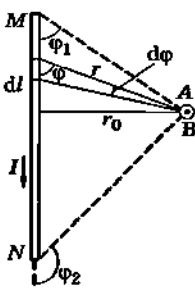


Рис. IV.6.4

Во всех примерах магнитных полей, рассматриваемых ниже, предполагается, что среда однородна, изотропна и заполняет все пространство, в котором существует магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}.$$

2°. Магнитное поле прямолинейного проводника MN с током I (рис. IV.6.4) в произвольной точке A

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

где r_0 — расстояние от точки A до проводника, φ_1 и φ_2 — углы, образованные радиусами-векторами, проведенными в точку A из начала и конца проводника, μ — относительная магнитная проницаемость, μ_0 — магнитная постоянная. В частности, для магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током I

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0},$$

(обозначения см. выше).

3°. Магнитное поле в центре прямоугольного витка с током I :

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab},$$

где a и b — стороны прямоугольника.

4°. Магнитным моментом замкнутого плоского контура с током I называют вектор

$$\mathbf{p}_m = IS,$$

где S — вектор, равный по модулю площади, охватываемой контуром, и направленный по нормали к плоскости контура так, чтобы из конца вектора $\mathbf{p}_m$ ток был виден идущим против часовой стрелки (рис. IV.6.5). Если контур с током I не плоский, то

его магнитный момент $\mathbf{p}_m = \int_S d\mathbf{p}_m$,

где $d\mathbf{p}_m = I dS$.

Магнитный момент $\mathbf{p}_m$ произвольной системы замкнутых токов равен векторной сумме магнитных моментов отдельных замкнутых контуров, составляющих систему. В частности, магнитный момент соленоида равен векторной сумме магнитных моментов всех его витков: $\mathbf{p}_m = NIS$, где N — общее число витков соленоида, S — площадь витка, I — ток в соленоиде. Вектор $\mathbf{p}_m$ направлен по оси соленоида и совпадает с направлением его магнитного поля.

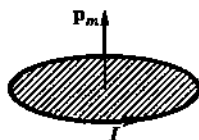


Рис. IV.6.5

5°. Магнитное поле, создаваемое круговым витком с током I в произвольной точке M на оси витка (рис. IV.6.6):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

6°. Магнитное поле в центре кругового витка радиуса R , по которому протекает ток I (рис. IV.6.6):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{R^3},$$

или по модулю

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Магнитное поле кругового витка направлено по оси витка перпендикулярно к его плоскости.

7°. Магнитное поле в центре прямоугольного контура с током (рис. IV.6.7):

$$B = \frac{2\mu\mu_0}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(ab)^2} p_m.$$

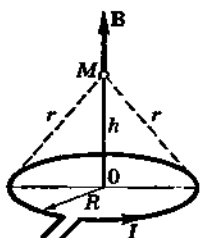


Рис. IV.6.6

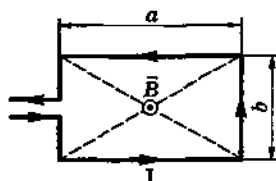


Рис. IV.6.7

8°. *Тороидом* называют кольцевую катушку, намотанную на сердечник, имеющую форму тора (рис. IV.6.8). Магнитное поле тороида целиком локализовано внутри его объема, где

$$B = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r}.$$



Рис. IV.6.8

Напряженность поля внутри тороида уменьшается от $H_{\text{макс}} = \frac{NI}{2\pi R_2}$ до $H_{\text{мин}} = \frac{NI}{2\pi R_1} = \frac{NI}{2\pi(R_2 + d)}$, где R_1 и R_2 — внешний и внутренний радиусы тора, N и d — число и диаметр витков обмотки. Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида:

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi R_{\text{ср}}} = nI,$$

где $H_{\text{ср}} = \frac{R_1 + R_2}{2}$, n — число витков на единицу длины средней линии тороида. При $R_{\text{ср}} \rightarrow \infty$ и постоянных d и n получается бесконечно длинный соленоид с однородным полем.

9°. **Соленоидом** называют цилиндрическую катушку, состоящую из большого числа витков проволоки, образующих винтовую линию. Если витки расположены вплотную или достаточно близко друг к другу, соленоид представляет собой систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось. На рис. IV.6.9 точками и крестами показаны сечения витков, в которых ток направлен из-за чертежа и за чертеж. Магнитная индукция B и напряженность H направлены по оси соленоида.

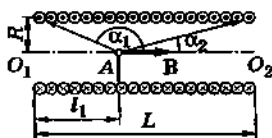


Рис. IV.6.9

Магнитное поле соленоида в произвольной точке A , лежащей на оси соленоида:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1),$$

где $n = \frac{N}{L}$ — число витков на единицу длины соленоида, α_1 и α_2 — углы, под которыми из точки A видны концы соленоида ($\alpha_1 > \alpha_2$) (рис. IV.6.9),

$$\cos \alpha_1 = -\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}}.$$

Максимальные значения магнитной индукции $B_{\text{макс}}$ напряженности $H_{\text{макс}}$ соответствуют точке, лежащей на середине оси соленоида:

$$B_{\text{макс}} = \mu\mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

10°. При условии $L \gg R$ магнитное поле внутри соленоида в точках его оси, достаточно удаленных от концов соленоида:

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

11°. Магнитная индукция и напряженность магнитного поля достаточно длинного соленоида в точках оси, совпадающих с его концами:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} nI.$$

12°. Напряженность H магнитного поля, созданного произвольной системой токов с магнитным моментом $\mathbf{p}_m$ на расстояниях от системы r , значительно превышающих ее линейные размеры, равна напряженности поля эквивалентного «магнитного диполя» с моментом $\mathbf{p}_m$:

$$H = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right].$$

Магнитным диполем называют систему из двух разноименных точечных магнитных «зарядов» $+m$ и $-m$, находящихся на расстоянии l друг от друга, малом по сравнению с расстоянием r до рассматриваемых точек поля. Магнитный момент диполя: $\mathbf{p}_m = ml$, где вектор l направлен от южного полюса к северному (от $-m$ к $+m$).

4. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОВОДНИКИ С ТОКАМИ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОВОДНИКОВ

1°. Из закона Ампера следует, что в магнитном поле на проводник с током I действует сила

$$\mathbf{F} = I \int_l d\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля в пределах малого элемента проводника длиной $d\mathbf{l}$, а интегрирование про-

водится по всей длине l проводника. Для замкнутого контура, находящегося в однородном магнитном поле, $F = 0$.

2°. Сила, действующая на элемент длины dl прямолинейного проводника с током I_1 со стороны длинного прямолинейного проводника с током I_2 , расположенного в вакууме параллельно первому на расстоянии d от него, равна

$$dF = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl.$$

Сила F , действующая на участок проводника длиной l , равна

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

Проводники с токами I_1 и I_2 одного направления притягиваются. В случае противоположно направленных токов проводники отталкиваются.

3°. На замкнутый проводник с током (например, прямоугольную рамку), помещенный в однородное магнитное поле, действует момент сил M :

$$M = p_m \times B, \quad (6.2)$$

где p_m — вектор магнитного момента, B — магнитная индукция поля. Вращающий момент направлен перпендикулярно к векторам p_m и B так, что из его конца кратчайшее вращение от p_m к B кажется происходящим против часовой стрелки. Под действием момента M свободный замкнутый проводник принимает положение устойчивого равновесия, при котором векторы p_m и B параллельны друг другу.

4°. В неоднородном магнитном поле на замкнутый проводник с током действует не только момент сил M , но и результирующая сила F (см. п. 1°). В этом случае формула (6.2) верна только для элементарного замкнутого контура с током I , т. е. для контура столь малой площади, что контур можно считать плоским, а магнитное поле в его пределах однородным. Соответственно замкнутый проводник с током произвольной формы и размеров можно представить в виде совокупности элементарных замкнутых контуров с тем же током в каждом.

5°. В неоднородном магнитном поле на элементарный контур с током, магнитный момент которого равен p_m , действует сила

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}) \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla)\mathbf{B}.$$

5. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

1°. *Циркуляцией вектора $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура L называют интеграл вида*

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}),$$

где L — контур произвольной формы, $d\mathbf{l}$ — вектор элемента длины контура, проведенный в направлении его обхода. Интегрирование распространено на всю длину замкнутого контура.

2°. *Закон полного тока для токов проводимости:* циркуляция вектора напряженности магнитного поля постоянного электрического тока вдоль замкнутого контура пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, т. е. проходящих через поверхность, натянутую на контур:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^n I_k,$$

где n — число всех проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы. Ток считают положительным, если из конца вектора плотности тока, направленного по оси проводника в сторону тока, обход контура L виден происходящим против часовой стрелки (по правилу буравчика). В противном случае токи считают отрицательными. Токи, которые не охватываются контуром L , не дают вклада в циркуляцию $\mathbf{H}$.

Для магнитного поля в вакууме закон полного тока можно записать в форме:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k,$$

где $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ — циркуляция вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ вдоль замкнутого контура L .

Закон полного тока применяется для расчета магнитных полей постоянного тока.

3°. Элементарный поток $d\Phi_m$ вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ сквозь участок поверхности площадью dS :

$$d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = B_n dS = B dS_n,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к площадке dS , B_n — проекция вектора $\mathbf{B}$ на направление нормали (рис. IV.6.10). Магнитный поток Φ_m сквозь произвольную поверхность S находят суммированием или интегрированием всех элементарных потоков:

$$\Phi_m = \int_S B dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = \int_S B_n dS = \int_S B dS_n.$$

Для однородного поля и плоской поверхности S , расположенной перпендикулярно вектору $\mathbf{B}$,

$$B_n = B = \text{const}, \quad \Phi_m = BS.$$

В электротехнике магнитный поток через поверхность S , натянутую на замкнутый контур, называют *потокосцеплением контура* и обозначают буквой Ψ .

4°. *Теорема Гаусса—Остроградского для потока магнитной индукции*: магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0.$$

Теорема выражает отсутствие в природе магнитных зарядов и замкнутость линий индукции магнитного поля. Теорема Гаусса—Остроградского

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

является одним из уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

5°. *Магнитной цепью* называют совокупность тел или областей пространства, в которых сосредоточено магнитное поле. Магнитные цепи составляют необходимую часть электрических машин и многих электрических устройств.

6°. Магнитный поток в магнитной цепи играет роль, аналогичную силе тока в электрической цепи. Во всех сечениях неразветвленной магнитной цепи магнитный поток Φ_m должен быть одинаковым.

7°. Закон Ома для замкнутой неразветвленной магнитной цепи (формула Гопкинсонов):

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

где Φ_m — магнитный поток, постоянный вдоль каждого участка цепи, $\mathcal{E}_m = IN$ — магнитодвижущая, или намагничивающая сила, N — число витков намагничивающего тока I , R_m — полное магнитное сопротивление цепи. Магнитное сопротивление участка цепи длиной l_i с постоянной площадью поперечного сечения S :

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i \mu_0 S},$$

где μ_i — относительная магнитная проницаемость данного участка цепи, μ_0 — магнитная постоянная.

Если S не постоянно, то

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl_i}{\mu_i \mu_0 S}.$$

8°. Общее (полное) магнитное сопротивление R_m последовательно соединенных участков магнитной цепи равно

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi},$$

где n — число участков цепи.

При параллельном соединении n магнитных сопротивлений полное магнитное сопротивление R_m цепи равно

$$R_m^{-1} = \sum_{i=1}^n R_{mi}^{-1}.$$

9°. Первое правило Кирхгофа для разветвленных магнитных цепей: алгебраическая сумма магнитных потоков в участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0,$$

где n — число участков, сходящихся в узле.

Магнитный поток считают положительным, если линии индукции подходят к узлу. Если они выходят из узла, то поток Φ_{mi} считают отрицательным.

10°. Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков Φ_{mi} на магнитные сопротивления R_{mi} соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме приложенных в этом контуре магнитодвижущих сил $\mathcal{E}_{mi}$:

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_{mi},$$

где k — число участков магнитной цепи, составляющих замкнутый контур. Φ_{mi} и $\mathcal{E}_{mi}$ считают положительными, если направления линий индукции соответствующих им магнитных полей совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура.

6. РАБОТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1°. Под действием силы Ампера незакрепленный проводник с током перемещается в магнитном поле. Элементарная работа δA , совершаемая силой Ампера при перемещении элемента dl проводника с током I , равна

$$\delta A = I d\Phi_m,$$

где $d\Phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r} \times d\mathbf{l})$ — магнитный поток сквозь малую поверхность $d\mathbf{S} = |d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}|$, прочерчиваемую малым элементом $d\mathbf{l}$ проводника при его малом перемещении $d\mathbf{r}$.

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении проводника конечной длины с током $I = \text{const}$:

$$A = I\Phi_m,$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь поверхность, которую описывает проводник при своем движении.

2°. При произвольном перемещении замкнутого контура с током $I = \text{const}$ в магнитном поле совершается работа

$$A = I \Delta\Phi_m,$$

где $\Delta\Phi_m$ — изменение магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур.

При вычислении магнитного потока Φ_m сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром с током, направление внешней нормали выбирается таким образом, чтобы из конца вектора нормали ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки.

3°. Работа перемещения в магнитном поле проводника или замкнутого контура с током $I = \text{const}$ совершается за счет энергии, затрачиваемой источником тока.

Глава 7

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

1. СИЛА ЛОРЕНЦА

1°. На электрический заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

где q — величина движущегося заряда ($q > 0$ для положительного заряда и $q < 0$ для отрицательного заряда), $\mathbf{v}$ — скорость заряда, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, в котором движется заряд.

На рис. IV.7.1 показано взаимное расположение векторов F_L , B и v для случаев $q > 0$ и $q < 0$. Сила F_L не совершает работы, ибо она перпендикулярна к вектору v .



Рис. IV.7.1

2°. При совместном действии на движущийся заряд q электрического и магнитного полей результирующая сила, также называемая *силой Лоренца*, равна

$$F = qE + qv \times B,$$

где E — напряженность электрического поля.

Разделение силы Лоренца на электрическую $F_e = qE$ и магнитную $F_m = qv \times B$ составляющие относительно, так как зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Например, в системе отсчета, движущейся со скоростью v , заряд q неподвижен и магнитная составляющая силы Лоренца, действующей на заряд q , равна нулю.

3°. В однородном магнитном поле, перпендикулярном направлению скорости движущейся заряженной частицы, последняя под действием силы Лоренца движется по окружности постоянного радиуса r в плоскости, перпендикулярной к вектору B :

$$r = \frac{m\gamma v}{|q| \cdot B},$$

где m — масса частицы, $|q|$ — модуль ее заряда, v — скорость частицы, B — магнитная индукция, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский множитель Лоренца (γ -фактор Лоренца), c — скорость света в вакууме. При $v/c \rightarrow 1$ $\gamma \rightarrow 1$. Сила Лоренца является центростремительной силой. По направлению отклонения элементарной заряженной частицы в магнитном поле (рис. IV.7.2) судят о знаке ее заряда.

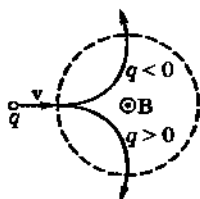


Рис. IV.7.2

Период T обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле:

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{m\gamma}{|q|}.$$

При скорости частицы $v \ll c$ период T не зависит от v .

4°. Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле так, что вектор v ее скорости составляет

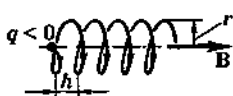


Рис. IV.7.3

угол α с направлением вектора магнитной индукции B , то траекторией частицы является винтовая линия (рис. IV.7.3) с радиусом витков r и шагом винта h :

$$r = \frac{m\gamma}{|q|} \frac{v \sin \alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{m\gamma v}{|q|} \cos \alpha.$$

5°. Если рассмотренное в п. 4° движение происходит в неоднородном поле, магнитная индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то радиус витков и шаг винта уменьшаются по мере увеличения B .

2. УДЕЛЬНЫЙ ЗАРЯД ЧАСТИЦ. МАСС-СПЕКТРОГРАФИЯ

1°. *Удельным зарядом* частицы называют отношение $\frac{q}{m}$ ее заряда к массе. Для измерения удельного за-

ряда используется отклонение заряженных частиц в магнитном поле. Экспериментально определяются скорость частицы v (обычно скорость частицы создается электрическим полем с заданной разностью потенциалов) и радиус r траектории частицы в магнитном поле:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{\gamma v}{rB}.$$

2°. Для определения удельного заряда и массы положительных ионов одновременно действуют на частицы магнитным и электрическим полями. Приборы, предназначенные для точных измерений относительных атомных масс изотопов химических элементов, называют *масс-спектрографами* и *масс-спектрометрами*.

3°. *Спектром масс (массовым спектром)* частиц называют совокупность значений их масс. В *масс-спектрографе Астона* (рис. IV.7.4) все частицы с одинаковым удельным зарядом $\frac{q}{m}$ отклоняются во взаимно перпендикулярных электрическом поле конденсатора С и маг-

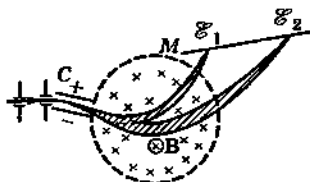


Рис. IV.7.4

нитном поле катушки М так, что независимо от их скорости они фокусируются в одной точке. На фотопластинке получается ряд узких параллельных линий ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$), соответствующих различным значениям

$$\frac{q}{m} \left[\left(\frac{q}{m} \right)_{\mathcal{E}_1} \gg \left(\frac{q}{m} \right)_{\mathcal{E}_2} \right].$$

3. УСКОРИТЕЛИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

1°. Устройства для получения заряженных частиц с весьма большой кинетической энергией называют *ускорителями*. Методы ускорения делятся на три группы: *прямой, индукционный и резонансный*. По форме траекторий движения частиц ускорители делятся на *линейные и циклические*. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических они являются окружностями или спиралями.

2°. В прямых линейных ускорителях частица однократно проходит электрическое поле с большой разностью потенциалов, созданное электростатическими генераторами, например *генератором Ван-де-Граафа*.

3°. Единственным циклическим ускорителем индукционного типа является *бетатрон*, используемый для ускорения электронов до энергий порядка 10^2 МэВ. В бетатроне использовано возникновение в ускорительной камере вихревого электрического поля под влия-

нием переменного магнитного поля электромагнита. Траекториями электронов являются окружности, совпадающие с линиями напряженности вихревого электрического поля. При многократном движении электрона по устойчивой круговой орбите электрон приобретает большую энергию.

Напряженность вихревого электрического поля в бетатроне равна

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{dB_{\text{ср}}}{dt},$$

где $B_{\text{ср}}$ — среднее значение в момент времени t магнитной индукции в пределах круга радиуса r , r — расстояние от оси поля до рассматриваемой точки (радиус круговой орбиты электрона в бетатроне). Условие стабильности орбиты электрона в бетатроне:

$$B = \frac{1}{2} B_{\text{ср}},$$

где B — мгновенное значение магнитной индукции на орбите.

Условия устойчивости орбиты электрона в бетатроне:

а) *аксиальная фокусировка*, т. е. расположение орбиты в одной плоскости, достигается за счет специальной формы полюсных наконечников электромагнита, обеспечивающей постепенное ослабление магнитного поля по мере удаления от его оси;

б) *радиальная фокусировка*, т. е. возвращение на стабильную орбиту электронов, случайно сошедших с нее, достигается за счет того, что магнитная индукция поля электромагнита убывает от оси к периферии медленнее, чем $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от рассматриваемой точки поля до оси.

4°. В резонансных циклических ускорителях, применяемых для ускорения протонов, дейтронов и других частиц, ускоряемая частица многократно проходит через переменное электрическое поле по замкнутой траектории, каждый раз увеличивая свою энергию. Для управления движением частиц и периодического возвращения их в область ускоряющего электрического поля применяется сильное магнитное поле. Прохождение частицей определенных точек переменного электрического поля происходит приблизительно в одной и той же его фазе («в резонансе»).

5°. Простейшим резонансным ускорителем является *циклотрон*. Переменное ускоряющее электрическое поле создается в щели между двумя половинами цилиндрической коробки (*дуантами*) M и N (рис. IV.7.5). Частица ускоряется каждый раз, когда она, описав под действием магнитного поля полуокружность в дуанте, входит в зазор между M и N . Для непрерывного ускорения частицы необходимо выполнение условия резонанса (*синхронизма*): $T_0 = T$, где T_0 — период колебаний электрического поля, T — период обращения частицы. При скоростях v частицы, соизмеримых со скоростью света в вакууме, с увеличением v период T возрастает и условие синхронизма нарушается.

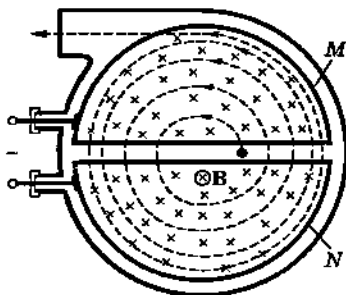


Рис. IV.7.5

6°. Принцип *автофазировки* в циклических ускорителях релятивистских частиц заключается в том, что всякое отклонение периода T от резонансного значения T_0 приводит к такому изменению прироста энергии частицы при каждом ускорении, что T колеблется около T_0 , оставаясь в среднем равным ему:

$$T_0 \approx T = \frac{2\pi}{B} \frac{m\gamma}{|q|} = \frac{2\pi}{B} \frac{W}{|q|c^2},$$

где W — полная энергия частицы, c — скорость света в вакууме, γ -фактор Лоренца.

7°. В *фазотроне* ускорение осуществляется при $B = \text{const}$ медленным увеличением T_0 . Из принципа автофазировки следует, что при этом растет энергия частиц вследствие релятивистского возрастания массы со скоростью.

В электронном синхротроне при неизменном периоде T_0 ускоряющего электрического поля индукция магнитного поля B медленно возрастает так, что величина B/γ и период T остаются постоянными. Энергия ускоряемых релятивистских электронов увеличивается с ростом B : $W = \text{const} \cdot B$.

В протонном синхротроне (синхрофазотроне), предназначенном для ускорения протонов и других тяжелых заряженных частиц (ионов), одновременно и согласованно увеличиваются и магнитная индукция и частота ν_0 так, что равновесная орбита ускоряемой частицы — окружность.

8°. С помощью современных ускорителей экспериментально исследуются проблемы физики высоких энергий, изучающей структуру элементарных частиц и законы их взаимодействий на очень малых пространственно-временных интервалах (расстояния $\approx 10^{-18}$ м, времена порядка и меньше ядерного времени). Большое значение имеют эксперименты по обнаружению новых частиц, в особенности фундаментальных, которые могли бы служить основой для всех других частиц. Необходимое для ускорения частиц увеличение радиусов их орбит приводит к увеличению размеров ускорителей и их веса, а также усложняет фокусировку, необходимую для устойчивого движения частиц в вакуумной камере ускорителя. Сильная (жесткая) фокусировка позволяет снизить вес и размеры ускорителей. Она достигается специальной конструкцией электромагнитов и особым режимом магнитного поля.

В ускорителях на встречных пучках используется столкновение двух движущихся навстречу друг другу частиц высоких энергий. Энергия реакции W_p зависит от соотношения импульсов сталкивающихся частиц. Она максимальна и равна сумме энергий частиц, если импульсы частиц равны по модулю и противоположны по направлению ($p_1 = -p_2$), так что в ультрарелятивистском случае $W_p \approx 2p_1c$. В случае реакции на неподвижной мишени ($p_2 = 0$) энергия реакции во много раз меньше при том же значении энергии налетающей частицы 1.

В коллективном методе пучок электронов падает на поток протонов и за счет кулоновского взаимодейст-

вия увлекает за собой протоны до тех пор, пока $v_e > v_p$, где v_e — скорость электронов, v_p — скорость протонов. Когда $v_e = v_p$, энергия протонов оказывается в ≈ 1840 раз больше энергии электронов. В этом методе ускоряющее действие электрического поля определяется не только внешним источником, но и числом ускоряемых частиц.

4. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

1°. *Электронная оптика* изучает свойства заряженных частиц (электронов, протонов), взаимодействующих с электрическими и магнитными полями. В *геометрической электронной оптике* пренебрегают волновыми свойствами частиц. Заряженные частицы в ней представляют как материальные точки, а их движение в полях описывается совокупностью траекторий.

Законы геометрической электронной оптики нарушаются в тех областях пучков заряженных частиц, где их плотность существенно меняется в пределах линейных размеров

$$l \sim \frac{h}{p} = \frac{h}{2\pi\sqrt{2me\phi}},$$

где h — постоянная Планка, e и m — заряд и масса частиц, ϕ — потенциал электростатического поля, p — импульс частицы. Этим участкам соответствуют границы пучков и места их схождения (например, в главном фокусе, в точках изображения, создаваемого электронно-оптическими системами), где наблюдаются дифракционные явления, связанные с волновыми свойствами пучков частиц.

2°. На электронную оптику могут быть перенесены все основные законы обычной (световой) оптики. Аналогия обычной и электронной оптики основывается на том, что поле, в котором движется пучок электронов (или других заряженных частиц), можно уподобить оптически неоднородной среде, а траектории электронов — световым лучам в этой среде (оптико-механическая аналогия).

В электронной оптике в основном применяют *аксиально симметричные* поля (аналогично аксиально симметричным оптическим системам).

3°. Для движения электрона в электростатическом поле в нерелятивистском случае (скорость электрона $v \ll c$, где c — скорость света в вакууме) *электронно-оптический показатель преломления «среды»* равен

$$n = C\sqrt{\varphi},$$

где φ — потенциал в рассматриваемой точке поля, отсчитываемый от потенциала той точки, в которой скорость электрона равна нулю, C — постоянная.

Закон преломления на границе раздела двух «сред» (закон Снеллиуса) в этом случае имеет вид

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1}},$$

где i и r — углы «падения» и «преломления» электронного луча на некоторой поверхности, разделяющей области поля с потенциалами φ_1 и φ_2 . Это соотношение применяют для приближенного нахождения траекторий электронов; при этом задаются рядом эквипотенциальных поверхностей («поверхностей раздела») и рассматривают электронные траектории как отрезки прямых («лучи»). Более точное построение траекторий электронов производится с учетом их кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\varphi} \frac{d\varphi}{dz},$$

где $\frac{d\varphi}{dz}$ — изменение потенциала электростатического поля в направлении нормали к траектории.

В релятивистском случае электронно-оптический показатель преломления для электростатического поля имеет

$$n = C\sqrt{\varphi(1 + k\varphi)},$$

где $k = \frac{e}{2mc^2}$ — релятивистская поправка, e и m — заряд и масса электрона.

Если помимо электростатического поля на электрон действует стационарное магнитное поле, то электронно-оптический показатель преломления зависит не только от ϕ , но и от направления движения электрона в рассматриваемой точке. Следовательно, комбинированное (электростатическое и магнитное) поле подобно анизотропной «среде».

4°. Для управления движением электронов в электронно-оптических приборах (*электронных микроскопах, умножителях, преобразователях света*) служат электростатические и магнитные линзы.

Электростатические линзы представляют собой металлические диафрагмы с отверстиями круговой формы или отрезки металлических труб круглого сечения. Оптическая ось линзы образуется осями симметрии отдельных ее электродов. Линзу называют *одиночной*, если потенциалы ее крайних электродов одинаковы; в противном случае ее называют *иммерсионной*.

Поле электростатической линзы меняет скорости электронов по величине и направлению. Если электроны проходят сквозь линзу, то она является *собирающей*. Траектории периферийных электронов в пучке пересекают оптическую ось линзы всегда раньше, чем траектории центральных электронов пучка (сферическая абберрация, всегда отрицательна).

Если потенциал в средней точке одиночной линзы (*седловой точке*) ниже потенциала источника электронов (катода), то линза становится *электронным зеркалом*. Это зеркало может быть *рассеивающим* и создавать мнимое изображение или может быть *собирающим* и создавать действительное изображение, в зависимости от положения в линзе той эквипотенциальной поверхности, от которой отражаются электроны.

Форма траекторий электронов в электростатических линзах в случае скоростей электронов, много меньших скорости света в вакууме (нерелятивистский случай), зависит только от распределения потенциала; когда скорость электронов приближается к скорости света, на траектории начинает также влиять величина

$\frac{e}{m}$ — отношение заряда электрона к его массе.

Линзу называют *тонкой*, если ее фокусное расстояние во много раз больше толщины поля линзы в осевом

направлении. *Оптическая сила тонкой одиночной электростатической линзы* в нерелятивистском случае приближенно равна

$$D_e = \frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{\varphi_0}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi}} dz,$$

где f — фокусное расстояние линзы, $\varphi(z)$ — распределение потенциала вдоль оптической оси линзы z , $\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dz^2}$,

φ_0 — одинаковый потенциал крайних электродов линзы, а интегрирование проводится по всей толщине линзы $(z_2 - z_1) \ll f$.

Для иммерсионной линзы при тех же условиях

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{4\sqrt{\varphi_1}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi}} dz \quad \text{и} \quad f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}},$$

где f_1 и f_2 — переднее (в пространстве предмета) и заднее (в пространстве изображения) фокусные расстояния линзы, а φ_1 и φ_2 — потенциалы электростатического поля в пространстве предмета и пространстве изображения.

5°. *Магнитные линзы* обычно имеют вид коротких соленоидов, коаксиальных пучку электронов. Для концентрации магнитного поля вблизи оптической оси линзы применяют соленоиды, окруженные ферромагнитными оболочками.

Оптическая сила тонкой магнитной линзы для параксиального пучка в нерелятивистском случае приближенно равна

$$D_m = \frac{1}{f} = \frac{ec^2}{8mU} \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz,$$

где U — разность потенциалов, пройденная электроном до входа и магнитную линзу, $B_z(z)$ — магнитная индукция вдоль оптической оси линзы. Поле магнитной линзы меняет скорость электронов только по направлению (*фокусирующее действие*), накручивая их траектории вокруг оптической оси. Это вызывает поворот элек-

тронного изображения относительно предмета на угол Θ . Для параксиального пучка этот угол равен

$$\Theta = c \sqrt{\frac{e}{8mU}} \int_{-\infty}^{\infty} B_z dz.$$

Ввиду того, что $\int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 dz > 0$, существуют только соби-

рательные магнитные линзы. При этом D_m , в отличие от электростатических линз, зависит от скорости электронов (т. е. от U) даже в нерелятивистском случае. Для релятивистских скоростей электронов величину U в приведенных формулах следует заменить на $U^* = U + \frac{e}{2mc^2} U^2$ (m — масса электрона).

6°. Сtigматическое изображение предметов в электронно-оптических системах получается только для параксиальных электронных пучков.

Основные уравнения (уравнения траекторий) в осесимметричных полях для параксиальных пучков электронов имеют вид:

а) для электростатических линз в нерелятивистском случае

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{1}{2\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \frac{dr}{dz} + \frac{r}{4\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0,$$

где $\varphi(z)$ — потенциал на оптической оси системы, отсчитываемый от потенциала точки, в которой скорость электрона $v = 0$, z и r — координаты соответственно вдоль этой оси и в радиальном направлении; отсюда следуют законы подобия: 1) при увеличении линейных размеров электронно-оптической системы в n раз во столько же раз увеличиваются размеры траекторий; 2) траектории не изменяются, если потенциалы всех электродов увеличиваются в n раз;

б) для электростатических линз в релятивистском случае

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1+k\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} r = 0,$$

где $k = \frac{e}{2mc^2}$, m — масса электрона, c — скорость света в вакууме;

в) для магнитных линз в нерелятивистском случае

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{ec^2}{8mU} B_z^2 r = 0,$$

где B_z — проекция магнитной индукции на ось линзы, U — разность потенциалов, которую прошел электрон до входа в линзу;

г) для магнитных линз в релятивистском случае распространение формулы производится согласно сказанному в п. 5°;

д) для комбинированных электростатического и магнитного полей в нерелятивистском случае

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{\varphi} \frac{dr}{dz} \right) + \frac{1}{4\sqrt{\varphi}} \left(\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{ec^2}{2m} B_z^2 \right) r = 0,$$

в релятивистском случае

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{\varphi(1+k\varphi)} \frac{dr}{dz} \right] + \\ + \frac{1}{4} \left[(1+k\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{ec^2}{2m_0} B_z^2 \right] r = 0.$$

Наличие пространственного заряда в электронно-оптических системах учитывается заменой в приведенных уравнениях $\frac{d^2 \varphi}{dz^2}$ на $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0}$, где $\rho(z)$ — осевое распределение пространственного заряда, ϵ_0 — электрическая постоянная.

7°. Ввиду невозможности ограничения параксиальными электронными пучками в электронно-оптических системах неизбежны aberrации.

Электростатические и магнитные осесимметричные системы обладают в основном сферической aberrацией, комой, астигматизмом, кривизной поля изображения и дисторсий.

Нестабильность питания источников электронов и линз приводит к некоторому разбросу скоростей электронов и вызывает появление хроматической aberrации, хроматической разности увеличений и хроматической разности поворота изображения (последние две погрешности присущи только магнитным

линзам). Все эти погрешности ухудшают разрешающую способность и качество изображения в электронно-оптических системах.

8°. *Электронной микроскопией* называют получение изображений микроскопических объектов с помощью электронных пучков, фокусируемых электрическими и магнитными полями. В электронной микроскопии используют электроны с дебройлевской длиной волны, много меньшей размеров объекта, так что пучки электронов ведут себя, как лучи в геометрической оптике. Разрешающая способность электронных микроскопов на несколько порядков выше, чем оптических микроскопов, и ограничивается волновыми свойствами электронов при данной их энергии.

Глава 8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1°. *Явление электромагнитной индукции* состоит в том, что в проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле, возникает *электродвижущая сила индукции*. Если контур замкнут, то в нем возникает электрический ток, называемый *индукционным током*.

2°. *Закон электромагнитной индукции Фарадея*: ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$ в контуре равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока Φ_m сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Направления обхода контура и внешней нормали $\mathbf{n}$, принятые при вычислении соответственно $\mathcal{E}_i$ и Φ_m , взаимосвязаны: из конца вектора $\mathbf{n}$ обход контура должен быть виден происходящим против часовой стрелки.

Если замкнутый контур состоит из N последовательно соединенных витков (например, имеет вид соле-

нонда), то под Φ_m следует понимать полный магнитный поток сквозь поверхности, ограниченные всеми N витками. В электротехнике эту величину называют *потокосцеплением* контура $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_{mi}$, и закон электро-

магнитной индукции записывают в форме

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Psi}{dt}.$$

3°. Знак минус в формуле для $\mathcal{E}_i$ является выражением *правила Ленца*: индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемый им магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, уменьшает те изменения магнитного потока, которые вызвали появление индукционного тока.

4°. Магнитный поток, охватываемый контуром, может изменяться по ряду причин — благодаря деформации или перемещению контура во внешнем магнитном поле, а также вследствие изменения магнитного поля во времени. Полная производная $\frac{d\Phi_m}{dt}$ учитывает действие всех этих причин.

Если проводящий контур движется в стационарном магнитном поле, то ЭДС индукции наводится во всех участках контура, пересекающих линии магнитной индукции, причем общая ЭДС в контуре равна алгебраической сумме ЭДС, возникающих во всех его участках. Появление ЭДС электромагнитной индукции в этом случае можно объяснить тем, что на каждый свободный заряд q (носитель тока в проводнике), перемещающийся вместе с проводником в магнитном поле, действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость движения заряда вместе с проводником, а $\mathbf{v}'$ — скорость заряда относительно проводника. Под действием сторонних сил — касательных к проводнику составляющих сил Лоренца — заряды q перемещаются, образуя в замкнутом проводнике индукционный ток.

5°. Направление вектора напряженности стороннего поля электромагнитной индукции в прямолинейном

проводнике, движущемся в магнитном поле, определяется с помощью *правила правой руки*: если расположить правую руку так, чтобы вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ входил в ладонь, а отставленный большой палец совпадал с направлением перпендикулярной к проводнику составляющей скорости его движения, то вытянутые четыре пальца укажут направление вектора напряженности стороннего поля электромагнитной индукции, возникающего в проводнике.

Примеры

1. ЭДС электромагнитной индукции возникает в отрезке проводника длиной l , который движется в магнитном поле и пересекает линии индукции. В простейшем случае, когда скорость движения проводника $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции,

$$\mathcal{E}_l = -vBL.$$

2. Плоский виток вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω так, что ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна вектору магнитной индукции $\mathbf{B}_0$ внешнего поля. ЭДС индукции в витке равна

$$\mathcal{E}_l = B_0 S \omega \sin \omega t - \frac{d\Phi_{mc}}{dt},$$

где S — площадь, ограниченная витком, Φ_{mc} — поток самоиндукции витка.

6°. ЭДС электромагнитной индукции в неподвижном проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле, равна

$$\mathcal{E}_l = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}.$$

Явление электромагнитной индукции в неподвижных проводниках обусловлено тем, что переменное магнитное поле вызывает появление непотенциального (т. е. вихревого) электрического поля, называемого *индуцированным полем*.

Циркуляция напряженности $\mathbf{E}$ этого поля вдоль замкнутого контура L проводника равна

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}.$$

2. ВИХРЕВЫЕ ИНДУКЦИОННЫЕ ТОКИ

1°. Индукционные токи, возникающие в массивных проводниках, называют *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Замкнутые цепи таких токов образуются в толще самого проводника.

Количество теплоты, выделяемое в единицу времени вихревыми токами, прямо пропорционально квадрату частоты изменения магнитного поля. Для выделения больших количеств теплоты (в *индукционных печах*) применяют токи высокой частоты.

2°. Для уменьшения вредных потерь энергии, связанных с токами Фуко, магнитные цепи электрических машин и сердечники трансформаторов изготавливают из отдельных пластин, располагаемых параллельно линиям магнитной индукции.

Для увеличения сопротивления магнитных цепей применяют *магнитодизэлектрики* — спрессованные под большим давлением смеси порошкообразных ферромагнитных веществ и диэлектриков, а также *ферриты* — полупроводниковые ферромагнитные материалы с удельным сопротивлением, в $\sim 10^9$ раз превосходящим удельное сопротивление металлических ферромагнитных веществ.

3. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ

1°. Возникновение ЭДС индукции в цепи в результате изменения тока в этой цепи называют *явлением самоиндукции*. Собственное магнитное поле тока в контуре создает магнитный поток Φ_{mc} сквозь поверхность S , ограниченную самим контуром:

$$\Phi_{mc} = \int_S B_n dS.$$

Магнитный поток Φ_{mc} называют *потоксом самоиндукции контура*. Если контур находится в неферромагнитной среде, то его поток самоиндукции пропорционален току I в контуре:

$$\Phi_{mc} = LI,$$

где

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} (dl \times r)_n.$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная, μ — относительная магнитная проницаемость среды, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента $d\mathbf{l}$ контура в элемент dS поверхности S , ограниченной этим контуром, индекс n означает проекцию на нормаль к элементу dS .

Величину L называют *индуктивностью контура*. Она равна потоку самоиндукции контура при единичной силе тока и зависит от геометрической формы контура, его размеров и относительной магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

П р и м е р ы

1. Индуктивность соленоида длиной l и площадью поперечного сечения S с общим числом витков N равна

$$L = k \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = k \mu_0 \mu n^2 V,$$

где $n = N/l$ — число витков на единицу длины, $V = Sl$ — объем соленоида, k — коэффициент, зависящий от отношения длины l соленоида к диаметру d его витков.

В таблице приведены значения k в зависимости от отношения l/d :

l/d	0,1	0,5	1	5	10
k	0,2	0,5	0,6	0,9	$\approx 1,0$

Как видно, при $\frac{l}{d} \gg 1$ $k \approx 1$.

2. Индуктивность достаточно длинного коаксиального кабеля длиной l равна

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где R_1 и R_2 — радиусы центрального провода и внешнего цилиндрического проводника.

3. Индуктивность длинной двухпроводной линии длиной l равна

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} l \ln \frac{d}{R},$$

где d — расстояние между осями проводов, R — радиус сечения проводов $\left(\frac{d}{R} \gg 1\right)$.

2°. ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_c$ определяется по закону Фарадея:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi_{mc}}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$

Если среда не ферромагнитна и контур не деформируется, то $L = \text{const}$ и

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

3°. Индукционный ток, возникающий вследствие самоиндукции, по правилу Ленца противодействует изменению тока в цепи, замедляя его возрастание или убывание. Индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока.

4°. Закон изменения тока в цепи с постоянной электродвижущей силой $\mathcal{E}$, индуктивностью L и электрическим сопротивлением R при ее замыкании и размыкании:

$$I = I_0 e^{-(R/L)t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right),$$

где I_0 — сила тока в начальный момент времени $t = 0$.

Примеры.

1. При замыкании цепи (начальный ток отсутствует, $I_0 = 0$)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right).$$

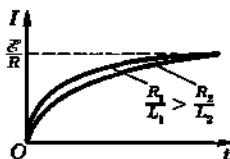


Рис. IV.8.1

Ток в цепи увеличивается, стремясь к асимптотическому значению $\frac{\mathcal{E}}{R}$ тем быстрее, чем больше отношение $\frac{R}{L}$ (рис. IV.8.1).

2. При выключении источника ЭДС ($\mathcal{E} = 0$)

$$I = I_0 e^{-(R/L)t}.$$

Ток в цепи уменьшается от начального значения I_0 до нуля тем быстрее, чем больше отношение R/L (рис. IV.8.2). Большая ЭДС самоиндукции при быстром размыкании является причиной пробоя воздушного зазора между контактами выключателей и появления дугового разряда, расплавляющего контакты. Для гашения дуги применяют специальные выключатели и параллельное включение в цепь конденсаторов.

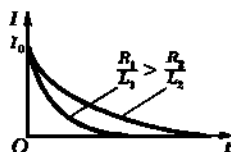


Рис. IV.8.2

5°. При внезапном увеличении сопротивления цепи постоянного тока от R_0 до R в ней возникает ЭДС $\mathcal{E}_c$, равная

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) e^{-(R/L)t},$$

где L — индуктивность цепи, $\mathcal{E}$ — ЭДС источников, включенных в цепь.

6°. Вихревое электрическое поле самоиндукции, возникающее в проводнике при прохождении в нем переменного тока, противодействует изменению тока внутри проводника и способствует его изменению вблизи поверхности. На рис. IV.8.3,а показано направление силовых линий вихревого поля при возрастании тока, а на рис. IV.8.3,б — при его убывании.

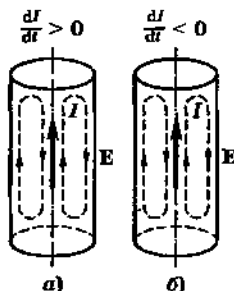


Рис. IV.8.3

Сопротивление внутренних частей проводника для переменного тока больше, чем внешних. Плотность переменного тока максимальна на поверхности проводника и минимальна на его оси. В случае высокочастотных токов плотность тока отлична от нуля только в тонком слое вблизи поверхности проводника. Это явление называют *скин-эффектом* (поверхностным эффектом). При-

ближенные формулы, описывающие скин-эффект в однородных цилиндрических проводниках:

$$\frac{R_{\omega}}{R_0} = \begin{cases} 1 + \frac{k^4}{3} & \text{при } k < 1, \\ 0,997k + 0,277 & \text{при } 1,5 < k < 10, \\ k + \frac{1}{4} + \frac{3}{64k} & \text{при } k > 10, \end{cases}$$

где R_{ω} — эффективное сопротивление проводника радиусом r переменному току с циклической частотой ω , R_0 — сопротивление проводника постоянному току, $k = \frac{r}{2\delta}$, $\delta = 2/\sqrt{2\mu\mu_0\gamma\omega}$, μ_0 — магнитная постоянная, γ —

удельная электропроводность проводника для постоянного тока, μ — его относительная магнитная проницаемость, δ — эффективная глубина проникновения переменного тока — расстояние от поверхности проводника, на котором плотность тока уменьшается в $e \approx 2,71...$ раз по сравнению с плотностью его на поверхности. Чем толще проводник, тем заметнее скин-эффект и тем при меньших значениях ω и γ его нужно учитывать.

4. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

1°. *Явление взаимной индукции* заключается в наведении ЭДС индукции во всех проводниках, находящихся вблизи других проводников, токи в которых изменяются с течением времени. Например, при изменении тока I_1 в первой цепи, изображенной на рис. IV.8.4, во второй цепи наводится ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{m21}}{dt},$$

где Φ_{m21} — магнитный поток поля тока I_1 сквозь поверхность, ограниченную вторым контуром, и возникает индукционный ток. (На рис. IV.8.4 K — ключ, B — батарея ЭДС, G — гальванометр)

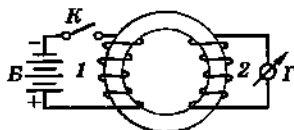


Рис. IV.8.4

2°. Магнитный поток Φ_{m21} равен

$$\Phi_{m21} = M_{21}I_1,$$

где M_{21} — коэффициент, называемый *взаимной индуктивностью* второго и первого контуров; M_{21} зависит от геометрической формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от относительной магнитной проницаемости среды, в которой находятся контуры.

Аналогично $\Phi_{m12} = M_{12}I_2$, где I_2 — ток во втором контуре, Φ_{m12} — магнитный поток поля тока I_2 сквозь поверхность, ограниченную первым контуром, M_{12} — взаимная индуктивность первого и второго контуров. Для неферромагнитной среды $M_{21} = M_{12}$. Если среда ферромагнитна, то M_{12} и M_{21} зависят, кроме перечисленных ранее величин, от сил токов в контурах и, вследствие явления гистерезиса, от характера изменения этих токов.

3°. Выражение для ЭДС взаимной индукции:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(M_{21}I_1).$$

Если $M_{21} = \text{const}$, то

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

5. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

1°. *Собственной энергией тока* I в контуре с индуктивностью L называют величину, равную работе, затрачиваемой на преодоление ЭДС самоиндукции при создании тока (предполагается, что среда неферромагнитна, так что L не зависит от I):

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Собственная энергия тока есть энергия его магнитного поля. Например, у длинного соленоида

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V,$$

где V — объем соленоида, n — число витков на единицу его длины, μ_0 — магнитная постоянная, μ — относительная магнитная проницаемость среды ($\mu = \text{const} \approx 1$).

2°. Объемная плотность энергии w_m магнитного поля есть энергия, заключенная в единице объема поля:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля в изотропной и неферромагнитной среде равна

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2,$$

где μ_0 — магнитная постоянная, μ — относительная магнитная проницаемость среды, B и H — магнитная индукция и напряженность в рассматриваемой точке магнитного поля.

В случае нелинейной связи между векторами B и H

$$w_m = \int H \cdot dB.$$

Согласно терминологии термодинамики, w_m имеет смысл объемной плотности части свободной энергии магнетика, связанной с существованием в среде магнитного поля.

3°. Энергия магнитного поля, создаваемого в неферромагнитной изотропной среде n контурами с токами $I_1, I_2, \dots, I_n$:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i,k=2}^n M_{ik} I_i I_k,$$

где M_{ik} — взаимная индуктивность i - и k -го контуров, а $M_{ii} = L_i$ — индуктивность i -го контура.

4°. Взаимной энергией токов I_i и I_k называют величину

$$W_{ik} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu H_i \cdot H_k dV = M_{ik} I_i I_k,$$

где $i \neq k$, H_i и H_k — напряженности магнитных полей, создаваемых токами I_i и I_k порознь, а интегрирование производится по всему объему V поля. Таким образом, энергия магнитного поля системы контуров с токами равна сумме собственных и взаимных энергий всех этих токов.

5°. *Объемная плотность энергии электромагнитного поля в изотропной среде, не обладающей ферромагнитными и сегнетоэлектрическими свойствами:*

$$w = w_m + w_e = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} + \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}.$$

Глава 9

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

1. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ ЭЛЕКТРОНОВ И АТОМОВ

1°. *Магнитный момент электрона P_m , связанный с движением электрона в атоме, называют орбитальным магнитным моментом электрона. Соответствующий механический момент импульса электрона L называют орбитальным моментом импульса электрона. Векторы P_m и L пропорциональны друг другу и направлены во взаимно противоположные стороны:*

$$P_m = \gamma L,$$

где γ — *орбитальное магнитомеханическое (гиромагнитное) отношение для электрона, равное*

$$\gamma = -\frac{e}{2m}. \quad (9.1)$$

Здесь $-e$ — заряд электрона, m — его масса.

2°. Вектор P_m *орбитального магнитного момента атома равен сумме векторов P_{mi} орбитальных магнитных моментов всех Z его электронов:*

$$P_m = \sum_{i=1}^Z P_{mi},$$

где Z — *порядковый номер атома в Периодической системе Менделеева.*

Вектор орбитального момента импульса атома определяется аналогично:

$$\mathbf{L}_a = \sum_{i=1}^Z \mathbf{L}_i,$$

где $\mathbf{L}_i$ — орбитальный момент импульса i -го электрона. Для атомных моментов $\mathbf{P}_m$ и $\mathbf{L}_a$ сохраняется соотношение

$$\mathbf{P}_m = \gamma \mathbf{L}_a,$$

где γ — гироманнитное отношение (9.1).

3°. Однородное магнитное поле, в которое внесен атом, изменяет угловую скорость вращения его электронов вокруг ядра. Это изменение происходит в процессе нарастания того магнитного поля, в которое вносится атом, и является результатом возникновения индукционного вихревого электрического поля, действующего на электроны.

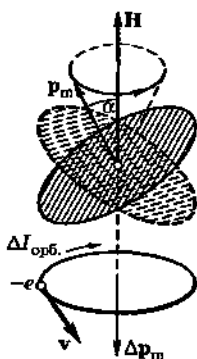


Рис. IV.9.1

4°. Если орбита электрона и вектор его орбитального момента $\mathbf{p}_m$ расположены относительно вектора напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля, как указано на рис. IV.9.1, то совершается прецессионное движение орбиты и вектора $\mathbf{p}_m$ вокруг направления $\mathbf{H}$ с угловой скоростью ω_L (ларморова прецессия):

$$\omega_L = \mu_0 \frac{e\mathbf{H}}{2m}.$$

Теорема Лармора: единственным результатом влияния магнитного поля на электронную орбиту является прецессия орбиты и вектора $\mathbf{p}_m$ с угловой скоростью Лармора ω_L вокруг оси, проходящей через центр орбиты и параллельной вектору $\mathbf{H}$.

5°. Прецессия приводит к появлению дополнительного орбитального тока $\Delta I_{\text{орб}}$ и индуцированного орбитального электронного магнитного момента $\Delta \mathbf{p}_m$, направленного в сторону, противоположную вектору $\mathbf{H}$:

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e^2 \mu_0 S}{4\pi m} \mathbf{H},$$

где $S_{\perp}$ — площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную к направлению напряженности магнитного поля.

Общий индуцированный орбитальный момент атома ΔP_m равен

$$\Delta P_m = \sum_{i=1}^Z \Delta p_{mi},$$

где Δp_{mi} — орбитальный наведенный магнитный момент электрона, Z — число электронов в атоме;

$$\Delta P_m = -\frac{e^2 \mu_0 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} H.$$

Здесь $\langle S_{\perp} \rangle$ — среднее значение площади $S_{\perp}$ для всех Z электронов атома. В случае сферически симметричной электронной оболочки атома $\langle S_{\perp} \rangle = \frac{2\pi}{3} \langle r^2 \rangle$, где $\langle r^2 \rangle$ —

среднее значение квадрата расстояния электрона до ядра атома. При этом условии, выполняющимся у атомов диамагнитных веществ, наведенный магнитный момент атома равен

$$\Delta P_m = -\frac{e^2 \mu_0 Z r^2}{6m} H.$$

В классической теории магнетизма считается, что на векторы орбитальных магнитных моментов электронов атома и их моментов импульса не наложено никаких ограничений, кроме условия связи, приведенного в п.1°.

6°. В квантовой теории магнетизма существенно квантование орбитальных моментов импульса электронов в атомах и наличие у электрона *собственного момента импульса*. В стационарных состояниях электрона в атоме его орбитальный момент импульса L и связанный с ним магнитный момент P_m принимают дискретные значения:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad \text{и} \quad P_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное квантовое число, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка, $\mu_B = |\gamma| \hbar$ — магнетон Бора, $|\gamma| = \frac{e}{2m}$ — гиромагнитное отношение.

Ориентация векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{p}_m$ во внешнем магнитном поле, вектор магнитной индукции которого направлен по оси Oz , должна удовлетворять условиям:

$$L_z = m\hbar \quad \text{и} \quad p_{ms} = \gamma m\hbar,$$

где m — магнитное квантовое число.

Спин электрона $\mathbf{L}_s$ и его *спиновый магнитный момент* $\mathbf{p}_{ms}$ пропорциональны друг другу и направлены во взаимно противоположные стороны:

$$\mathbf{p}_{ms} = \gamma_s \mathbf{L}_s,$$

где $\gamma_s = 2\gamma$ — *спиновое магнитомеханическое (гиромеханическое) отношение для электрона*:

$$\gamma_s = -\frac{e}{m}.$$

Во внешнем магнитном поле, направленном по оси Oz , возможны только две ориентации векторов $\mathbf{L}_s$ и $\mathbf{p}_{ms}$:

$$1) L_{sz} = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{и} \quad p_{msz} = -\mu_B;$$

$$2) L_{sz} = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{и} \quad p_{msz} = +\mu_B.$$

Принято говорить, что в первом случае «спин направлен по полю», а во втором — «спин направлен против поля». Модули спина и спинного магнитного момента электрона соответственно равны

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad \text{и} \quad p_{ms} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\gamma_s| \hbar,$$

где $s = \frac{1}{2}$ — *спиновое квантовое число электрона*.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ МАГНЕТИКОВ

1°. *Магнетиками* называют все среды, способные намагничиваться в магнитном поле, т. е. создавать собственное магнитное поле. По магнитным свойствам магнетики подразделяют на три основные группы: диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

2°. Для характеристики намагниченного состояния магнетика вводится вектор *намагниченности* I , равный магнитному моменту единицы объема магнетика:

$$I = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{\Delta n} P_{mi},$$

где P_{mi} — магнитный момент i -го атома (молекулы), находящегося в физически малом объеме ΔV среды, а $\Delta n = n_0 \Delta V$ — общее их число в объеме ΔV , n_0 — концентрация частиц.

В не слишком сильных магнитных полях намагниченность диа- и парамагнетиков пропорциональна напряженности H магнитного поля:

$$I = \kappa_0 H,$$

где κ — *магнитная восприимчивость среды* (магнетика).

3°. *Диамагнетиками* называют вещества, которые намагничиваются во внешнем магнитном поле в направлении, противоположном направлению вектора H напряженности магнитного поля. Магнитная восприимчивость диамагнетика $\kappa < 0$, причем $|\kappa| \ll 1$.

Диамагнетики подразделяют на «классические», «аномальные» и сверхпроводники. К первой подгруппе относятся инертные газы, некоторые металлы (цинк, золото, ртуть и др.), элементы типа кремния и фосфора, многие органические соединения. Для этих веществ $\kappa < 0$ и имеет малое значение, порядка $(0,1-10) \cdot 10^{-6}$, и не зависит от температуры. Ко второй подгруппе относятся висмут, галлий, сурьма, графит, и др. Для этих веществ $\kappa < 0$, зависит от температуры и имеет значения порядка $(1-100) \cdot 10^{-6}$.

4°. *Парамагнетиками* называют вещества, которые намагничиваются во внешнем магнитном поле в направлении вектора H напряженности поля. Магнитная восприимчивость парамагнетика положительна, но очень мала: $0 < \kappa \ll 1$.

Парамагнетики подразделяют на нормальные парамагнетики, парамагнитные металлы с магнитной восприимчивостью, не зависящей от температуры, и антиферромагнетики.

Нормальными парамагнетиками являются газы O_2 , NO и др., платина, палладий, соли железа, кобальта и

никеля и сами эти металлы при $T > \Theta_k$, где Θ_k — точка Кюри и др. Магнитная восприимчивость $\kappa > 0$ и зависит от температуры по закону Кюри:

$$\kappa = \frac{C}{T}$$

или по закону Кюри—Вейсса:

$$\kappa = \frac{C'}{T + \Delta},$$

где C и C' — постоянные Кюри. Константа Δ может быть положительна, отрицательна или равна нулю.

Типичные парамагнитные металлы, у которых κ не зависит от температуры, — щелочные металлы: литий, натрий, калий, рубидий и цезий. Они весьма слабо магнитны: $\kappa \approx 10^{-7} - 10^{-6}$.

Антиферромагнетики (кристаллы элементов переходных групп Периодической системы Менделеева, их сплавы и химические соединения) при температурах выше антиферромагнитной точки Кюри Θ_{ak} являются нормальными парамагнетиками с $\Delta < 0$.

5°. Ферромагнетики — группа некоторых переходных металлов (железо, никель, кобальт) и ряд сплавов, обладающих особыми магнитными свойствами.

3. ДИАМАГНЕТИЗМ

1°. Явлением диамагнетизма называют индуцирование дополнительного магнитного момента в атомных электронных оболочках, а также свободными носителями заряда в металлах и полупроводниках под действием внешнего магнитного поля. Диамагнетизм присущ всем веществам, но наблюдается в тех случаях, когда атомы, ионы или молекулы не имеют результирующего магнитного момента P_m (S - или Σ -состояния).

2°. Магнитная восприимчивость диамагнетика равна

$$\kappa = -\frac{n_0 e^2 \mu_0}{6m} Z r^2,$$

где n_0 — концентрация частиц вещества.

При учете квантовых свойств электронной оболочки атомов формула справедлива для невырожденных S - и Σ -состояний и сферически симметричного электрического поля ядра атома или иона.

3°. *Диамагнетизмом Ландау* называют диамагнетизм вырожденного газа электронов проводимости в металлах и полупроводниках. Во внешнем магнитном поле траектории электронов искривляются, так что в проекции на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{H}$ напряженности магнитного поля, электроны движутся по замкнутым орбитам. Соответствующие орбитальные магнитные моменты электронов направлены в сторону, противоположную вектору $\mathbf{H}$. Диамагнитная восприимчивость Ландау для электронного газа в металлах равна

$$\kappa_L = -\frac{n_0 \mu_B^2 \mu_0}{2W_F} = -\frac{4m \mu_B^2 \mu_0}{\hbar^2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} n_0^{1/3},$$

где W_F — энергия Ферми, n_0 — концентрация электронов проводимости, m — масса электрона, μ_B — магнетон Бора, $\hbar$ — постоянная Планка.

4. ПАРАМАГНЕТИЗМ

1°. *Парамагнетизмом* называют совокупность магнитных свойств некоторых веществ, атомы (молекулы, ионы) которых обладают постоянным магнитным моментом $\mathbf{P}_m$, не зависящим от внешнего магнитного поля; $\mathbf{P}_m$ имеет значение порядка 10^{-23} Дж/Тл. В отсутствие внешнего поля дезориентирующее действие теплового движения не допускает упорядоченной ориентации векторов $\mathbf{P}_m$ и появления намагниченности у вещества.

2°. При внесении парамагнетика во внешнее однородное магнитное поле возникает явление прецессии электронных орбит и векторов магнитных моментов атомов вокруг направления внешнего поля. Совместное действие поля и теплового движения атомов приводит к преимущественной ориентации магнитных моментов атомов по направлению внешнего магнитного поля.

3°. Классическое выражение намагниченности I (без учета пространственного квантования) в предположении, что между атомами (молекулами) отсутствует взаимодействие:

$$I = n_0 P_m L(a),$$

где n_0 — концентрация частиц, P_m — постоянный магнитный момент атома (молекулы), $L(a) = \text{cth } a - \frac{1}{a}$ —

классическая функция Ланжевена $\left(a = \frac{\mu_0 P_m H}{kT}\right)$, H — напряженность магнитного поля, k — постоянная Больцмана, T — температура. При комнатных температурах и в не очень сильных полях выполняется условие $\mu_0 P_m H \ll kT$, при котором $L(a) \approx \frac{a}{3}$ и

$$I = \frac{\mu_0 n_0 P_m^2}{3kT} H.$$

Парамагнитная восприимчивость

$$\kappa = \frac{\mu_0 n_0 P_m^2}{3kT}.$$

Закон Кюри: парамагнитная восприимчивость вещества обратно пропорциональна его термодинамической температуре.

При низких температурах или в сильных полях величина $\mu_0 P_m H \gg kT$, $L(a) \rightarrow 1$ и $I = n_0 P_m$ (насыщение намагниченности).

4°. Классическое выражение для намагниченности парамагнитного вещества, допускающее возможность любых ориентаций магнитных моментов атомов, заменяется в квантовой теории парамагнетизма формулой

$$I = n_0 g J \mu_B B_J(x),$$

где J — внутреннее квантовое число, μ_B — магнетон Бора, g — множитель Ланде, $x = g J \mu_0 \mu_B \frac{H}{kT}$, $B_J(x)$ — функция Бриллюэна:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \text{cth} \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \text{cth} \frac{x}{2J}.$$

При $x \ll 1$ $B_J(x) = \frac{J+1}{3J} x$ и намагниченность

$$I = n_0 g \mu_B \frac{J+1}{3} x.$$

Парамагнитная восприимчивость:

$$\kappa = \frac{\mu_0 n_0 (p \mu_B)^2}{3 k T},$$

где $p = g \sqrt{J(J+1)}$ — эффективное число магнетонов Бора, приходящееся на атом.

В сильных полях и при весьма низких температурах $x \rightarrow \infty$, $B J(x) \rightarrow 1$ и намагничивание достигает насыщения:

$$I = n_0 g J \mu_B.$$

5°. Парамагнитные свойства металлов (*парамагнетизм Паули*) обусловлены спиновыми магнитными моментами электронов. Включение магнитного поля нарушает равноправность двух возможных ориентаций спина. Устойчивому термодинамическому равновесию электронного газа в металлах соответствует преимущественная ориентация спиновых магнитных моментов электронов вдоль поля, т. е. парамагнитная намагниченность. Парамагнитная восприимчивость Паули электронного газа в металле практически не зависит от температуры и втрое превышает его диамагнитную восприимчивость:

$$\kappa_{\Pi} = \frac{3 n_0 \mu_B^2 \mu_0}{2 W_F} = \frac{12 m \mu_B^2 \mu_0}{h^2} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} n_0^{1/3},$$

где W_F — энергия Ферми, n_0 — концентрация электронов проводимости, m — масса электрона, μ_B — магнетон Бора, h — постоянная Планка.

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В МАГНЕТИКАХ

1°. Магнитное поле, которое создается молекулами (атомами, ионами) вещества, называют *собственным* или *внутренним магнитным полем*. Это поле обусловлено существованием у атомов (молекул, ионов) магнитных моментов и характеризуется вектором магнитной индукции $B_{\text{внутр}}$.

2°. Вектор B индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен векторной сумме маг-

нитных индукций внешнего (намагничивающего) и внутреннего полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{внутр}}$$

где B_0 — магнитная индукция поля в вакууме; $B_0 = \mu_0 H$.

Магнитная индукция $B_{\text{внутр}}$ внутреннего поля для неферромагнитных веществ пропорциональна вектору намагниченности $\mathbf{I}$:

$$B_{\text{внутр}} = \mu_0 I.$$

3°. Связь между магнитной индукцией $\mathbf{B}$, напряженностью $\mathbf{H}$ и интенсивностью намагничения $\mathbf{I}$:

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{I}.$$

4°. Связь между *относительной магнитной проницаемостью* μ и магнитной восприимчивостью κ :

$$\mu = 1 + \kappa.$$

Для диамагнитных веществ $\kappa < 0$ и $\mu < 1$. Для парамагнитных веществ $\kappa > 0$ и $\mu > 1$. В обоих случаях μ не зависит от напряженности магнитного поля, в котором находятся вещества, и мало отличается от единицы ($B_{\text{внутр}} \ll B_0$).

5°. Объемная плотность энергии изотропной неферромагнитной намагниченной среды:

$$w_{\text{т магн}} = \mu_0 \frac{(\mu - 1)H^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля в магнетике $w_{\text{т}}$ складывается из объемной энергии магнитного поля в вакууме ($\mu = 1$) $w_{\text{т вак}}$ и объемной плотности энергии намагниченного магнетика:

$$w_{\text{т}} = w_{\text{т вак}} + w_{\text{т магн}}.$$

6°. Закон полного тока для циркуляции вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ в магнетиках:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_{\text{мол}} \right),$$

где $\sum I$ — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых замкнутым контуром L , а $\sum I_{\text{мол}}$ — алгеб-

раическая сумма молекулярных токов, охватываемых этим же контуром, равная циркуляции вектора намагниченности по контуру L :

$$\sum_{\text{мол}} = \oint_L \text{Idl}.$$

7°. В случае отсутствия поверхностных макротоків граничные условия для магнитного поля на поверхности раздела двух изотропных сред имеют вид:

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n} \quad \text{и} \quad B_{2n} = B_{1n};$$

$$H_{2\tau} = H_{1\tau} \quad \text{и} \quad B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1\tau}.$$

Здесь H_τ и B_τ — проекции векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ на направление единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ касательной к поверхности раздела сред, а H_n и B_n — проекции $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ на направление единичного вектора $\mathbf{n}$ нормали к той же поверхности.

8°. Намагниченность тела из однородного магнетика, возникающая при внесении тела в однородное внешнее магнитное поле, зависит от формы тела. В общем случае результирующее поле в теле и намагниченность неоднородны. Намагниченность однородна только у однородных тел, имеющих форму эллипсоида, предельными случаями которого можно считать очень длинный или очень короткий цилиндр. В этом случае напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля внутри тела равна: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - N\mathbf{I}$, где $\mathbf{H}_0$ — напряженность однородного внешнего поля, $-N\mathbf{I}$ — напряженность так называемого размагничивающего поля, N — размагничивающий фактор, или коэффициент размагничивания.

9°. Намагниченность однородных тел простейшей формы в однородном внешнем магнитном поле напряженностью $\mathbf{H}_0$:

1) очень короткий цилиндр ($\sqrt{S} \gg l$, l — длина цилиндра, S — площадь его поперечного сечения), ось которого параллельна $\mathbf{H}_0$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_0}{\mu} \quad \{\text{см. п. 7}^\circ\};$$

$$\mathbf{I} = \{\mu - 1\} \frac{\mathbf{H}_0}{\mu} \quad \text{и} \quad N = 1;$$

2) очень длинный цилиндр ($\sqrt{S} \ll l$), ось которого параллельна H_0 :

$$H = H_0 \text{ (см. п. 7°); } N = 0; \quad I = (\mu - 1)H_0;$$

3) шар

$$H = \frac{3H_0}{\mu + 2}; \quad N = \frac{1}{3}; \quad I = \frac{3(\mu - 1)}{\mu + 2} H_0.$$

6. ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

1°. Ферромагнетиками называют твердые (как правило, кристаллические) вещества, которые при не слишком высокой температуре обладают *самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью*, сильно изменяющейся под влиянием внешних воздействий — магнитного поля, деформации, изменения температуры. Ферромагнетики, в отличие от слабо магнитных диа- и парамагнетиков, являются сильно магнитными средами, в которых собственное (внутреннее) магнитное поле может в сотни и тысячи раз превосходить вызвавшее его внешнее магнитное поле.

2°. Большое значение намагниченности ферромагнетиков объясняется существованием в них «молекулярного» магнитного поля, обусловленного особым квантовомеханическим (*обменным*) *взаимодействием* нескомпенсированных *спиновых магнитных моментов электронов* атомов в кристаллических решетках ферромагнетиков. В результате этого взаимодействия устойчивым и энергетически выгодным состоянием системы электронов в кристалле является упорядоченное состояние с параллельной (*ферромагнетизм*) или антипараллельной (*антиферромагнетизм*) ориентацией спиновых магнитных моментов соседних атомов в решетке.

3°. Ферромагнетизм и антиферромагнетизм наблюдаются только у кристаллов переходных металлов — Fe, Co, Ni (ферромагнетизм), галоидных солей элементов группы железа, хрома, марганца и др. (антиферромагнетизм), в решетке которых имеются атомы с недостроенными электронными оболочками $3d$ или $4f$,

обладающими не равным нулю значением результирующего спинового магнитного момента.

4°. Ферромагнетизм (антиферромагнетизм) имеет место при условии положительного (отрицательного) значения *обменного интеграла*, характеризующего особое квантовое (обменное) взаимодействие между магнитными спиновыми моментами.

5°. Ферромагнетизм существует лишь при определенных параметрах кристаллической решетки. Расстояния между соседними атомами должны обеспечить необходимую величину перекрытия волновых функций электронных оболочек, такую, чтобы взаимодействие между соседними атомами привело к полной энергии системы электронов, обеспечивающей устойчивость ферромагнитного (или антиферромагнитного) состояния.

Условие ферромагнетизма выполняется лишь для тех кристаллов переходных металлов, для которых $\frac{d}{a} \geq 1,5$, где d — диаметр атома, a — диаметр незаполненной оболочки $3d$ (или $4f$). Поэтому у элементов группы железа ферромагнетизм наблюдается лишь у α -железа, кобальта и никеля. При $\frac{d}{a} < 1,5$ обменный

интеграл отрицателен и упорядоченному расположению спинов соответствует их антипараллельная ориентация (п. 2°). В этом случае антиферромагнетизма магнитную структуру кристалла можно рассматривать как сложную, состоящую из двух подрешеток, намагниченных противоположно друг другу. Если магнитные моменты подрешеток численно равны, то спонтанная намагниченность кристалла не возникает. Если же они неодинаковы (различно число атомов или их природа), то появляется разность магнитных моментов подрешеток, приводящая к спонтанному намагничению кристалла — *нескомпенсированный антиферромагнетизм* или *ферримагнетизм*. Такими свойствами обладают, например, ферриты.

6°. Особые свойства ферро- и антиферромагнетиков обнаруживаются только при температурах, меньших соответственно Θ_k и Θ_{ak} , называемых *точками Кюри* (температуру Θ_{ak} часто называют *точкой Нееля*). При

$T < \Theta_k$ ферромагнитное тело разбито на *домены* — малые области *самопроизвольной (спонтанной) намагниченности* до полного насыщения. В отсутствие внешнего магнитного поля направления векторов намагниченности различных доменов не совпадают и результирующая намагниченность всего тела может быть равна нулю.

7°. Монокристаллы ферромагнетиков обладают резко выраженной анизотропией магнитных свойств, которая проявляется в существовании *направлений легчайшего и трудного намагничения*. Число легчайших направлений зависит от кристаллографической структуры данного вещества. В отсутствие внешнего магнитного поля направление спонтанной намагниченности в каждом домене совпадает с одним из направлений легчайшего намагничения монокристалла или отдельного зерна поликристалла. Число доменов с различной ориентацией спонтанной намагниченности (число *магнитных фаз*) равно удвоенному числу осей легчайшего намагничения. Размеры доменов, их форма и местоположение границ между ними в отсутствие внешнего магнитного поля определяются из условий минимума свободной энергии кристалла. Линейные размеры доменов составляют 10^{-5} — 10^{-4} м.

8°. В переходном слое между двумя доменами, намагниченными в различных направлениях, который имеет конечную толщину (для Fe этот слой приближенно равен 300 периодам решетки), имеется неоднородность намагниченности. Этому слою соответствует свободная поверхностная энергия, равная внешней работе, затраченной на его образование. В равновесном размагниченном состоянии кристалла границы между доменами проходят по тем местам в кристалле, которые соответствуют условиям минимума свободной энергии кристалла и обеспечивают отсутствие в нем результирующей макроскопической намагниченности.

Экспериментальным доказательством существования областей спонтанной намагниченности являются: а) скачкообразный характер технической кривой намагничения (п. 9°) в области слабых внешних полей (вблизи крутого подъема кривой) — *эффект Баркгаузена*, б) неоднородности в распределении магнитных порошков на поверхности ферромагнитного кристалла (полосы или порошковые фигуры Биттера—Акулова).

9°. Процессом технического намагничивания ферромагнетиков называют возникновение в них результирующей намагниченности под действием внешнего намагничивающего поля. Зависимость намагниченности I от напряженности H внешнего поля $I = f(H)$ называют *технической кривой намагничения* (рис. IV.9.2).

Существуют два типа процессов технического намагничивания:

а) *процесс смещения границ* — он состоит в росте объемов доменов, у которых намагниченность ориентирована наиболее близко к направлению внешнего поля, за счет объемов соседних доменов;

б) *процесс вращения* — изменение направления спонтанной намагниченности отдельных доменов или всего кристалла в целом путем поворота вектора намагниченности насыщения.

10°. Смещение границ происходит при возрастании внешнего магнитного поля с конечной скоростью и может быть *обратимым* или *необратимым*. Если смещение границ между магнитными фазами происходит при намагничивании обратимо, то при квазистатическом уменьшении внешнего поля границы доменов смещаются в обратном направлении через те же места в кристалле и при $H = 0$ домены занимают исходные положения. Обратимое смещение границ наблюдается в начале технической кривой намагничения. Необратимое смещение границ между доменами не снимается при уменьшении магнитного поля. Исходные положения доменов могут быть достигнуты в процессе *перемагничивания*. Завершение процессов смещения границ в ферромагнитных кристаллах приводит к *техническому насыщению* последних вдоль одной из осей легчайшего намагничения, ближайшей к направлению намагничивающего поля.

11°. Увеличение напряженности внешнего магнитного поля после завершения процессов смещения вызывает процессы вращения вектора I намагничен-



Рис. IV.9.2

ности, которые заканчиваются, когда векторы I и H становятся параллельными друг другу. Разбиение технической кривой намагничивания на участки, отличающиеся своей природой, носит относительный характер. В области слабых полей ниже максимума на кривой Столетова $\kappa(H)$ (см. рис. IV.9.4) $\kappa_{см} \gg \kappa_{вр}$; в средних полях (после максимума кривой $\kappa(H)$) на пологом участке кривой $I(H)$ (рис. IV.9.2) $\kappa_{вр} \gg \kappa_{см}$, где $\kappa_{см}$ и $\kappa_{вр}$ — магнитные восприимчивости ферромагнетика, связанные с процессами смещения границ и вращения (п. 9°).

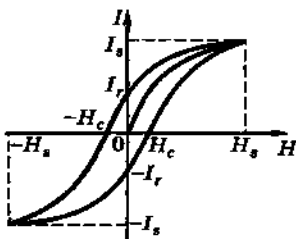


Рис. IV.9.3

12°. *Магнитным гистерезисом ферромагнетиков* называется отставание изменения намагниченности I и магнитной индукции B от изменения напряженности внешнего намагничивающего поля, обусловленное зависимостью I и B от их предыдущих значений. Магнитный гистерезис есть следствие необратимых изменений при

намагничивании и перемагничивании. Причинами магнитного гистерезиса являются необратимые процессы смещения границ между областями самопроизвольной намагниченности и процессы вращения (п. 9°). *Петлей гистерезиса* (рис. IV.9.3) называют кривую изменения намагниченности (и магнитной индукции) ферромагнитного тела, помещенного во внешнее магнитное поле, при изменении напряженности H последнего от $+H_s$ до $-H_s$ и обратно, где H_s — напряженность магнитного поля, соответствующая насыщению. Значение $\pm I_s$ намагниченности, достигаемое при напряженности внешнего поля, равной $\pm H_s$, называют *намагниченностью насыщения*. Намагниченность $\pm I_r$, сохраняющаяся в образце после уменьшения напряженности поля от $\pm H_s$ до 0, называют *остаточной намагниченностью*. Ее существование является основой создания постоянных магнитов. Напряженность H_c обратного поля, доводящего намагниченность до нуля, называют *коэрцитивной силой* (задерживающей на-

пряженностью). Площадь петли гистерезиса P_h (потери на гистерезис) прямо пропорциональна работе, совершенной при перемагничивании за один цикл в единице объема ферромагнитного образца:

$$P_h = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}.$$

Эта работа идет на нагревание образца. В зависимости от значения коэрцитивной силы различают *магнитно-мягкие ферромагнетики* ($H_c < 8 \text{ А/м}$) и *магнитно-твердые ферромагнетики* ($H_c \approx 10^4 - 10^5 \text{ А/м}$).

13°. Зависимость *магнитной восприимчивости* κ ферромагнетика от напряженности H внешнего намагничивающего поля называют *кривой Столетова* (рис. IV.9.4).



Рис. IV.9.4

14°. Температура Кюри Θ_k для ферромагнетиков и Θ_{ak} для антиферромагнетиков является точкой фазового перехода второго рода. При этой температуре теряются ферромагнитные (антиферромагнитные) свойства кристаллов и изменяются структура кристаллической решетки, теплоемкость, электропроводность и другие физические характеристики.

15°. Явлением *магнитострикции* называют изменение формы и объема ферромагнетика при его намагничивании. Простейшей мерой магнитострикционного эффекта является *линейная магнитострикция* $\Delta l/l$, где Δl — удлинение образца, l — его первоначальная длина. Различают самопроизвольную и истинную магнитострикцию. *Самопроизвольная магнитострикция* в каждом домене связана с тем, что при появлении самопроизвольной намагниченности изменяются условия равновесия между узлами кристаллической решетки и происходит ее анизотропная деформация. Если ферромагнитный кристалл в целом не намагничен, то самопроизвольная магнитострикция не проявляется. Она обнаруживается при процессах технического намагничивания. *Истинной магнитострикцией* называют изменение длин ферромагнитных образцов в результате действия на них достаточно больших внешних магнитных полей. Она возникает в процессах техниче-

ского намагничивания и связана с параллельной ориентацией векторов намагниченности доменов в результате изменения условий равновесия между узлами кристаллической решетки. *Магнитострикционными колебаниями* называют механические колебания, возникающие в ферромагнетиках при их намагничивании в периодически изменяющемся магнитном поле. Они используются в *ультразвуковых магнитострикционных вибраторах*. У ферромагнетиков наблюдается явление, обратное магнитострикции, — изменение намагниченности при деформациях.

16°. Ферритами называют химические соединения окиси железа с окислами других металлов. Они отличаются заметными ферромагнитными свойствами и являются плохими проводниками электричества. Употребляются для магнитных цепей в устройствах, работающих при высоких частотах (малые потери на вихревые токи).

7. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

1°. Сверхпроводимостью называют явление исчезновения (т. е. обращения в ноль) удельного электрического сопротивления некоторых веществ при их охлаждении ниже некоторой температуры T_c , характерной для каждого вещества. Вещества, обладающие таким свойством, называют сверхпроводниками, а температуру T_c — *критической температурой перехода в сверхпроводящее состояние*.

К сверхпроводникам принадлежат некоторые металлы (ртуть, ниобий, свинец, таллий, алюминий и др.), многие металлические сплавы и соединения.

Наибольшие значения критической температуры T_c у чистых металлов (ниобий) не превосходят 9,2 К, а у сплавов 23,2 К. В последние годы интенсивно исследуют оксидные соединения с высокой температурой T_c , близкой к 100 К.

2°. Для разных изотопов одного и того же сверхпроводящего металла значения температуры T_c различны: T_c уменьшается при увеличении атомной массы изотопа. Эту зависимость T_c от изотопного состава металла называют *изотопическим эффектом*.

3°. Особые магнитные свойства сверхпроводников проявляются в *эффекте Мейснера*: при переходе массивного проводника, находящегося в постоянном внешнем магнитном поле, это поле вытесняется из объема проводника (рис. IV.9.5). Эффект Мейснера объясняется экранирующим действием неза-
 тухающих токов, идущих в очень тонком поверхностном слое сверхпроводящего образца. Толщина этого слоя $\Delta \approx 10^{-8} - 10^{-7}$ м характеризует также глубину проникновения в сверхпроводник внешнего магнитного поля. Сверхпроводящий цилиндрический образец, показанный на рис. IV.9.5, подобен идеальному диамагнетку с $\mu = 0$ и магнитной восприимчивостью $\kappa = -1$.

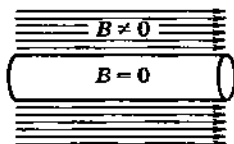


Рис. IV.9.5

4°. При значениях температуры $T < T_c$, увеличивая напряженность H внешнего магнитного поля, можно вызвать переход цилиндрического образца (см. рис. IV.9.5) из сверхпроводящего состояния в нормальное. Соответствующее этому переходу магнитное поле напряженностью H_c называют *критическим полем*. $H_c = 0$ при $T = T_c$ и увеличивается с понижением температуры образца. При $T = 0$ H_c достигает максимального значения, равного H_0 . Если $H > H_c$, то образец находится в нормальном состоянии, а при $H < H_c$ — в сверхпроводящем. Соответствующая фазовая диаграмма, характерная для *сверхпроводников 1-го рода* (например, для свинца, тантала, олова и др.), изображена на рис. IV.9.6.



Рис. IV.9.6

Критическое магнитное поле может быть создано за счет пропускания через сверхпроводник достаточно сильного электрического тока, вызывающего таким образом переход проводника из сверхпроводящего состояния в нормальное. Изотермический переход вещества из сверхпроводящего состояния при $T = \text{const} < T_c$ в нормальное под действием магнитного поля представляет собой фазовый переход 1-го рода. Он связан с по-



Рис. IV.9.7

глощением теплоты и скачкообразным изменением свободной энергии и теплоемкости вещества.

5°. В случае *сверхпроводников 2-го рода* (например, ниобия, сплава Nb_3Sn и др.) зависимость фазового состояния вещества от параметров состояния — температуры T и напряженности H внешнего магнитного поля — более сложная. На рис. IV.9.7 изображена фазовая диаграмма для цилиндрического образца

(рис. IV.9.5), изготовленного из сверхпроводника 2-го рода. При $T < T_c$ и $H > H_{c2}$ вещество находится в нормальном состоянии. При напряженности внешнего поля $H = H_{c2}$ происходит фазовый переход вещества цилиндрического образца из нормального состояния в *смешанное*. Это состояние характеризуется тем, что образец дробится на одновременно существующие небольшие области двух типов. В областях первого типа, обладающих обычной проводимостью, магнитное поле остается, а в областях второго типа магнитное поле исчезает, так как в них вещество переходит в сверхпроводящее состояние. За счет вторых областей образец становится сверхпроводящим. Магнитное поле вытесняется из всего объема образца только при уменьшении значения напряженности магнитного поля до $H = H_{c1}$, когда полностью реализуется эффект Мейснера. У сверхпроводников 2-го рода значения H_{c2} во много раз превосходят значения H_c у сверхпроводников 1-го рода. Поэтому сверхпроводники 2-го рода используют для изготовления сверхпроводящих соленоидов, позволяющих получать сильные магнитные поля.

6°. Согласно современной квантово-механической теории сверхпроводимость рассматривается как сверхтекучесть электронов, образующих в сверхпроводнике связанные пары, называемые *куперовскими парами*. Возникновение этой связи вопреки кулоновскому отталкиванию, действующему между электронами, обусловлено влиянием положительно заряженных ионов, образующих кристаллическую решетку сверхпровод-

ника. Об этом свидетельствует изотопический эффект (п. 2°). Указанное взаимное притяжение электронов пары трактуется как обмен *фононами*. Электроны куперовской пары имеют антипараллельные спины, так что результирующий спин пары равен нулю. Соответственно, куперовские пары электронов являются *бозонами* и, подобно атомам гелия II, при определенных условиях могут образовывать связанный коллектив (*бозе-конденсат*). Такой коллектив куперовских пар не может принимать энергию от кристаллической решетки сверхпроводника малыми порциями, меньшими энергии связи электронов пары. Это означает, что при соударениях электронов пары с узлами кристаллической решетки не происходит изменение энергии электронов, т. е. вещество ведет себя как сверхпроводник с нулевым удельным электрическим сопротивлением.

Глава 10

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

1°. *Колебательным контуром* в общем случае называют электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R (рис. IV.10.1). Изменение электрического заряда q на обкладках конденсатора со временем описывается дифференциальным уравнением



Рис. IV.10.1

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (10.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид (при $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

$$q = A_0 \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \alpha_0),$$

где $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ — циклическая частота колебаний,

$\beta = \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания. Это выражение

показывает, что заряд конденсатора совершает затухающие колебания. Амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

где A_0 — начальная амплитуда.

Если в начальный момент времени ($t = 0$) заряд на обкладках конденсатора $q = q_0$ и ток в цепи отсутствует, то

$$A_0 = \frac{q_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}.$$

Начальная фаза колебаний

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\omega}{\beta} = \arctg \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}.$$

2°. Разность потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками конденсатора:

$$\Delta\phi = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C} \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Сила тока I в колебательном контуре:

$$I = -\frac{dq}{dt} = A_0 \exp(-\beta t) \times \\ \times [\beta \sin(\omega t + \alpha_0) - \omega \cos(\omega t + \alpha_0)].$$

3°. Период T затухающих колебаний в контуре:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

С увеличением сопротивления R контура период T возрастает и при $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ обращается в бесконечность.

4°. При $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ изменение заряда на обкладках не носит колебательного характера и разряд конденсатора называется *апериодическим*. Решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид

$$q = C_1 \exp \left[-\frac{R}{2L} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) t \right] + \\ + C_2 \exp \left[-\frac{R}{2L} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) t \right],$$

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий, т. е. от значений q и $\frac{dq}{dt}$ при $t = 0$.

5°. Периодическое изменение заряда на обкладках конденсатора вызывает переменный электрический ток I , переменную разность потенциалов на обкладках $\Delta\varphi$, переменные электрическое и магнитное поля. Свободные колебания q , I и $\Delta\varphi$ называют *свободными электромагнитными колебаниями*. При $q = q_0$ в момент $t = 0$ энергия колебаний равна электрической энергии поля конденсатора. За счет выделения джоулева тепла в контуре энергия электромагнитных колебаний уменьшается (рассеивается), и они затухают.

6°. При $R \rightarrow 0$ электромагнитные колебания в контуре становятся *незатухающими* ($\beta = 0$). Для таких колебаний

$$q = A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ \Delta\varphi = \frac{A_0}{C} \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ I = -A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ — циклическая частота свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре. Сила тока отстает по фазе от разности потенциалов между обкладками на $\pi/2$.

7°. Период T свободных незатухающих колебаний выражается формулой Томсона:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

8°. Амплитуда I_0 силы тока и амплитуда $\Delta\phi_0$ разности потенциалов:

$$I_0 = A_0\omega_0 = \frac{A_0}{\sqrt{LC}}, \quad \Delta\phi_0 = \frac{A_0}{C}.$$

9°. При свободных незатухающих электромагнитных колебаниях в контуре происходит периодический переход энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля электрического тока. В моменты времени $t = 0, T/2, T$ и т. д. энергия электрического поля максимальна и равна $C(\Delta\phi_0)^2/2$, а энергия магнитного поля равна нулю. В моменты времени $t = T/4, 3T/4$ и т. д. энергия магнитного поля максимальна и равна $LI_0^2/2$, а энергия электрического поля равна нулю. Из условия

$$\frac{C(\Delta\phi_0)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

следует

$$I_0 = \frac{\Delta\phi_0}{\sqrt{L/C}}.$$

Величину $\sqrt{L/C}$ называют волновым сопротивлением контура.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

1°. В реальном колебательном контуре электрическое сопротивление R отлично от нуля и свободные электромагнитные колебания затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний к контуру необходимо подводить энергию, которая восстанавли-вала бы потери на джоулево тепло. Для поддержания в контуре таких вынужденных электромагнитных колеба-

ний необходимо включить в него источник тока с периодически изменяющейся, например, синусоидальной, ЭДС (рис. IV.10.2)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t,$$

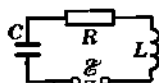


Рис. IV.10.2

где $\mathcal{E}_0$ — амплитуда ЭДС, Ω — ее циклическая частота. Прозвольная непрерывная ЭДС в форме функции $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ может быть по теореме Фурье представлена в виде суммы (конечной или бесконечной) простых синусоидальных ЭДС с различными амплитудами, начальными фазами и циклическими частотами.

2°. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_0 \sin \Omega t$$

(обозначения указаны в п. 10.1.1° и 10.2.1). Решение этого уравнения представляется в виде суммы двух слагаемых: полного решения уравнения (10.1) и частного решения уравнения. Первым слагаемым, характеризующим свободные затухающие колебания в контуре, можно пренебречь по истечении некоторого времени после начала колебаний. Сила тока в цепи при установившихся вынужденных колебаниях:

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

где I_0 — амплитуда силы тока в контуре:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z},$$

α — сдвиг фаз между силой тока и приложенной ЭДС:

$$\alpha = \arctg \frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{R}.$$

3°. Величину

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}$$

называют *полным (эффективным) сопротивлением* электрической цепи переменного тока (колебательного

контура). Оно состоит из активного (омического) сопротивления R , индуктивного сопротивления $R_L = \Omega L$ и емкостного сопротивления $R_C = \frac{1}{\Omega C}$. Чисто индуктив-

ное сопротивление сдвигает фазу силы переменного тока в контуре на $\alpha = -\pi/2$ сравнительно с фазой приложенной ЭДС. Чисто емкостное сопротивление приводит к опережению по фазе на $\alpha = \pi/2$ силы тока сравнительно с ЭДС.

4°. Для переменного синусоидального тока в контуре (и в любой электрической цепи) среднее за период значение мощности

$$\langle N \rangle = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos \alpha,$$

где I_0 и $\mathcal{E}_0$ — амплитуды силы тока и ЭДС в цепи, α — сдвиг по фазе между током и ЭДС.

Эффективными (действующими) значениями силы тока $I_{\text{эфф}}$ и электродвижущей силы $\mathcal{E}_{\text{эфф}}$ называют значения этих величин для такого постоянного тока, который на том же омическом сопротивлении выделяет мощность, одинаковую с $\langle N \rangle$ для переменного тока. Для синусоидального переменного тока

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{\text{эфф}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

5°. Амплитуда силы тока I_0 зависит не только от параметров контура (R , L и C) и амплитуды ЭДС $\mathcal{E}_0$, но и от циклической частоты Ω . На рис. IV.10.3 и IV.10.4 представлены зависимости $I_0(\Omega)$ и $\alpha(\Omega)$ при постоянных L , C , $\mathcal{E}_0$ и $R_1 > R_2 > R_3$.

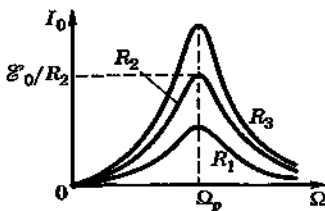


Рис. IV.10.3

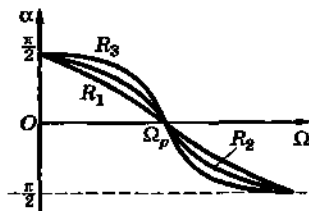


Рис. IV.10.4

Максимальное значение силы тока

$$I_{0\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

достигается при значении

$$\Omega = \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

где ω_0 — частота свободных незатухающих колебаний в контуре. При $\Omega = \Omega_p$ полное эффективное сопротивление колебательного контура минимально и равно активному сопротивлению R . При этом $\alpha = 0$, т. е. сила тока и вынуждающая ЭДС совпадают по фазе.

Резкое возрастание амплитуды силы тока в колебательном контуре при условии $\Omega \rightarrow \Omega_p$ называют *резонансом в электрической цепи*. Частоту Ω_p называют *резонансной циклической частотой*. Кривую зависимости I_0 от Ω (рис. IV.10.3) называют *резонансной кривой*; Ω_p не зависит от активного сопротивления R .

6°. Амплитуды падений потенциала на индуктивности $\Delta\varphi_L$ и на емкости $\Delta\varphi_C$ при резонансе в контуре, изображенном на рис. IV.10.2, одинаковы:

$$\Delta\varphi_{0L} = \Delta\varphi_{0C} = L\Omega_p I_0 = \frac{I_0}{\Omega_p C},$$

а фазы противоположны: $\Delta\varphi_L$ опережает $\Delta\varphi_C$ по фазе на π , так что $\Delta\varphi_L + \Delta\varphi_C = 0$. Напряжение U_R на активном сопротивлении равно ЭДС $\mathcal{E}$ источника энергии (*резонанс напряжений*).

7°. В электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных емкости C и индуктивности L , при включении синусоидальной ЭДС (рис. IV.10.5) $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t$ силы токов I_1 и I_2 в параллельных ветвях равны

$$I_1 = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1),$$

$$I_2 = I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2),$$

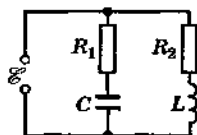


Рис. IV.10.5

где

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\Omega^2 C^2}}}, \quad I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_2^2 + \Omega^2 L^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\Omega C R_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\Omega L}{R_2}.$$

Сила тока в неразветвленной части цепи:

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

где

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_{01} \sin \alpha_1 + I_{02} \sin \alpha_2}{I_{01} \cos \alpha_1 + I_{02} \cos \alpha_2}.$$

Если активные сопротивления параллельных ветвей равны нулю ($R_1 = R_2 = 0$), то

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{1}{\Omega C}}, \quad I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{\Omega L}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\infty,$$

т. е. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$ — токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда тока во внешней (неразветвленной) цепи:

$$I_0 = |I_{01} - I_{02}| = \mathcal{E}_0 \left| \Omega C - \frac{1}{\Omega L} \right|.$$

При $\Omega = \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $I_{01} = I_{02}$ и $I_0 = 0$. Резкое уменьшение

амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно соединенные индуктивное и емкостное сопротивления, при условии $\Omega \rightarrow \Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ называют *резонансом токов*.

8°. При действии на колебательный контур ЭДС, представляющей собой сумму синусоидальных ЭДС с различными циклическими частотами Ω_i ,

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_{0i} \sin \Omega_i t,$$

благодаря явлению резонанса контур сильнее всего реагирует на ту составляющую ЭДС, частота которой Ω_k равна или наиболее близка к резонансной частоте Ω_p контура. В радиоприемных устройствах, основанных на этом принципе, резонансная частота изменяется за счет изменения емкости или индуктивности контура.

9°. Влияние на колебательный контур вынуждающих ЭДС, частоты которых отличны от Ω_p , тем слабее, чем острее резонансная кривая $I_0(\Omega)$ вблизи значения $\Omega = \Omega_p = \omega_0$. Острота резонансной кривой характеризуется ее *относительной полушириной* $\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p}$:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{2\beta}{\Omega_p},$$

где $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ — разность значений циклической частоты, соответствующих $I_0^2 = \frac{1}{2} I_{0\text{макс}}^2$ (рис. IV.10.6),

β — коэффициент затухания контура, Ω_p — резонансная частота.

Величину

$$Q = \frac{\Omega_p}{2\beta} = \frac{\Omega_p}{R/L}$$

называют *добротностью контура*. Следовательно,

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{1}{Q}.$$

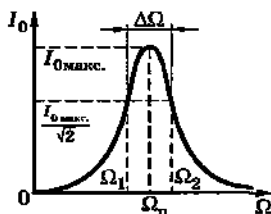


Рис. IV.10.6

Глава 11

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕПОДВИЖНЫХ СРЕД

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

1°. Теория Максвелла (уравнение Максвелла, классическая макроскопическая электродинамика) является последовательным обобщением основных законов

электрических и электромагнитных явлений: теоремы Гаусса—Остроградского, законов полного тока и электромагнитной индукции. Являясь теорией электромагнитного поля, теория Максвелла позволяет решать задачи, связанные с отысканием электрических и магнитных полей, создаваемых заданным распределением электрических зарядов и токов.

2°. Теория Максвелла является *феноменологической*. Электрические и магнитные свойства среды описываются в ней с помощью трех величин: относительной диэлектрической проницаемости ϵ , относительной магнитной проницаемости μ и удельной электропроводности γ . Зависимость этих величин от свойств среды, внутренний механизм явлений, происходящих в среде и вызывающих появление электрических и магнитных полей, в теории не рассматривается.

3°. Теория Максвелла является *макроскопической*. В ней рассматриваются поля, создаваемые макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах $V \gg V_m$, где V_m — объемы отдельных атомов и молекул. Кроме того, считаются выполненными условия:

а) $r \gg d$, где r — расстояния от источников полей до рассматриваемых точек пространства, d — линейные размеры атомов и молекул;

б) $T \gg T_m$, где T и T_m — характерные времена соответственно для изменений электрических и магнитных полей и внутримолекулярных процессов.

4°. Макроскопические заряды и токи являются совокупностями микроскопических зарядов и токов, создающих переменные электрические и магнитные поля (*микрополя*). В теории Максвелла рассматриваются усредненные поля. Усреднение производится по интервалам времени $t \gg T_m$ для участков поля с объемами $V \gg V_m$ (см. п. 3°).

5°. Теория Максвелла является *теорией близкодействия*. Согласно этой теории, скорость распространения электрических и магнитных взаимодействий равна скорости света в данной среде. В теории Максвелла раскрывается электромагнитная природа света.

2. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

1°. Закон электромагнитной индукции в форме

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad (11.1)$$

согласно Максвеллу, справедлив для любого замкнутого (не только проводящего) контура, произвольно выбранного в переменном магнитном поле. Переменное магнитное поле в любой точке пространства создает вихревое электрическое поле. Формула (11.1) выражает *первое уравнение Максвелла в интегральной форме*.

2°. С помощью соотношения для магнитного потока

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_n dS,$$

где B_n — проекция вектора магнитной индукции на направление единичной нормали $\mathbf{n}$ к элементу поверхности $dS = dS \cdot \mathbf{n}$, и *теоремы Стокса*:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (11.2)$$

можно записать *первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме*:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (11.3)$$

3. ТОК СМЕЩЕНИЯ. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

1°. Закон полного тока в форме

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k$$

утверждает, что магнитное поле создается упорядоченно движущимися электрическими зарядами — токами проводимости и конвекционными токами; $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ —

циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру L , охватывающему токи. Согласно Максвеллу,

источником возникновения вихревого магнитного поля является также переменное электрическое поле, магнитное действие которого характеризуется током смещения.

2°. Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Ток смещения через произвольную поверхность S :

$$I_{\text{смещ}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{смещ}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t},$$

где $\Phi_e = \int_S D_n dS$ — поток вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ сквозь поверхность S . Токи смещения обеспечивают замкнутость цепей любых непостоянных токов. Например, между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки создается ток смещения, замыкающий цепь.

3°. В диэлектрике

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, ϵ_0 — электрическая постоянная.

Плотность тока смещения в диэлектрике:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t},$$

где $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме,

$\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$ — плотность тока поляризации. Ток смещения в вакууме не выделяет джоулевой теплоты. Ток поляризации выделяет теплоту, связанную с трением в процессе поляризации диэлектрика.

4°. Обобщенный закон полного тока:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k + I_{\text{смещ}}. \quad (11.4)$$

Формула (11.4) — второе уравнение Максвелла в интегральной форме.

С помощью формулы Стокса (11.2) и соотношения для полного тока

$$I_{\text{полн}} = \sum_{k=1}^n I_k + I_{\text{смещ}} = \int_S (j_n + j_{n \text{ смещ}}) dS,$$

можно записать второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (11.5)$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока проводимости.

4. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1°. Помимо уравнений (11.1) и (11.4) в систему уравнений Максвелла входит теорема Гаусса—Остроградского для электрического и магнитного полей:

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D}_n dS = q, \quad (11.6)$$

$$\Phi_m = \oint_S \mathbf{B}_n dS = 0, \quad (11.7)$$

где Φ_e и Φ_m — соответственно потоки электрического смещения $\mathbf{D}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$ сквозь замкнутую поверхность, охватывающую свободный заряд q . Уравнение (11.7) выражает факт отсутствия свободных магнитных зарядов. Если ввести объемную плотность свободных зарядов ρ : $q = \int_V \rho dV$ (dV — элемент объема V)

и воспользоваться теоремой Гаусса $\oint_S \mathbf{A}_n dS = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV$,

то из уравнений (11.6) и (11.7) получаются третье и четвертое уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (11.6')$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (11.7')$$

2°. Полная система уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

дополняется *материальными уравнениями*, связывающими векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ с величинами, описывающими электрические и магнитные свойства среды:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость, μ — относительная магнитная проницаемость, γ — удельная электропроводность, ϵ_0 — электрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная. Среда здесь и в дальнейшем предполагается изотропной, неферромагнитной и несегнетоэлектрической.

3°. На границе раздела двух сред выполняются *граничные условия*:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad (11.9)$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{пов}}, \quad (11.10)$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе раздела, проведенный из среды 2 в 1, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к границе ($j_{\text{пов}}$ — проекция вектора плотности поверхностных токов проводимости на единичный вектор $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$).

Уравнения (11.9) выражают непрерывность нормальных составляющих вектора магнитной индукции и скачок нормальных составляющих вектора смещения. Уравнения (11.10) устанавливают непрерывность касательных составляющих вектора напряженностей электрического поля на границе раздела и скачок этих составляющих для напряженности магнитного поля.

4°. При заданных начальных условиях (значениях векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в начальный момент времени $t = 0$) система уравнений Максвелла имеет единственное решение. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА МЕТОДОМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ (при $\epsilon, \mu = \text{const}$)

1°. Для решения системы уравнений Максвелла вводятся *скалярный φ и векторный A потенциалы*:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Такое введение не является однозначным. Векторный потенциал A вводится с точностью до $\text{grad } \psi$, где ψ — произвольная скалярная функция точки:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \text{grad } \varphi.$$

Скалярный потенциал вводится с точностью до производной от скалярной функции φ по времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Это преобразование потенциалов электромагнитного поля, при котором решения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ уравнений Максвелла не изменяются, называют *калибровочными преобразованиями электромагнитного поля*.

Для однозначного определения потенциалов на A и φ накладывается дополнительное условие (*условие калибровки*). Наиболее употребительны *кулонова* и *лоренцева калибровки*. Все калибровки физически эквивалентны. В кулоновой калибровке

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

в лоренцевой калибровке

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}.$

2°. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля в однородной, изотропной среде, не обладающей ферромагнитными и сегнетоэлектрическими свойствами в лоренцевой калибровке, удовлетворяют *уравнениям Даламбера*:

$$\Delta A - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 j_{\text{прод}}; \quad \Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Здесь $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — скорость распространения электромагнитных волн в данной среде, а c — в вакууме, ρ — объемная плотность свободных зарядов, $j_{\text{пров}}$ — плотность токов проводимости, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

3°. Потенциалы ϕ и A могут рассматриваться как *запаздывающие*. Это означает, что учитывается конечная скорость v распространения электромагнитных сигналов:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right) dV',$$

$$A(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} j\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right) dV',$$

где x, y, z — координаты точки, в которой в момент t отыскиваются потенциалы ϕ и A ; x', y', z' — текущие координаты произвольно расположенного элемента объема dV' ; r — расстояние элемента dV' до точки наблюдения. В точке, удаленной на r от зарядов и токов — источников поля, потенциалы ϕ и A в момент времени t будут определяться значениями ρ и j в момент времени $t - \frac{r}{v}$.

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

1°. *Закон сохранения электрических зарядов* — утверждение о том, что электрические заряды не исчезают и не создаются, — устанавливает, что убыль зарядов q в замкнутом объеме V за единицу времени равна силе тока:

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Дифференциальная форма закона сохранения заряда — уравнение непрерывности для объемной плотности зарядов:

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

где j — плотность токов проводимости, ρ — объемная плотность зарядов.

2°. Энергия переменного электромагнитного поля, локализованная в пространстве с объемной плотностью

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

распространяется с групповой скоростью. Энергия, переносимая через единицу поверхности, перпендикулярной направлению распространения энергии, за единицу времени, определяется вектором *Пойнтинга* (мгновенной плотностью потока энергии):

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Закон сохранения энергии в электромагнитном поле (в интегральной форме):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dV = \int_V a \, dV + \int_S \Pi_n \, dS,$$

где $a = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ — объемная плотность тепловой мощности тока, Π_n — проекция вектора *Пойнтинга* на внешнюю нормаль к участку dS замкнутой поверхности S , ограничивающей рассматриваемый объем V поля. Убыль энергии в объеме V поля происходит за счет выделения джоулевой теплоты в проводниках, находящихся в поле, и распространения энергии сквозь замкнутую поверхность S , ограничивающую объем. Дифференциальная форма закона сохранения энергии в поле (в отсутствие зарядов и токов) — уравнение непрерывности для объемной плотности энергии w :

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

3°. Вместе с энергией электромагнитного поля переносится импульс поля, распределенный в пространстве с объемной плотностью g :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}.$$

Полный импульс поля в объеме V :

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} \, dV.$$

Наличие импульса $\mathbf{G}$ электромагнитного поля проявляется в световом давлении.

Закон сохранения импульса электромагнитного поля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{g} \, dV = -(\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) + \oint_S \mathbf{T}_n \, dS,$$

где $\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_m$ — силы, действующие соответственно на заряды и токи, находящиеся в объеме V ; $\oint_S \mathbf{T}_n \, dS$ — импульс,

передаваемый за единицу времени сквозь замкнутую поверхность S , ограничивающую объем; $\mathbf{T}_n$ — сила, действующая извне на единицу поверхности вдоль внешней нормали $\mathbf{n}$ к ней. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле выполняется при учете не только механического импульса $\mathbf{K}$, связанного с силами, действующими на заряды и токи:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m,$$

но и импульса электромагнитного поля $\mathbf{G}$. Если поверхность S охватывает все поле, то полный импульс в объеме V

$$\mathbf{G} + \mathbf{K} = \text{const.}$$

7. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА

1°. *Электронная теория* Лоренца является развитием теории электромагнитного поля Максвелла. Она исходит из определенных представлений о строении вещества (*микроскопическая теория*). Вещество в электронной теории рассматривается состоящим из движущихся заряженных частиц. Для описания электромагнитных явлений в средах электронная теория не использует величин ϵ и μ , характеризующих вещество в феноменологической теории Максвелла. Электрические и магнитные свойства вещества, все электромагнитные явления в средах объясняются характером расположения в пространстве, движения и взаимодействия электрических зарядов, из которых состоят атомы и молекулы.

2°. В каждой точке пространства существуют микрополя: электрическое с напряженностью $\mathbf{e}$ и магнитное с напряженностью $\mathbf{h}$, которые подчиняются системе уравнений Лоренца:

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0.$$

Плотность токов $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, где ρ — объемная плотность зарядов, $\mathbf{v}$ — их скорость.

3°. Система уравнений Лоренца дополняется выражением для объемной плотности силы Лоренца $\mathbf{f}$, действующей на заряды и токи:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \rho \mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{h}.$$

Для микрополей $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ справедливы законы сохранения.

4°. Объемная плотность w энергии электромагнитного поля, мгновенная плотность Π потока энергии — вектор Пойнтинга и объемная плотность $\mathbf{g}$ импульса для микрополей:

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 e^2 + \mu_0 h^2),$$

$$\Pi = \mathbf{e} \times \mathbf{h},$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}}{c^2} = \frac{\Pi}{c^2}.$$

8. УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛЯ

1°. Макроскопические поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$, которые наблюдаются экспериментально, могут быть получены в результате пространственно-временного усреднения микрополей $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$. Усредненная система уравнений Лоренца имеет вид:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{e}} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0},$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{h}} = \bar{\rho} \mathbf{v} + \epsilon_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{h}} = 0,$$

где черта над буквами обозначает усреднение соответствующих величин.

2°. Заряды, существующие в среде, подразделяются на свободные и связанные:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\text{своб}} + \bar{\rho}_{\text{связ}}$$

Усредненная плотность связанных зарядов выражается через вектор поляризованности $\mathbf{P}$:

$$\bar{\rho}_{\text{связ}} = -\text{div } \mathbf{P}.$$

3°. Усредненная плотность токов $\bar{\mathbf{j}} = \overline{\rho \mathbf{v}}$ состоит из плотности токов свободных зарядов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} = \overline{\rho_{\text{своб}} \mathbf{v}}$ и плотности токов связанных зарядов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = \overline{\rho_{\text{связ}} \mathbf{v}}$:

$$\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{своб}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}}.$$

Средняя плотность токов связанных зарядов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}}$ состоит из плотности токов поляризации $\bar{\mathbf{j}}_{\text{поляр}}$ и плотности токов намагничивания $\bar{\mathbf{j}}_{\text{намагни}}$:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{связ}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{поляр}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{намагни}}.$$

Ток поляризации обусловлен смещением зарядов в неполярных молекулах или поворотом осей полярных молекул в процессе поляризации: $\bar{\mathbf{j}}_{\text{поляр}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

Ток намагничивания появляется в результате существования замкнутых молекулярных токов, связанных с орбитальным движением электронов в атомах и молекулах: $\bar{\mathbf{j}}_{\text{намагни}} = \text{rot } \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — вектор намагниченности.

После подстановки выражений для $\bar{\rho}_{\text{связ}}$ и $\bar{\mathbf{j}}$ в систему уравнений Лоренца получаются уравнения для макроскопических полей:

$$\text{rot } \bar{\mathbf{e}} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \bar{\mathbf{h}}),$$

$$\text{rot } (\bar{\mathbf{h}} - \mathbf{I}) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}),$$

$$\text{div } (\epsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}) = \rho, \quad \text{div } \bar{\mathbf{h}} = 0,$$

где ρ — объемная плотность свободных зарядов, а $\mathbf{j}$ — плотность тока этих зарядов (макроскопических токов).

4°. Из сравнения с уравнениями Максвелла усредненных уравнений Лоренца следуют формулы:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

и связь векторов поляризации $\mathbf{P}$ и намагниченности $\mathbf{I}$ с макроскопическими полями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I}.$$

5°. Электронная теория раскрывает физический смысл макроскопических постоянных ε , μ и γ веществ, находящихся в различных постоянных и переменных электрических и магнитных полях.

6°. Как и феноменологическая теория Максвелла, электронная теория рассматривает непрерывные электромагнитные поля. Все вопросы где существенна дискретность полей (фотоэффект, тепловое излучение, эффект Комптона), не получают своего объяснения в классической электронной теории. Эти трудности преодолены в квантовой теории.

7°. В классической электронной теории проводимости рассматриваются свойства классического газа свободных электронов. Это приводит к ряду трудностей, которые разрешены в статистике Ферми—Дирака для вырожденного электронного газа в металлах.

Глава 12

ОСНОВЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

1. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

1°. *Магнитная гидродинамика* изучает взаимодействие электромагнитных полей с жидкими и газообразными средами, обладающими значительной электропроводностью. Примерами таких сред являются плазма и жидкие металлы.

2°. В задачах магнитной гидродинамики изучаемые среды предполагаются сплошными. Полагается, что для

всех проводящих жидкостей и газов магнитная проницаемость $\mu \approx 1$ и $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Предполагается также, что действительная часть диэлектрической проницаемости сред $\epsilon = \text{const}$.

В отношении удельной электропроводности сред γ делают следующие предположения:

а) величина γ однородна и изотропна по всей среде, γ не зависит от напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Это справедливо при выполнении условия

$$\omega_L \tau \ll 1,$$

где $\omega_L = \frac{e\mu_0 H}{2m}$ — ларморова частота прецессии для электронов, τ — среднее время свободного пробега электронов в среде. Нарушение этого условия может иметь место в очень разреженных средах и при весьма высоких напряженностях магнитного поля;

б) значение γ достаточно велико, так что

$$\frac{\epsilon \epsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1,$$

где ω — частота процессов, происходящих в среде, например электромагнитных волн, распространяющихся в плазме.

Предполагается также, что средняя длина свободного пробега электронов в среде много меньше некоторой характеристической длины в данной задаче, например расстояния между двумя проводящими пластинами, в пространстве между которыми движется жидкость под действием приложенного магнитного поля.

Это условие может не иметь места в сильно разреженных средах.

Наконец, в нерелятивистской магнитной гидродинамике предполагается, что движения среды совершаются со скоростями v , много меньшими скорости c света в вакууме.

3°. Уравнения магнитной гидродинамики представляют собой совокупность уравнений Максвелла для электромагнитного поля, гидродинамических уравнений неразрывности движения, термодинамического уравнения состояния среды и уравнения закона сохранения энергии.

При движении электропроводящей среды в магнитном поле возникает индукционный ток, плотность которого равна

$$j_{\text{инд}} = \mu_0 \gamma v \times H,$$

где v — скорость движения среды. Действие магнитного поля на токи в среде вызывает возникновение в ней электромагнитной объемной силы с плотностью

$$f_L = \rho_e E + \mu_0 j \times H,$$

где j — плотность полного тока:

$$j = j_{\text{инд}} + \rho_e v + \gamma E,$$

ρ_e — объемная плотность электрических зарядов в среде, E — напряженность электрического поля в среде. Величины $j_{\text{инд}}$ и f_L отражают связь между гидродинамическими и электромагнитными явлениями.

При предположениях, изложенных в п. 2°, в выражении для j пренебрегают первыми двумя членами и сохраняют лишь плотность тока проводимости $j = \gamma E$. В нерелятивистской теории также пренебрегают первым членом в f_L и сохраняют лишь магнитную составляющую $f = \mu_0 j \times H$.

4°. Полная система уравнений магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times v \times H + v_m \Delta H, \quad \nabla \cdot H = 0;$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \cdot \nabla)v = & -\nabla p - \mu_0 H \times \nabla \times H + \\ & + \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) \end{aligned}$$

— аналог уравнения Навье—Стокса;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad \text{— уравнение неразрывности;}$$

$$p = p(\rho, T) \quad \text{— уравнение состояния среды;}$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (K \nabla T) + \Phi + v_m \mu_0 (\nabla \times H)^2 \quad \text{— уравнение}$$

закона сохранения энергии.

В этих формулах Φ — диссипативная функция, h — удельная энтальпия среды, $v_m = \frac{1}{\gamma\mu_0}$ — коэффициент «магнитной вязкости» (коэффициент «магнитной диффузии»), η и ζ — коэффициенты первой и второй вязкости среды, ρ — плотность среды, p — давление, K — коэффициент теплопроводности среды, T — температура, v — скорость движения среды.

Точные решения уравнений магнитной гидродинамики получены лишь в немногих случаях простейших движений среды.

5°. Величину

$$Re_m = \frac{VL}{v_m},$$

где L и V — характеристические линейный размер и скорость для рассматриваемой магнитогидродинамической задачи, называют *магнитным числом Рейнольдса*. Во многих случаях $Re_m \gg 1$ и можно пренебрегать электрическим сопротивлением среды и связанными с ним джоулевыми потерями, а также диссипацией энергии магнитного поля.

6°. Для идеальной проводящей среды ($\eta = \zeta = K = 0$, $\gamma \rightarrow \infty$) в предположении, что теплообмен с окружением несуществен, т. е. движение среды совершается адиабатически, система уравнений магнитной гидродинамики принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \mu_0 \mathbf{H} \times \nabla \times \mathbf{H},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad p = p(\rho, T), \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = 0.$$

В последнем уравнении s — удельная энтропия среды, и оно выражает сохранение энтропии при адиабатическом движении среды.

7°. Первое из уравнений п. 6° (при $\gamma = \infty$) выражает закон сохранения магнитного потока сквозь любую поверхность, движущуюся вместе со средой. Это позволяет ввести представление о линиях индукции магнитного поля, «скрепленных» со средой, «вмороженных» в

среду. В этом смысле магнитная силовая линия является линией, связанной с частицами среды и перемещающейся вместе с ними.

8°. Для несжимаемой жидкости уравнения магнитной гидродинамики с помощью переменных

$$u = v + \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H, \quad w = v - \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H$$

записывают в симметричной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (w \cdot \nabla)u = -\nabla a + \Delta(\alpha u + \beta w),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (u \cdot \nabla)w = -\nabla a + \Delta(\alpha w + \beta u),$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \nabla \cdot w = 0,$$

где

$$a = \frac{p}{\rho} + \frac{(u-w)^2}{8}, \quad \alpha = \frac{v+v_m}{2}, \quad \beta = \frac{v-v_m}{2},$$

$v = \frac{\eta}{\rho}$ — кинематическая вязкость, v_m — коэффициент «магнитной вязкости». Выражение для плотности полной энергии имеет вид:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\rho}{4} (u^2 + w^2);$$

разность кинетической и магнитной энергий равна

$$\frac{\rho v^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{\rho}{2} u \cdot v.$$

9°. В магнитной гидродинамике не выполняется теорема Томсона о сохранении циркуляции скорости в идеальной жидкости. В присутствии магнитного поля циркуляция скорости по материальному контуру сохраняется лишь в том частном случае, если сила f_d , отнесенная к единице массы, обладает потенциалом:

$$\nabla \times (\rho \nabla \times H \times H) = 0.$$

2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1°. Если в хорошо проводящей среде, находящейся неподвижно в однородном, постоянном магнитном поле напряженностью H , возникают возмущения поля

или термодинамических параметров среды, то эти возмущения распространяются в среде в виде *магнито-гидродинамических волн*. Пусть p' , ρ' , h и v — возмущения давления, плотности, напряженности магнитного поля и скорости среды. В случае малых возмущений ($|p'| \ll p$, $|\rho'| \ll \rho$ и $h \ll H$, где p и ρ — равновесные значения давления и плотности среды) из уравнений п.1.6° следует, что в идеальной проводящей среде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \times v \times H, \quad \nabla \cdot h = 0, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \nabla \cdot v = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p' - \mu_0 H \times \nabla \times h = -c_{\text{зв}}^2 \nabla \rho' - \mu_0 H \times \nabla \times h.$$

Здесь $c_{\text{зв}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ — скорость звука в среде в отсутствие магнитного поля, а $p' = c_{\text{зв}}^2 \rho'$.

2°. Система уравнений п. 1° имеет решения в виде плоских волн с частотой ω и волновым вектором k , которые удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\omega h = -k \times v \times H, \quad \omega \rho' = \rho k \cdot v,$$

$$\rho \omega v + c_{\text{зв}}^2 \rho' k = \mu_0 H \times k \times h.$$

Из первого уравнения следует, что вектор h всегда перпендикулярен k . В проекциях на оси системы декартовых координат, ось Ox которых проведена в направлении волнового вектора k , а плоскость xOy совпадает с плоскостью, проходящей через векторы k и H , имеем:

$$V h_z = -v_z H_x, \quad V v_z = -\frac{\mu_0 H_x h_z}{\rho}, \quad (12.1)$$

$$V h_y = v_x H_y - v_y H_x, \quad V v_y = -\frac{\mu_0 H_x h_y}{\rho}, \quad (12.2)$$

$$V_x \left\{ V - \frac{c_{\text{зв}}^2}{V} \right\} = \frac{\mu_0 H_y h_y}{\rho}, \quad \rho' = \frac{\rho v_x}{V}.$$

Здесь $V = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость волн.

Из уравнений (12.1) следует существование *магнитогидродинамических волн первого типа*, называемых также волнами Альвена, фазовая скорость которых

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$. Частота этих волн

$$\omega = V_1 k = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}.$$

Одновременно с $\mathbf{h}$ колеблется и скорость $\mathbf{v}$ по закону

$v_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} h_x$. Таким образом, в волне первого типа векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ колеблются в направлении, перпендикулярном вектору $\mathbf{k}$, т. е. эта волна поперечная.

Термодинамические параметры среды при распространении волны 1-го типа не изменяются: $\rho' = p' = 0$. Поэтому такие волны могут распространяться как в сжимаемой {газообразной}, так и в несжимаемой {жидкой} среде. Групповая скорость волн Альвена не зависит от направления вектора $\mathbf{k}$ и равна:

$$u = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H.$$

3°. Из уравнений (12.2) следует существование еще двух типов волн, в которых осуществляются колебания h_y , v_x , v_y , ρ' и p' . Векторы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{v}$ в этих волнах, называемых *магнитозвуковыми волнами*, лежат в плоскости векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$, причем эти волны не являются ни чисто продольными, так как $v_y \neq 0$, ни чисто поперечными, так как $v_x \neq 0$. Фазовые скорости магнитозвуковых волн удовлетворяют уравнению:

$$(V^2 - c_{zv}^2) \left(\frac{\rho}{\mu_0} V^2 - H_x^2 \right) = (H_y V)^2,$$

корни которого равны:

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_{zv}^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}} + 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} c_{zv} H_x + \sqrt{c_{zv}^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}} - 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} c_{zv} H_x \right),$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{c_{zv}^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}} + 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} c_{zv} H_x - \sqrt{c_{zv}^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}} - 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} c_{zv} H_x \right).$$

Волну, скорость которой $V_2 > c_{\text{зв}}$, называют *ускоренной магнитозвуковой волной*, а волну, скорость которой $V_3 < c_{\text{зв}}$, — *замедленной магнитозвуковой волной*.

4°. В пределе при $H \ll \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} c_{\text{зв}}$ $V_2 \approx c_{\text{зв}}$ и $v_y \ll v_x$, т. е.

ускоренная волна переходит в обычную звуковую волну. При этом скорость замедленной волны совпадает со

скоростью волны первого типа: $V_3 \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H_x = V_1$. Одна-

ко в замедленной волне векторы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{k}$ лежат в плоскости векторов $\mathbf{H}$, $\mathbf{k}$, а не перпендикулярны к ней, как в волне первого типа.

При произвольном соотношении между H и $\sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} c_{\text{зв}}$ скорости V_2 и V_3 зависят от угла θ между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$. При $\theta = 0$ $H_x = H$ и $V_2 = \max\{c_{\text{зв}}, V_1\}$, а $V_3 = \min\{c_{\text{зв}}, V_1\}$,

где $V_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} H$. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ $V_2 = \sqrt{c_{\text{зв}}^2 + \frac{\mu_0 H^2}{\rho}}$, а $V_3 - V_1 = 0$, т. е. в этом направлении распространяется только ускоренная магнитозвуковая волна.

5°. В несжимаемой идеальной проводящей среде, находящейся в магнитном поле, распространяются магнитогидродинамические волны только одного типа — волны Альвена с двумя независимыми направлениями поляризации. Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ перпендикулярны волновому век-

тору $\mathbf{k}$ и связаны между собой соотношением $\mathbf{v} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \mathbf{h}$.

3. РАЗРЫВЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

1°. В магнитной гидродинамике *поверхностью разрыва* называют поверхность в электропроводящей среде, на которой значения либо термодинамических, либо электромагнитных, либо и тех и других величин, характеризующих среду и поле претерпевают скачок.

2°. На поверхности разрыва должны выполняться условия непрерывности потоков вещества, энергии и импульса, а также нормальной составляющей напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля и касательной составляю-

щей напряженности E электрического поля. В системе координат, движущейся вместе с рассматриваемым элементом поверхности разрыва, указанные выше условия для идеальной проводящей среды (п.1.6°) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \{v_n H_\tau - v_\tau H_n\} &= 0, \quad \{H_n\} = 0, \\ \left\{ \rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + h \right) + \mu_0 [H^2 v_n - v \cdot H H_n] \right\} &= 0, \\ \{\rho v_n\} &= 0, \quad \left\{ p + \rho v_n + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right\} = 0, \\ \left\{ \rho v_n v_\tau - \mu_0 H_n H_\tau \right\} &= 0, \end{aligned}$$

где фигурные скобки обозначают разность соответствующих величин по обе стороны поверхности разрыва, имеющих индексы 1 и 2 (например, условие $\{H_n\} = 0$ эквивалентно условию $H_{1n} - H_{2n} = 0$ или $H_{1n} = H_{2n}$); индексы n и τ соответствуют нормальной и тангенциальной относительно поверхности разрыва компонентам векторов (или их проекциям на эти направления).

3°. Если поверхность разрыва неподвижна относительно среды, т. е. $v_n = 0$, а $H_n \neq 0$, то

$$j = \rho v_n = 0, \quad \{v_\tau\} = 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad \{H_\tau\} = 0.$$

Вместе с ρ испытывают скачки s , T и другие термодинамические величины. Такой разрыв называют *контактным*. Поверхность разрыва представляет собой границу раздела между двумя неподвижными средами с различными значениями ρ и T .

4°. Если $v_n = 0$, $H_n = 0$, то имеют место соотношения:

$$j = 0, \quad \{v_\tau\} \neq 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \left\{ p + \frac{\mu_0 H_\tau^2}{2} \right\} = 0, \quad \{H_\tau\} \neq 0.$$

Скорость и напряженность магнитного поля параллельны поверхности разрыва и могут испытывать на ней скачки, произвольные по величине и направлению.

Такой разрыв называют *тангенциальным*. Он возможен как в сжимаемой, так и в несжимаемой среде. Скачок давления связан со скачком напряженности магнитного поля соотношением

$$p_2 - p_1 = -\frac{\mu_0}{2} (H_{2\tau}^2 - H_{1\tau}^2).$$

Скачки прочих термодинамических величин определяются через скачки p и ρ с помощью уравнения состояния.

5°. При условии $\{\rho\} = 0$ имеют место соотношения:

$$j \neq 0, \quad \{v_n\} = 0, \quad \{v_\tau\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad H_n \neq 0;$$

на поверхности раздела непрерывны все термодинамические величины, а также H_τ^2 . Такой разрыв называют *вращательным*. Вектор $\mathbf{H}$ поворачивается вокруг нормали к поверхности разрыва так, что не изменяются ни его модуль величина ($H = \text{const}$), ни угол с нормалью ($|\mathbf{H}_\tau| = \text{const}$). Вместе с вектором $\mathbf{H}_\tau$ испытывает скачок и касательная составляющая скорости:

$$\{v_\tau\} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \{H_\tau\}.$$

Возможны также разрывы, соединяющие в себе свойства тангенциальных и вращательных. В этих разрывах $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ остаются касательными к поверхности разрыва и лишь поворачиваются в своей плоскости, не меняясь по модулю.

6°. Разрыв, в котором $v_n \neq 0$, называют *перпендикулярной ударной волной*. В ней выполняется условие: $\{v_\tau\} = 0$. Если $H_n = 0$, то можно записать соотношения на поверхности разрыва в системе координат, в которой $v_{1\tau} = v_{2\tau} = 0$, положив $v = v_n$, $H = H_\tau$:

$$\left\{ \frac{H}{\rho} \right\} = 0, \quad \{\rho v\} = 0,$$

$$\left\{ \frac{v^2}{2} + h + \frac{\mu_0 H^2}{\rho} \right\} = 0, \quad \left\{ p + \rho v^2 + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right\} = 0.$$

Разрыв представляет собой продольную ударную волну сжатия, направление распространения которой перпендикулярно к направлению магнитного поля.

При $H = 0$ перпендикулярная ударная волна переходит в обычную гидродинамическую ударную волну. Перпендикулярная ударная волна малой амплитуды совпадает с ускоренной магнитозвуковой волной, распространяющейся поперек магнитного поля ($\theta = \frac{\pi}{2}$) со

скоростью $V_2^2 = c_{zv}^2 + u^2$.

В случае $H_n \neq 0$ в системе координат, в которой $\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$ и которая движется параллельно поверхности разрыва со скоростью

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} - \frac{v_n}{H_n} \mathbf{H},$$

на поверхности разрыва выполняются соотношения:

$$\{H_n\} = 0, \quad \left\{ \frac{v^2}{2} + h \right\} = 0, \quad \{\rho v_n\} = 0,$$

$$\left\{ p + \rho v_n^2 + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right\} = 0, \quad \left\{ \rho v_n v_\tau - \mu_0 H_n H_\tau \right\} = 0.$$

7°. Разрыв, в котором плотность среды претерпевает скачок:

$$\{\rho\} \neq 0, \quad j \neq 0,$$

называют *наклонной ударной волной*. В разрывах этого типа ударная волна сжатия сложным образом взаимодействует с магнитным полем. В случае $H_\tau = 0$, $H_n \neq 0$ наклонная ударная волна переходит в *параллельную ударную волну*, распространяющуюся вдоль направления магнитного поля и не взаимодействующую с ним. В случае малых амплитуд наклонные ударные волны переходят в магнитозвуковые — либо в ускоренную, либо в замедленную.

8°. Уравнение ударной адиабаты (адиабаты Гюгонио) в магнитной гидродинамике:

$$u_2 - u_1 + \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \\ + \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (H_{2\tau} - H_{1\tau})^2 = 0,$$

где u — удельная внутренняя энергия газа.

Скачок энтропии в ударной волне малой амплитуды:

$$s_1 - s_2 = -\frac{1}{12T} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 - \frac{\mu_0}{4T} \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1)(H_{2\tau} - H_{1\tau})^2.$$

Глава 13

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

1°. *Специальная теория относительности* представляет собой современную физическую теорию пространства и времени. Эту теорию часто называют *релятивистской теорией*, а специфические явления, описываемые ею, — *релятивистскими эффектами*. В специальной теории относительности так же, как и в ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно.

2°. В основе специальной теории относительности лежат два основных принципа, принимаемых в качестве исходных постулатов. *Первый постулат*, называемый *принципом относительности* (или *релятивистским принципом относительности Эйнштейна*), является обобщением механического принципа относительности на все физические процессы. Он гласит: *все физические законы независимы (инвариантны) по отношению к выбору инерциальной системы отсчета*. Это означает, что уравнения, выражающие законы физики, имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому на основе любых физических экспериментов нельзя выбрать из множества инерциальных систем отсчета какую-то главную («абсолютную») систему отсчета, обладающую какими-либо качественными отличиями от других инерциальных систем отсчета.

3°. Второй постулат выражает принцип *инвариантности скорости света в вакууме*: скорость света в вакууме c не зависит от движения источника света. Она одинакова во всех направлениях в пространстве и во всех инерциальных системах отсчета, являясь одной из важнейших физических постоянных.

Описание взаимодействия тел в классической механике Ньютона с помощью потенциальной энергии предполагает мгновенное распространение взаимодействий. В действительности, как показывают опыты, скорости всех тел и частиц, а также скорости распространения любых взаимодействий и сигналов не могут превосходить скорости света в вакууме c . Поэтому световые сигналы в вакууме можно использовать для *хронометризации системы отсчета*, т. е. для синхронизации часов, расположенных в разных точках пространства и перемещающихся вместе с рассматриваемой системой отсчета.

4°. Представления о свойствах пространства и времени, принятые в классической механике Ньютона и отраженные в преобразовании Галилея, противоречат постулатам специальной теории относительности. Действительно, из закона сложения скоростей в классической механике, примененного к распространению света в вакууме, следует, что скорость света не может быть одинаковой в разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга.

5°. В основе механики Ньютона лежит представление об одинаковости хода времени во всех инерциальных системах отсчета и, соответственно, об абсолютности промежутка времени между какими-либо двумя событиями. Например, если два события происходят одновременно по часам в одной инерциальной системе отсчета, то они, согласно классическим представлениям, совершаются также одновременно и по часам в любой другой инерциальной системе отсчета.

Из постулатов специальной теории относительности следует, что время протекает различно в движущихся друг относительно друга инерциальных системах отсчета. Поэтому промежуток времени между какими-либо двумя определенными событиями относителен: он изменяется в зависимости от скорости относительного движения систем отсчета. В частности, относительна одновременность двух событий, происходящих в разных

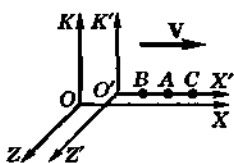


Рис. IV.13.1

точках пространства. События, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, вовсе не одновременны в других системах отсчета, движущихся относительно первой. Например, пусть инерциальная система отсчета $K'(x', y', z')$ движется относительно инерциальной системы

отсчета $K(x, y, z)$ с постоянной скоростью V вдоль положительного направления оси Ox (рис. IV.13.1). В системе K' световой сигнал в вакууме, испускаемый из точки A , одновременно достигает точек B и C , находящихся на оси $O'x'$ и равноудаленных от A . В системе K тот же сигнал достигает точки B , движущейся к нему навстречу, раньше, чем удаляющейся точки C (скорость сигнала в обеих системах отсчета и во всех направлениях одинакова и равна c).

2. ИНТЕРВАЛ

1°. *Четырехмерным пространством* называют воображаемое пространство четырех измерений, на осях которого откладываются три координаты x, y, z и время t . Любое событие изображается точкой в четырехмерном пространстве (*мировая точка*). Движению некоторой частицы в пространстве и во времени соответствует линия в четырехмерном пространстве (*мировая линия*).

2°. Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты двух событий в четырехмерном пространстве, то величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

называют *интервалом* между двумя событиями.

Интервал между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2},$$

где $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Откладывая на оси времени вместо t переменную $\tau = ct$, величину $ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ можно рассматривать как квадрат элемента длины в *четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве*.

3°. Интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета (*инвариантность интервала*):

$$s'_{12} = s_{12} \text{ или } c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (l'_{12})^2 = s_{12}^2,$$

где $(l'_{12})^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2$.

В осях координат l'_{12} и $c(t'_2 - t'_1)$ эта зависимость изображается в виде трех ветвей гипербол с асимптотами $c(t'_2 - t'_1) = l'_{12}$ (см. рис. IV.13.2). Ветви I и II соответствуют вещественному значению интервала ($s_{12}^2 > 0$). Такой интервал между событиями называют *временеподобным интервалом*. В этом случае знак разности $t'_2 - t'_1$ одинаков во всех инерциальных системах отсчета K' независимо от значения скорости V их движения относительно «неподвижной» системы отсчета K ($0 \leq V < c$). Иначе говоря, во всех системах отсчета K' второе событие происходит позже первого (ветвь I гиперболы), либо раньше первого (ветвь II). Точки A и A_1 на рис. IV.13.2 соответствуют такой системе отсчета K' , в которой оба события происходят в одном и том же месте ($x'_2 = x'_1$, $y'_2 = y'_1$, $z'_2 = z'_1$), а модуль промежутка времени между событиями $|t'_2 - t'_1|$ имеет минимальное значение: $|t'_2 - t'_1| = \frac{s_{12}}{c}$.

4°. Мнимые интервалы между двумя событиями 1 и 2 ($s_{12}^2 < 0$) называют *пространственноподобными интервалами*. Такому интервалу на рис. IV.13.2 соответствует ветвь III гиперболы. В этом случае ни в какой инерциальной системе отсчета K' рассматриваемые события не происходят в одном и том же месте ($l'_{12} \geq |s'_{12}|$). Времен-

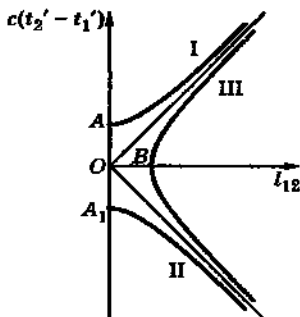


Рис. IV.13.2

ная последовательность событий неоднозначна. В одних системах отсчета K' $t'_2 > t'_1$ (верхняя половина ветви III гиперболы), в других $t'_2 < t'_1$ (нижняя половина ветви III). Точка B соответствует системе K' , в которой оба события происходят одновременно ($t'_2 = t'_1$), а пространственное расстояние между местами их совершения минимально и равно $|s_{12}|$.

Если событие 2 является следствием совершения события 1, то очевидно, что во всех системах отсчета K' $t'_2 > t'_1$. Поэтому любым двум событиям, связанным причинно-следственной связью, соответствует временноподобный интервал.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И ИХ СЛЕДСТВИЯ

1°. Преобразования координат и времени совершения одного и того же события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, удовлетворяющие постулатам специальной теории относительности, называются *преобразованиями Лоренца*. В соответствии с принципом относительности и свойствами симметрии пространства и времени эти преобразования линейны.

Если система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью V вдоль положительного направления оси Ox , а сходственные оси координат в K и K' попарно параллельны (см. рис. IV.13.1), преобразования Лоренца имеют вид:

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right),$$

где $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ — *релятивистский множитель*.

Преобразования Лоренца симметричны и сохраняют свой вид при переходе от K' к K с переменной знака у V :

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right).$$

Преобразования Лоренца переходят при малых скоростях $\left(\frac{V}{c} \ll 1\right)$ в *преобразования Галилея*. Координа-

ты и время не могут быть мнимыми. Поэтому скорость V относительного движения любых двух инерциальных систем отсчета не может быть равна скорости c света в вакууме или превосходить ее: $V < c$.

Из преобразований Лоренца видно, что понятие одновременности совершения двух событий относительно: если $t'_2 = t'_1$, но $x'_2 \neq x'_1$, то $t_2 \neq t_1$.

2°. Инвариантность физической теории относительно преобразований Лоренца — *релятивистская инвариантность* (лоренц-инвариантность) — является необходимым условием правильности этой теории. Отсутствие релятивистской инвариантности какого-либо физического закона означает, что он должен различно формулироваться в разных инерциальных системах отсчета, что, в нарушение принципа относительности, делает инерциальные системы неравноценными. Нарушение лоренц-инвариантности физической теории указывает, что данная теория является в лучшем случае приближенной, справедливой с определенной точностью лишь при некоторых условиях. Например, уравнение Шрёдингера — основное уравнение нерелятивистской квантовой механики — релятивистски неинвариантно и имеет вполне определенную область применения. Уравнения релятивистской динамики релятивистски инвариантны и при $v \ll c$ переходят в уравнения механики Ньютона, релятивистски неинвариантной и справедливой лишь при $v \ll c$.

3°. Ход времени в системах отсчета K и K' неодинаков, и это различие зависит от скорости их относительного движения. Если в системе K' длительность процесса 1—2, протекающего в неподвижном относительно K' объекте ($x'_2 = x'_1$, $y'_2 = y'_1$, $z'_2 = z'_1$), равна $\tau_0 = t'_2 - t'_1$, то, как видно из формул преобразований Лоренца, длительность этого процесса по часам в системе K равна

$$\tau = \gamma \tau_0.$$

Таким образом, $\tau \geq \tau_0$, т. е. движущиеся часы (в системе K') идут медленнее неподвижных (в системе K). Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с объектом, называют *собственным временем* этого объекта.

Пример. Среднее собственное время жизни мюона составляет $2,20 \cdot 10^{-6}$ с. Средний путь такой частицы,

движущейся со скоростью, близкой к c , должен составлять в воздухе 600 м. В действительности средний путь мюона в воздухе значительно больше, потому что среднее время жизни, измеренное в неподвижной системе, связанной с Землей (воздухом), значительно больше $2,20 \cdot 10^{-6}$ с.

4°. Из преобразований Лоренца следует сокращение движущегося масштаба длины в направлении движения (*лоренцево сокращение*):

$$\Delta x = \gamma \Delta x',$$

где Δx — масштаб длины, покоящийся в системе K ; $\Delta x'$ — тот же масштаб длины, измеренный в системе K' , относительно которой он движется со скоростью $-V$ относительно системы K .

Собственной длиной называют линейный размер l_0 тела в той системе координат, где оно покоится ($l_0 = \Delta x$). Длина l того же тела, измеренная в движущейся относительно него системе отсчета K' , уменьшается в отно-

$$\text{шении } \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}:$$

$$l = l_0 \gamma^{-1}.$$

Поперечные размеры движущегося тела не изменяются, так как

$$\Delta y = \Delta y' \text{ и } \Delta z = \Delta z'.$$

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

1°. Проекции скорости v тела по осям координат в неподвижной системе K связаны с проекциями его скорости v' в системе K' , движущейся со скоростью V вдоль положительного направления оси Ox (см. рис. IV.13.1):

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)};$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}.$$

Эти формулы представляют собой закон сложения скоростей в релятивистской механике. При $c \rightarrow \infty$ они переходят в закон сложения скоростей классической механики:

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z.$$

При движении тела вдоль оси Ox ($v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, $v'_x = v'$, $v'_y = v'_z = 0$)

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

2°. Квадраты модулей скоростей v и v' связаны соотношениями:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1 - v'^2/c^2}{\gamma^2(1 + v'_x V/c^2)^2},$$

$$\frac{v'^2}{c^2} = 1 - \frac{1 - v^2/c^2}{\gamma^2(1 - v_x V/c^2)^2}.$$

Если, в частности, $v = c$, то и $v' = c$. Сумма двух скоростей, меньших или равных c , есть скорость, не бóльшая c . Из преобразования Лоренца следует, что всегда $v < c$. Исключение составляет скорость фотонов, равная c .

3°. При $\frac{V}{c} \ll 1$ и произвольной скорости v , с точностью до членов порядка $\frac{V}{c}$, справедлива приближенная формула

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}')\mathbf{v}'.$$

4°. Формулы преобразования проекций векторов ускорений $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ имеют вид:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = a_x \frac{1}{\gamma^2(1 - v_x V/c^2)^2},$$

$$a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \left[(1 - v_x V/c^2) a_y + \frac{V v_y}{c^2} a_x \right] \frac{1}{\gamma^2(1 - v_x V/c^2)^2},$$

$$a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} = \left[(1 - v_x V/c^2) a_z + \frac{V v_z}{c^2} a_x \right] \frac{1}{\gamma^2(1 - v_x V/c^2)^2},$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a'_x \frac{1}{\gamma^2(1 + v'_x V/c^2)^2},$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left[(1 + v'_x V/c^2) a'_y - \frac{V v'_y}{c^2} a'_x \right] \frac{1}{\gamma^2(1 + v'_x V/c^2)^2},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left[(1 + v'_x V/c^2) a'_z - \frac{V v'_z}{c^2} a'_x \right] \frac{1}{\gamma^2(1 + v'_x V/c^2)^2}.$$

5. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

1°. Импульсом материальной точки в релятивистской механике (*релятивистский импульс*) называют вектор

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки, m — ее масса,

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Релятивистский импульс, в отличие от

импульса материальной точки в механике Ньютона, является нелинейной функцией скорости этой точки. Импульс $\mathbf{p}$ тела не может быть ни бесконечно большим, ни мнимым. Соответственно скорость тела (частицы) относительно любой инерциальной системы отсчета всегда меньше скорости света в вакууме c .

2°. *Основной закон релятивистской динамики:*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на материальную точку (частицу).

При малых скоростях движения частицы ($v \ll c$) релятивистский импульс частицы совпадает с принятым в ньютоновской механике выражением $p = mv$, а основной закон релятивистской динамики практически не отличается от второго закона Ньютона.

3°. Элементарная работа силы F , действующей на частицу массы m , при малом перемещении dr частицы равна

$$\delta A = F \cdot dr = v \cdot dp = mc^2 d\gamma.$$

Кинетическая энергия частицы

$$W_k = mc^2(\gamma - 1).$$

При малых скоростях ($v \ll c$) $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$
и $W_k = \frac{mv^2}{2}$.

4°. Ускорение a , сообщаемое частице силой F , равно

$$a = \frac{1}{m\gamma} \left[F - \frac{v}{c^2} (F \cdot v) \right].$$

В общем случае ускорение частицы не совпадает по направлению с вызывающей его силой. Исключением являются только два случая:

1) сила F направлена перпендикулярно скорости v , т. е. по нормали к траектории частицы, так что $F \cdot v = 0$ и ускорение частицы

$$a = a_n = \frac{F}{m\gamma};$$

2) сила F направлена по касательной к траектории частицы, что $v(Fv) = v^2 F$ и ускорение частицы

$$a = a_t = \frac{F}{m\gamma^3}.$$

5°. Кинетическая энергия W_k частицы равна разности ее полной энергии W в состоянии движения со скоростью v и ее полной энергии W_0 в состоянии покоя (при $v = 0$), называемой энергией покоя частицы.

Полная релятивистская энергия движущейся частицы и ее энергия покоя равны:

$$W = mc^2 \gamma \quad \text{и} \quad W_0 = mc^2.$$

Последнее соотношение выражает закон взаимосвязи массы и энергии, справедливый не только для отдельной частицы, но и для любой системы частиц (атомного ядра, атома, молекулы и т. д.).

Для элементарной (бесструктурной) частицы энергия покоя и масса являются неизменными характеристиками частицы подобно ее электрическому заряду и спину. Масса и энергия покоя тела зависят от его состава и внутреннего состояния. Например, при нагревании тела его энергия покоя и масса увеличиваются на ΔW_0 и Δm , причем $\Delta m = \frac{\Delta W_0}{c^2}$. Однако на практике этим

увеличением массы тела можно пренебречь. Так например, если на нагревание тела массой 1 кг затрачена энергия, равная 10^6 Дж, то увеличение массы тела ничтожно мало — порядка 10^{-11} кг.

6°. Для характеристики систем, обладающих запасом прочности (например, атомных ядер, атомов, молекул и т. п.), вводится понятие энергии связи. Энергия связи системы измеряется той наименьшей работой, которую нужно совершить, чтобы разложить систему на ее составные части (например, атом — на ядро и электроны, атомное ядро — на свободные протоны и нейтроны). Энергия связи системы

$$W_{\text{св}} = \sum_{i=1}^n m_i c^2 - M c^2,$$

где M — масса системы, состоящей из n частиц, а m_i — масса i -й частицы в свободном состоянии. Величину

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - M = \frac{W_{\text{св}}}{c^2}$$

иногда называют *дефектом массы системы*.

7°. Связь между полной энергией W , импульсом p и массой m свободной частицы:

$$W^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Так как масса m частицы инвариантна по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, то для рассматриваемой частицы значения ее полной энергии W' и импульса p' в любой инерциальной системе отсчета K' , движущейся относительно системы отсчета K с произвольной постоянной скоростью V , удовлетворяют условию:

$$W'^2 - p'^2 c^2 = W^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

8°. Преобразования Лоренца проекций импульса и полной энергии частицы при переходе из одной инерциальной системы отсчета K в другую K' , движущуюся со скоростью V вдоль положительного направления оси Ox (см. рис. IV.13.1), и обратно из K' в K имеют вид:

$$p'_x = \gamma(p_x - VW/c^2), \quad p_x = \gamma(p'_x + VW'/c^2),$$

$$p'_y = p_y, \quad p_y = p'_y,$$

$$p'_z = p_z, \quad p_z = p'_z.$$

$$W' = \gamma(W - Vp_x), \quad W = \gamma(W' + Vp'_x).$$

9°. Правила преобразования проекций силы при переходе между теми же, что в п. 8°, инерциальными системами отсчета K и K' :

$$F'_x = \frac{F_x - V(F \cdot v)/c^2}{1 - Vv_x/c^2}, \quad F_x = \frac{F'_x + V(F' \cdot v')/c^2}{1 + Vv'_x/c^2},$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}, \quad F_y = \frac{F'_y}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)},$$

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}, \quad F_z = \frac{F'_z}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)}.$$

Примеры.

1. В системе отсчета K частица покоится ($v_x = v_y = v_z = 0$)

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = \frac{1}{\gamma} F_y, \quad F'_z = \frac{1}{\gamma} F_z.$$

2. В системе отсчета K скорость частицы ортогональна оси Ox ($v_x = 0$)

$$F'_x = F_x - \frac{V}{c^2}(F_y v_y - F_z v_z), \quad F'_y = \frac{1}{\gamma} F_y, \quad F'_z = \frac{1}{\gamma} F_z.$$

3. В системе отсчета K скорость частицы параллельна оси Ox ($v_y = v_z = 0$)

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}.$$

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1°. Электрические заряды частиц и тел инвариантны по отношению к выбору системы отсчета, т. е. не зависят от скоростей движения этих частиц и тел. В то же время электромагнитное поле изменяется при переходе из одной инерциальной системы отсчета K в другую K' , движущуюся относительно K со скоростью V . Например, если все заряженные тела неподвижны в системе K , то в этой системе отсчета электромагнитное поле рассматриваемой совокупности тел сводится к чисто электрическому (электростатическому) полю. В системе отсчета K' заряженные тела движутся, и их поле включает как электрическую, так и магнитную составляющие.

2°. Для двух инерциальных систем отсчета K и K' , показанных на рис. IV.13.1, формулы преобразования скалярного ϕ и векторного A потенциалов электромагнитного поля имеют вид:

$$A'_x = \gamma \left(A_x - \frac{V}{c^2} \phi \right), \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z, \quad \phi' = \gamma (\phi - V A_x),$$

$$A_x = \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c^2} \phi' \right), \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \phi = \gamma (\phi' + V A'_x).$$

3°. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля при переходе из движущейся инерциальной системы отсчета K' в неподвижную K (см. рис. IV.13.1):

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma (E'_y + V B'_z), \quad E_z = \gamma (E'_z - V B'_y),$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \gamma (H'_y - V D'_z), \quad H_z = \gamma (H'_z + V D'_y),$$

$$D_x = D'_x, \quad D_y = \gamma \left(D'_y + \frac{V}{c^2} H'_z \right),$$

$$D_z = \gamma \left(D'_z - \frac{V}{c^2} H'_y \right),$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right), \quad B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right),$$

где $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор Лоренца.

Формулы для обратного перехода (из K' в K) получаются из написанных выше путем замены штрихованных величин на нештрихованные, нештрихованных на штрихованные и V на $-V$.

4°. Из преобразований Лоренца для электромагнитного поля, приведенных в п. 3°, следует инвариантность по отношению к выбору инерциальной системы отсчета следующих выражений:

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}' \cdot \mathbf{D}' = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D},$$

$$E'^2 - c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2 \quad \text{и} \quad D'^2 - \frac{H'^2}{c^2} = D^2 - \frac{H^2}{c^2}.$$

Таким образом, если в какой-либо инерциальной системе отсчета K нет магнитного поля ($\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$) либо нет электрического поля ($\mathbf{E} = 0$), то во всех других инерциальных системах отсчета K' , движущихся относительно K , есть оба поля, причем векторы напряженностей электрического $\mathbf{E}'$ и магнитного $\mathbf{H}'$ полей взаимно ортогональны. Соответственно взаимно ортогональны векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$.

5°. Для составляющих векторов, параллельных ($\parallel$) и перпендикулярных ($\perp$) $\mathbf{V}$, формулы преобразований в векторном виде имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= E'_{\parallel}, & E_{\perp} &= \gamma(E'_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{\perp}), \\ D_{\parallel} &= D'_{\parallel}, & D_{\perp} &= \gamma(D'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{H}'_{\perp}), \\ H_{\parallel} &= H'_{\parallel}, & H_{\perp} &= \gamma(H'_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{D}'_{\perp}), \\ B_{\parallel} &= B'_{\parallel}, & B_{\perp} &= \gamma(B'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}'_{\perp}). \end{aligned}$$

6°. При $V \ll c$ формулы преобразований Лоренца для электромагнитного поля (п. 3°) сильно упрощаются. С точностью до членов порядка $\frac{V}{c}$ эти преобразования поля имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' - \mathbf{V} \times \mathbf{B}', & \mathbf{B} &= \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}', \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}' - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{H}', & \mathbf{H} &= \mathbf{H}' + \mathbf{V} \times \mathbf{D}'. \end{aligned}$$

Если в системе K' отсутствует магнитное поле ($\mathbf{B}' = 0$), то в системе K

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{E}}{c^2}.$$

Если же в системе K' отсутствует электрическое поле ($\mathbf{E}' = 0$), то в системе K

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

7. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1°. Если источник электромагнитных волн частоты ν_0 движется относительно приемника волн, то частота волн ν , регистрируемая приемником, отличается от ν_0 . Это явление называют *эффектом Доплера для электромагнитных волн*. В отличие от эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью c , можно объяснить только на основе теории относительности.

2°. Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме математически описывается формулой:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 + (v/c)\cos\theta)}$$

Здесь v — вектор скорости движения источника, $v = |v|$, θ — угол, измеряемый в системе отсчета K , связанной с приемником, между вектором v и радиусом-вектором R , соединяющим приемник с источником волн, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

3°. Если источник волн движется вдоль прямой, соединяющей его с приемником ($\theta = 0, \pi$), то наблюдается *продольный эффект Доплера*:

а) при $\theta = 0$ (источник удаляется от приемника)

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 + v/c)} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < \nu_0;$$

б) при $\theta = \pi$ (источник приближается к приемнику)

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - v/c)} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > \nu_0.$$

4°. При $\theta = \pi/2$ или $3\pi/2$ и $\frac{v}{c} \approx 1$ наблюдается *поперечный эффект Доплера*:

$$\nu = \nu_0 \gamma^{-1} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right).$$

Поперечный эффект Доплера значительно слабее продольного. Его обнаружение на опыте явилось одним из подтверждений теории относительности.

Раздел V

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Глава 1

ОСНОВЫ АКУСТИКИ

1. ВВЕДЕНИЕ

1°. *Волнами* называют распространяющиеся в веществе или поле возмущения состояния этого вещества или поля.

Упругими волнами называют распространяющиеся в упругой среде механические возмущения (деформации). Внешние тела, вызывающие эти возмущения в среде, называют *источниками волн*. Распространение упругих волн состоит в возбуждении колебаний все более и более удаленных от источника волн частиц среды. Важнейшее отличие упругих волн в среде от любого другого упорядоченного движения ее частиц состоит в том, что при малых возмущениях (линейное приближение) распространение волн не связано с переносом вещества. В случае сильных возмущений имеет место малый перенос вещества, вызываемый нелинейным характером колебаний частиц среды.

2°. Упругую волну называют *продольной*, если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Упругую волну называют *поперечной*, если частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Поперечные волны могут возникать только в такой среде, которая обладает упругостью формы, т. е. способна сопротивляться *деформации сдвига*. Этим свойством обладают лишь твердые тела. Продольные волны связаны с объемной деформацией среды. Поэтому они могут распространяться как в твердых телах, так и в жидких или газообразных средах. Исключением из этого правила являются *поверхностные волны*, образующиеся на свободной поверхности жидкости или на

поверхностях раздела несмешивающихся жидкостей. При этом частицы жидкости одновременно совершают продольные и поперечные колебания, описывая эллиптические или более сложные траектории. Особые свойства поверхностных волн объясняются тем, что в их образовании и распространении определяющую роль играют силы тяжести и поверхностного натяжения.

3°. *Звуковыми или акустическими волнами* называют распространяющиеся в упругой среде слабые возмущения — механические колебания с малыми амплитудами.

Раздел физики, в котором рассматриваются свойства звуковых волн, закономерности их возбуждения, распространения и действия на встречные препятствия, называют *акустикой*.

2. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН (СКОРОСТЬ ЗВУКА)

1°. Скорость волн в жидкостях и газах равна

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

где K — модуль объемной упругости ($K = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$ — коэффициент сжатия), ρ — плотность невозмущенной

среды. Процесс деформации жидкости или газа при распространении в них звуковых волн может считаться адиабатным. Для идеального газа модуль объемной упругости в адиабатном процессе $K = \kappa p$, где p — давление невозмущенного газа, κ — показатель адиабаты. Скорость звуковых волн в идеальном газе равна

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} = \sqrt{\kappa B T},$$

где T — термодинамическая температура газа, $B = R/M$ — удельная газовая постоянная.

2°. В изотропной твердой среде скорость поперечных волн равна

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

а скорость продольных волн равна

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = \sqrt{\frac{26(1-\mu)}{\rho(1-2\mu)}},$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона ($0 < \mu < \frac{1}{2}$), ρ — плотность, G — модуль сдвига. В твердых средах скорость продольных волн всегда больше скорости поперечных волн ($c_l > \sqrt{\frac{4}{3}} c_t$).

Скорость продольных волн в тонком стержне, поперечные размеры которого во много раз меньше длины волны, равна

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Скорость распространения поперечных волн в струне — тонкой гибкой нити, в которой с помощью внешних сил создано большое натяжение, равна

$$c_t = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

где $\sigma = \frac{F}{S}$ — нормальное напряжение, F — сила натяжения, S — площадь поперечного сечения струны, ρ — плотность материала струны.

3°. В анизотропных твердых телах упругие свойства неодинаковы по разным направлениям. Поэтому скорости продольных и поперечных волн зависят от направления их распространения, а для поперечных волн — также от их поляризации, т. е. от ориентации плоскости, проведенной через вектор скорости волны и вектор смещения частиц среды в рассматриваемой точке (эту плоскость называют *плоскостью колебаний*).

3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

1°. *Теорема Гельмгольца*: всякое однозначное и непрерывное векторное поле $\mathbf{F}$, обращающееся в нуль в бесконечности, может быть представлено, и притом единственным образом, в виде суммы градиента некоторой скалярной функции φ и ротора некоторой векторной функции $\mathbf{A}$, дивергенция которой равна нулю:

$$\mathbf{F} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

или

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Функцию φ называют скалярным потенциалом поля $\mathbf{F}$, а функцию $\mathbf{A}$ — векторным потенциалом этого поля.

2°. В случае акустических волн в твердых средах скалярный потенциал φ векторного поля смещений $\mathbf{S}$ частиц среды из положений их равновесия характеризует продольные упругие волны и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, называемому *волновым уравнением*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \text{т. е. } \Delta \varphi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

или

$$\square \varphi = 0,$$

где c_2 — скорость продольных волн, Δ — оператор Лапласа, $\square = \Delta - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ характеризует поперечные упругие волны и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \text{или } \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

где c_1 — скорость поперечных волн, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

3°. Акустические волны в жидкостях и газах¹⁾ характеризуются скалярным потенциалом φ скоростей $\mathbf{v}'$ колебательного движения частиц среды:

$$\mathbf{v}' = \text{grad } \varphi.$$

Из уравнения неразрывности и уравнений движения следует, что для акустических волн, распространяющихся в неподвижной однородной безграничной идеальной жидкости, на которую не действуют массовые силы, потенциал φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

¹⁾ В дальнейшем под словом «жидкость» понимают также и газы, которые в механике сплошных сред рассматриваются как сжимаемые жидкости.

или

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

где c — скорость распространения волн. Такому же уравнению удовлетворяет каждая из компонент вектора $\mathbf{v}'$.

4°. Давление p' в жидкости, избыточное над равновесным, связано с φ соотношением

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где ρ — равновесная плотность жидкости. Давление p' удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}.$$

5°. Отклонение ρ' плотности жидкости от равновесного значения равно

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

причем для ρ' также справедливо волновое уравнение

$$\Delta \rho' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

6°. Продольную волну называют *плоской*, если потенциал φ и другие величины, характеризующие волновое движение среды, зависят только от времени и одной из пространственных декартовых координат, например от x .

Волновое уравнение для продольной плоской волны имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Его общее решение выражается следующим образом:

$$\varphi = f_1(ct - x) + f_2(ct + x),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции, причем $f_1(ct - x)$ — потенциал для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox , а $f_2(ct + x)$ — потенциал для плоской волны, распространяющейся в противоположном направлении. Обе эти волны, в отличие от *стоячих волн*, называют *бегущими волнами*.

7°. В продольной бегущей плоской волне $\varphi = f(ct - x)$ вектор смещения частиц среды $\mathbf{S} \approx S\mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ — орт оси Ox ,

а S — алгебраическое значение смещения, удовлетворяющее волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

В жидкости скорость v' колебательного движения частиц среды связана с избыточным давлением p' и изменением плотности ρ' соотношениями

$$p' = \rho c v' \text{ и } \rho' = \frac{\rho v'}{c}.$$

Произведение ρc плотности среды на скорость распространения в ней продольных волн называют *волновым сопротивлением среды*.

8°. Продольную волну называют *сферической*, если потенциал ϕ и другие величины, характеризующие волновое движение среды, зависят только от времени и расстояния r от некоторой точки пространства, называемой *центром волны*. Сферические волны возбуждаются в однородной и изотропной среде точечным источником волн — колеблющимся телом, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек среды.

Волновое уравнение для продольной сферической волны в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Его общее решение имеет вид

$$\phi = \frac{1}{r} f_1(ct - r) + \frac{1}{r} f_2(ct + r),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции, причем $\frac{1}{r} f_1(ct - r)$ — потенциал для расходящейся сферической волны, а $\frac{1}{r} f_2(ct + r)$ — потенциал для сферической волны, сходящейся к центру.

9°. *Принцип суперпозиции волн*: если в среде одновременно распространяется система n различных волн, описываемых скалярными потенциалами $\phi_1, \dots, \phi_n$ и векторными потенциалами $A_1, \dots, A_n$, то потенциалы ϕ

и A результирующей волны равны суммам соответствующих потенциалов всех волн системы:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{ и } A = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Иными словами, каждая из волн распространяется в среде независимо от других, т. е. так, как если бы их не было. Результирующая скорость, смещение и ускорение каждой частицы среды равны векторным суммам соответствующих величин, обусловленных каждой из волн порознь.

Принцип суперпозиции упругих волн справедлив только для так называемых *линейных сред*, подчиняющихся закону Гука, т. е. в тех пределах, пока скорость распространения волн в среде не зависит от их интенсивности.

4. ПРОДОЛЬНЫЕ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

1°. *Уравнением продольной волны* называют зависимость от координат и времени потенциала φ скорости возмущенного движения среды или какой-либо другой величины, однозначно характеризующей это движение.

2°. Продольную волну называют *синусоидальной* (гармонической), если колебания частиц среды являются гармоническими с одинаковыми циклическими частотами ω , так что

$$\varphi = a(x, y, z) \sin [\omega t - \alpha(x, y, z)],$$

причем функции координат a и α удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta a_1 + k^2 a_1 = 0 \text{ и } \Delta a_2 + k^2 a_2 = 0,$$

где $a_1 = a \cos \alpha$, $a_2 = a \sin \alpha$, $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, c — скорость волны, ω — циклическая частота волны, Δ — оператор Лапласа.

Функцию $a(x, y, z)$ называют *амплитудой волны*, функцию $\Phi(x, y, z, t) = \omega t - \alpha(x, y, z)$ — *фазой волны*, а $\alpha(x, y, z)$ — *начальной фазой волны*.

Для синусоидальной волны справедливо уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

3°. *Волновой поверхностью* или *фронтом волны* называют геометрическое место точек среды, в которых в

рассматриваемый момент времени фаза волны имеет одно и то же значение. Различным значениям фазы соответствует семейство волновых поверхностей. В том случае, когда в среде распространяется кратковременное возмущение, фронтом волны называют границу между возмущенной и невозмущенной областями среды.

Уравнение семейства волновых поверхностей имеет вид

$$\omega t - \alpha = C,$$

где C — константа, играющая роль параметра.

Волновые поверхности непрерывно перемещаются в среде и, вообще говоря, при этом деформируются. В случае однородной и изотропной среды скорость каждой точки волновой поверхности направлена по нормали к поверхности и равна скорости волны c , называемой *фазовой скоростью* волны.

4°. Волновые поверхности *плоской волны* представляют систему параллельных плоскостей. В однородной изотропной среде волновые поверхности *плоской волны* перпендикулярны к направлению распространения волны (направлению переноса энергии), называемому *лучом*. В анизотропных средах угол между лучом и волновой поверхностью равен 90° лишь для некоторых, вполне определенных направлений распространения плоской волны.

Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси OX , имеет вид

$$\varphi = a \sin (\omega t - kx + \alpha_0),$$

а для волны, распространяющейся в противоположном направлении,

$$\varphi = a \sin (\omega t + kx + \alpha_0),$$

где α_0 — начальная фаза колебаний точек среды, принадлежащих координатной плоскости YOZ . Если волна распространяется в идеальной среде, лишенной внутреннего трения и теплопроводности, то амплитуда волны a не зависит от x .

5°. Характеристикой синусоидальной волны служит *длина волны* λ (пространственный период), равная расстоянию между двумя ближайшими точками среды, для которых разность фаз волны равна 2π :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT = \frac{c}{\nu},$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период волны, $\nu = \frac{1}{T}$ — частота волны.

6°. Экспоненциальная форма записи уравнения плоской синусоидальной волны имеет вид

$$\varphi = A \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

где $A = ae^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$,

$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$ — волновой вектор, $\mathbf{n}$ — единичный вектор,

указывающий направление распространения волны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в рассматриваемую точку среды, $i = \sqrt{-1}$.

Экспоненциальная форма записи удобна для дифференцирования в волновых линейных уравнениях. Однако физический смысл имеет только вещественная часть экспоненциального выражения:

$$\varphi = \operatorname{Re}[A \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

(символ Re означает вещественную часть комплексного выражения), к которой переходят при нахождении физических величин.

7°. Произвольная волна может быть представлена в виде совокупности синусоидальных волн с различными волновыми векторами, частотами, амплитудами и начальными фазами. Такое представление основано на возможности разложения периодической функции в ряд Фурье или выражения непериодической функции с помощью интеграла Фурье, а также на принципе суперпозиции волн. Совокупность синусоидальных волн, в результате наложения которых получается рассматриваемая волна, называют *спектром* последней. Совокупности значений амплитуд и частот этих синусоидальных волн называют соответственно *спектром амплитуд* и *спектром частот*.

8°. Волновые поверхности сферической волны представляют собой систему концентрических сфер. Уравнение расходящейся синусоидальной сферической волны:

$$\varphi = \frac{a_0}{r} \sin(\omega t - kr + \alpha_0),$$

где α_0 — начальная фаза колебаний источника волн, r — расстояние от источника, a_0 — амплитуда коле-

баний в точках среды, находящихся на единичном расстоянии от источника.

В экспоненциальной форме уравнение сферической волны имеет вид

$$\varphi = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t),$$

где $\frac{A}{r} = \frac{a_0}{r} e^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$,

$i = \sqrt{-1}$. Везде, кроме особой точки $r = 0$, функция φ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$.

9°. Волну называют *цилиндрической*, если ее волновые поверхности имеют вид круговых цилиндрических поверхностей с общей осью симметрии. Вдали от этой оси уравнение расходящейся цилиндрической волны имеет вид

$$\varphi = \frac{a_0}{\sqrt{R}} \sin(\omega t - kR + \alpha_0),$$

где R — расстояние от оси, a_0 и α_0 — постоянные величины, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. В экспоненциальной форме

$$\varphi = \frac{A}{\sqrt{R}} \exp i(kR - \omega t),$$

где $\frac{A}{\sqrt{R}} = \frac{a_0}{\sqrt{R}} e^{i\alpha}$ — комплексная амплитуда, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$.

5. ЭНЕРГИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

1°. Объемной плотностью w энергии среды называют предел отношения энергии ΔW среды, заключенной в объеме ΔV , к этому объему при условии $\Delta V \rightarrow 0$:

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

2°. Объемная плотность энергии акустических волн в жидкости равна разности между объемными плот-

ностями энергии жидкости в возмущенном и невозмущенном состояниях. Она выражается следующей формулой:

$$w = \frac{\rho v'^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho} = \frac{\rho}{2} \left[(\text{grad } \varphi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

где c — скорость волны, v' — скорость колебательного движения частиц жидкости, ρ' — отклонение плотности жидкости от ее равновесного значения ρ . Первый член представляет собой объемную плотность кинетической энергии частиц жидкости, а второй — объемную плотность потенциальной энергии деформации жидкости.

3°. В случае продольной плоской волны

$$\rho v'^2 = \frac{c^2 \rho'^2}{\rho} \text{ и } w = \rho v'^2.$$

Если плоская волна является синусоидальной, т. е. $\varphi = a \sin(\omega t - kx + \alpha_0)$, то

$$w = \rho k^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha_0) = \rho \omega^2 a_s^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha_0),$$

где $a_s = \frac{a}{c}$ — амплитуда колебаний частиц среды.

Для произвольной продольной волны

$$\langle \rho v'^2 \rangle = \frac{c^2}{\rho} \langle \rho'^2 \rangle \text{ и } \langle w \rangle = \langle \rho v'^2 \rangle,$$

где $\langle v'^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v'^2 dt$, $\langle \rho'^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \rho'^2 dt$, и $\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w dt$ —

средние значения по периоду T волны.

4°. Распространение волн в неограниченной упругой среде представляет собой вовлечение в колебательное движение все более и более удаленных от источника волн областей среды. На это необходимо затрачивать энергию, доставляемую источником волн и передаваемую от одних участков среды к другим.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

где $U = p'v'$ — вектор Умова (вектор плотности потока энергии акустических волн); p' — давление в жидкости, избыточное над равновесным. Для плоской волны $U = \omega c = \rho v'^2 c$, где c — вектор скорости распространения волны.

5°. Интенсивностью I акустической волны (силой звука) называют количество энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхности, нормальной к направлению распространения волны:

$$I = \langle U \rangle = \langle p'v' \rangle = \frac{1}{T} \left| \int_0^T p'v' dt \right|.$$

Интенсивность синусоидальной волны пропорциональна квадрату ее амплитуды:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega |\text{grad } a|^2 = \frac{1}{2} \rho c k |\text{grad } a|^2,$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число. Для плоской и сферической синусоидальных волн $|\text{grad } a| = k$, и

$$I = \frac{1}{2} \rho c k^2 a^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{c} \omega^2 a^2, \quad I = \frac{P_{\text{эф}}^2}{\rho c},$$

где $P_{\text{эф}} = \sqrt{\langle p'^2 \rangle} = \sqrt{\frac{P_{\text{макс}}^2}{2}}$ — среднеквадратичное (эффективное) звуковое давление синусоидальной волны, $P_{\text{макс}}$ — амплитуда избыточного давления среды, обусловленного волновым движением последней.

6°. Поток энергии волны сквозь некоторую поверхность называют количество энергии, передаваемой сквозь эту поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \int_S I dS \cos \beta = \int_S I dS_n,$$

где β — угол между нормалью к площадке dS и направлением распространения волны, $dS_n = dS \cos \beta$ — площадь проекции площадки dS на плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны ($dS_n < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$).

6. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН (В ОТСУТСТВИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ)

1°. Если акустическая волна, распространяющаяся в некоторой среде 1, достигает границы раздела этой среды с другой средой 2, то возникают отраженная и преломленная волны. *Отраженной* называют волну, распространяющуюся от границы раздела в той же среде 1, что и первичная (*падающая*) волна. *Преломленной* называют волну, распространяющуюся во второй среде.

Углом падения называют угол i (рис. V.1.1) между направлением распространения падающей волны (падающим лучом SO) и перпендикуляром OM к поверхности раздела двух сред в рассматриваемой точке падения O . *Углом отражения* называют угол i' между направлением распространения отраженной волны (отраженным лучом OS') и перпендикуляром ON . *Углом преломления* называют угол r между направлением распространения преломленной волны (преломленным лучом OS'') и перпендикуляром OM .

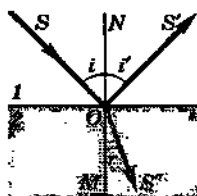


Рис. V.1.1

2°. Законы отражения:

1) отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к поверхности раздела сред, проведенной в точке падения;

2) угол отражения равен углу падения: $i' = i$.

3°. Законы преломления:

1) преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к поверхности раздела сред, проведенной в точке падения;

2) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей волн в первой и второй средах:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21},$$

где n_{21} — показатель преломления второй среды по отношению к первой (*относительный показатель преломления*).

4°. Соотношения между амплитудами и фазами падающей, отраженной и преломленной волн определяются граничными условиями: на поверхности раздела двух жидких сред должны быть одинаковы значения избыточных давлений в обеих средах, а также значения нормальных компонент скоростей колебательного движения частиц.

Для плоских волн и плоской границы раздела имеют место следующие соотношения (в отсутствие поглощения):

$$\rho_1(A_1 + A'_1) = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos i}{c_1}(A_1 - A'_1) = \frac{\cos r}{c_2} A_2,$$

где A_1 , A'_1 и A_2 — комплексные амплитуды потенциалов скорости для падающей, отраженной и преломленной волн, i и r — углы падения и преломления, ρ_1 и ρ_2 — плотности сред, c_1 и c_2 — скорости волн в этих средах;

$$A'_1 = \frac{\rho_2 c_2 \cos i - \rho_1 c_1 \cos r}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 c_1 \cos r} A_1, \quad A_2 = \frac{2 \rho_1 c_1 \cos i}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 c_1 \cos r} A_1,$$

или

$$A'_1 = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg} i}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg} i}} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\operatorname{ctg} r}{\operatorname{ctg} i}} A_1.$$

Если $\rho_1 = \rho_2$, то $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)}$. Если $\rho_1 c_1^2 = \rho_2 c_2^2$ (упругости сред одинаковы), то $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}$.

5°. Отраженная плоская волна полностью отсутствует при условии

$$\operatorname{ctg}^2 i = \frac{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2} = \frac{(c_1^2 - c_2^2)\rho_1^2}{(\rho_2 c_2)^2 - (\rho_1 c_1)^2},$$

которое осуществимо, когда $c_1 > c_2$, а $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ или, наоборот, $c_1 < c_2$, а $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$. В случае нормального падения ($i = r = 0$), $A'_1 = 0$, если $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$.

6°. Преломленная плоская волна полностью отсутствует, если $c_2 > c_1$ и $i > i_{\text{пр}}$, где $i_{\text{пр}}$ — предельный (критический) угол, определяемый из соотношения

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}.$$

Это явление называют полным внутренним отражением.

7°. Фазовые соотношения для случая нормального падения плоской волны на плоскую границу раздела сред. Если $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, то на границе раздела сред разность фаз между отраженной и падающей волнами равна нулю для потенциалов скорости (их амплитуды A'_1 и A_1 совпадают по знаку) и избыточных давлений и равна π для скоростей колебательного движения частиц среды.

Если $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$, то на границе раздела сред разность фаз между отраженной и падающей волнами равна π для потенциалов скорости (их амплитуды A'_1 и A_1 противоположны по знаку) и для избыточных давлений; она равна нулю для скоростей колебательного движения частиц среды.

Разность фаз для любых однородных величин в преломленной и падающей волнах равна нулю на границе раздела сред, независимо от свойств этих сред и значения угла падения.

8°. Коэффициентом отражения R называют отношение интенсивностей отраженной и падающей волн. Для плоской волны

$$\begin{aligned} R &= \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} r - \rho_1 \operatorname{tg} i}{\rho_2 \operatorname{tg} r + \rho_1 \operatorname{tg} i} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\rho_2 c_2 \cos i - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 i}}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 i}} \right)^2. \end{aligned}$$

В случае нормального падения

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2.$$

Если $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$ или $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$, то $R \approx 1$.

Коэффициентом прохождения D называют отношение интенсивностей преломленной и падающей волн. Для плоской волны

$$D = \frac{\rho_2 c_1 |A_2|^2}{\rho_1 c_2 |A_1|^2} = \frac{4\rho_1 \rho_2 c_1 c_2}{\left(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1 \frac{\cos r}{\cos i}\right)^2} = \frac{4\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2 \cos i} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \sin^2 i}\right]^2}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что в отсутствие поглощения

$$D \frac{\cos i}{\cos r} + R = 1.$$

В случае нормального падения $D + R = 1$.

Коэффициент R не изменяется при обращении направления распространения волны, т. е. он одинаков для случаев падения плоской волны под углом i из первой среды на границу со второй и падения плоской волны под углом r из второй среды на границу с первой.

9°. Давление p , производимое плоской волной на поверхность раздела двух сред, равно:

а) при наклонном падении ($i \neq 0$)

$$p = \frac{I_1}{2c_1} [(1 + R) \operatorname{ctg} i - (1 - R) \operatorname{ctg} r] \sin 2i;$$

б) при нормальном падении ($i = 0$)

$$p = \frac{2I_1}{c_1} \frac{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2)^2 - 2\rho_1 \rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2},$$

где $I_1 = \langle w_1 \rangle c_1$ — интенсивность падающей волны, c_1 — скорость этой волны, $\langle w_1 \rangle$ — средняя объемная плотность энергии падающей волны.

10°. При отражении сферической волны от плоской границы раздела двух сред отраженная волна также является сферической с центром в точке O' , симметричной относительно плоскости раздела MN центру O



Рис. V.12

падающей волны (рис. V.1.2). Амплитуда отраженной волны в точке D обратно пропорциональна расстоянию от точки O' и зависит от угла θ .

Если $c_2 > c_1$, то наряду с отраженной сферической волной в первой среде распространяется также *боковая волна*. Волновые поверхности боковой волны представляют собой усеченные конические поверхности, оси которых совпадают с перпендикуляром OO' , а образующие AB касаются соответствующих волновых поверхностей отраженной волны и образуют с плоскостью MN угол γ ,

удовлетворяющий условию $\sin \gamma = \frac{c_1}{c_2}$. Амплитуда боко-

вой волны в произвольной точке C зависит от $\angle OO'C$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния $r' = O'C$.

7. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

1°. *Стоячей плоской волной* называют волну, возникающую в результате наложения двух волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях и удовлетворяющих следующим условиям: частоты волн одинаковы, амплитуды являются одинаковыми функциями координат. В случае поперечных волн необходима также одинаковая *поляризация* обеих волн. Возникновение стоячих волн является частным случаем явления *интерференции* волн.

2°. Плоская продольная стоячая волна возникает, например, при наложении падающей и отраженной плоских волн, если угол падения равен нулю и коэффициент отражения $R = 1$, т. е. если отражение происходит от среды с очень большим или очень малым *волновым сопротивлением*. Уравнение плоской продольной синусоидальной стоячей волны, возникающей при наложении прямой волны $\varphi_1 = a \sin(\omega t - kx + \alpha_1)$ и обратной волны $\varphi_2 = a \sin(\omega t + kx + \alpha_1)$, имеет вид

$$\varphi = 2a \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right) \sin\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

3°. Амплитуда $a_{ст}$ плоской стоячей волны является периодической функцией координаты x и не зависит от времени:

$$a_{ст} = 2a \left| \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right) \right|.$$

Точки пространства, в которых $a_{\text{ст}} = 0$, называют узлами стоячей волны, а точки, в которых $a_{\text{ст}}$ имеет максимальное значение $(a_{\text{ст}})_{\text{макс}} = 2a$, называют пучностями стоячей волны. Для узлов $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, для пучностей $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx = 2m\frac{\pi}{2}$, где $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

4°. Длиной стоячей волны $\lambda_{\text{ст}}$ называют расстояние между двумя соседними узлами или пучностями:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2},$$

где λ — длина бегущих волн. Расстояние между соседними узлом и пучностью равно $\frac{\lambda_{\text{ст}}}{2} = \frac{\lambda}{4}$. Узлы скорости и смещения частиц жидкости совпадают с пучностями потенциала скорости и давления.

5°. В стоячей воде все частицы среды, находящиеся между двумя соседними узлами, колеблются в одной и той же фазе, но с разными амплитудами. При переходе через узел фаза колебаний скачкообразно изменяется на π , так как меняется знак $\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right)$.

6°. В отличие от бегущих волн, в стоячей волне отсутствует перенос энергии. Это, в частности, проявляется в том, что положения в пространстве узлов и пучностей не изменяются с течением времени (поэтому такие волны и называют стоячими). Отсутствие переноса энергии стоячей волной является следствием того, что образующие эту волну прямая и обратная волны переносят энергию в равных количествах и в противоположных направлениях.

7°. Стоячая сферическая волна возникает при наложении расходящейся и сходящейся гармонических сферических волн:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_0}{r} \sin(\omega t - kr + \alpha_1) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{\alpha_0}{r} \sin(\omega t + kr + \alpha_2).$$

Уравнение этой волны имеет вид

$$\varphi = \frac{2\alpha_0}{r} \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kr\right) \sin\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Условия для узлов и пучностей:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx = \begin{cases} (2m + 1)\frac{\pi}{2} & \text{— узлы,} \\ 2m\frac{\pi}{2} & \text{— пучности} \end{cases}$$

$$(m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

8°. Если жидкость заполняет ограниченную часть пространства, то частоты ее свободных колебаний могут принимать бесконечный ряд определенных дискретных значений, называемых *собственными частотами*. В этом случае в жидкости возникает сложная система стоячих волн, которая существенным образом зависит от формы и размеров сосуда.

Приведем значения собственных частот колебаний для некоторых частных случаев.

1. Цилиндрический столб газа в трубе длиной l . Если оба конца трубы закрыты или открыты, то $v = \frac{mc}{2l}$; если один конец трубы закрыт, а другой открыт, то $v = (2m - 1)\frac{c}{4l}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$; c — фазовая скорость волн в газе). У закрытых концов трубы располагаются узлы скорости (а также смещения) частиц газа и пучности давления, а у открытых — узлы давления и пучности скорости.

Написанные выше условия для труб, открытых с одного или двух концов, являются приближенными, так как получены в предположении отсутствия потока энергии через открытые концы трубы. Эти условия выполняются, если радиус трубы $R \ll \lambda$ (λ — длина волны). В общем случае для трубы, открытой с обоих концов,

$$v = \frac{mc}{2(l + 2aR)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

и для трубы, открытой с одного конца,

$$v = \frac{(2m - 1)c}{4(l + aR)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где $a = 0,63$, если на открытых концах трубы нет фланцев, и $a = 0,80$, если есть фланцы.

2. Жидкость в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и d :

$$v = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (m, n, p = 1, 2, \dots),$$

3. Резонатор с длиной тонкой трубкой:

$$v = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}},$$

где V — объем полости резонатора, S — площадь поперечного сечения трубки, l — длина трубки ($l \gg a_g$, где a_g — амплитуда колебаний газа в трубке). Полые сферические резонаторы называют *резонаторами Гельмгольца*.

9°. Собственные частоты поперечных колебаний струны длиной l равны

$$v = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

На концах струны — узлы смещения и пучности деформации и напряжения.

10°. Собственные частоты продольных колебаний тонкого стержня длиной l :

1) если стержень закреплен в середине, то

$$v = \frac{2n+1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ρ и E — плотность и модуль Юнга материала стержня. На концах стержня находятся узлы деформации и пучности смещения;

2) если стержень закреплен на одном конце, то

$$v = \frac{2n+1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

на закрепленном конце находится узел смещения (пучность деформации), на свободном — узел деформации (пучность смещения);

3) если стержень закреплен на обоих концах или свободно подвешен на неупругих нитях, то

$$v = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

в первом случае на концах стержня находятся узлы смещения (пучности деформации), во втором — узлы деформации (пучности смещения).

8. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В АКУСТИКЕ

1°. *Эффектом Доплера* называют зависимость частоты волн, воспринимаемой приемником, от скоростей движения источника волн и приемника по отношению к среде, в которой распространяется волна. Если источник волн, колеблющийся с частотой ν_0 , движется относительно среды со скоростью u_1 , а наблюдатель — со скоростью u_2 , то частота ν , воспринимаемая наблюдателем, равна

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{u_2}{c} \cos \theta_2}{1 + \frac{u_1}{c} \cos \theta_1},$$

где c — скорость волн в неподвижной среде, а θ_1 и θ_2 — углы, образуемые векторами u_1 и u_2 с вектором R , соединяющим приемник с источником волн.

2°. В этом случае, когда $\frac{u_1}{c} \ll 1$ и $\frac{u_2}{c} \ll 1$, справедлива приближенная формула

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right),$$

где u — относительная скорость источника и приемника ($u = u_1 - u_2$), θ — угол между векторами u и R .

Если источник и наблюдатель сближаются, то угол θ тупой, $\cos \theta < 0$ и $\nu > \nu_0$; если источник и наблюдатель удаляются друг от друга, то угол θ острый, $\cos \theta > 0$ и $\nu < \nu_0$.

9. ПОГЛОЩЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

1°. Распространение звуковых волн в однородной среде сопровождается диссипацией энергии, обусловленной внутренним трением и теплопроводностью. Это явление называют *поглощением звуковых волн*.

Амплитуда a и интенсивность I плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox , зависят от x по экспоненциальному закону:

$$a(x) = a_0 e^{-\gamma x} \text{ и } I(x) = I_0 e^{-2\gamma x},$$

где a_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность в точке $x = 0$, γ — коэффициент поглощения звука.

Для продольных волн в газах и жидкостях

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + K \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \right],$$

где ω и c — циклическая частота и скорость волны; ρ , η , ζ и K — плотность, динамическая вязкость, вторая вязкость и коэффициент теплопроводности среды, c_p и c_v — удельные теплоемкости среды в изобарном и изохорном процессах. Указанные соотношения справедливы при условии $\frac{\gamma c}{\omega} \ll 1$, т. е. при малом относительном уменьшении амплитуды волны на расстоянии, равном длине волны.

2°. Сильное поглощение происходит при отражении звуковой волны от твердой стенки. Оно обусловлено тем, что вблизи стенки градиенты температуры и касательной к стенке составляющей скорости частиц жидкости или газа (при наклонном падении звуковой волны) велики.

Доля энергии, поглощаемой при отражении звуковой волны от твердой стенки, равна

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\sqrt{2}\omega}{c \cos i} \left[\sqrt{\nu} \sin^2 i + \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \sqrt{a} \right],$$

где ω и c — циклическая частота и скорость падающей звуковой волны, i — угол падения, c_p и c_v — удельные теплоемкости жидкости или газа в изобарном и изохорном процессах, ν и a — кинематическая вязкость и коэффициент температуропроводности жидкости или газа. Эта формула справедлива, если $i \ll \frac{\pi}{2}$, волновое

сопротивление стенки много больше волнового сопротивления жидкости (газа), и температура стенки постоянна.

3°. Затухание звука в закрытых помещениях после прекращения действия источника звука характеризуется *временем реверберации*, равным промежутку времени, в течение которого объемная плотность энергии звуковых волн уменьшается в 10^6 раз по сравнению с ее первоначальным значением.

4°. *Рассеянием звука* называют процесс преобразования звуковой волны во множество волн, распространяющихся во всевозможных направлениях. Рассеяние звука возникает в результате взаимодействия звуковой волны с встречающимися на ее пути многочисленными препятствиями.

Отношение σ мощности рассеянных волн к интенсивности исходной (падающей на препятствие) волны называют *полным эффективным сечением рассеяния звука*. Если размеры препятствия малы по сравнению с длиной звуковой волны, то σ пропорциональна ω^4 , где ω — циклическая частота падающей волны.

10. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

1°. Звуковые волны, частоты которых заключены в пределах от 16 до 20 000 Гц, называют *слышимыми звуками*, так как, воздействуя на органы слуха человека, они способны вызывать звуковые ощущения. Звуковые волны с частотами $\nu < 16$ Гц называют *инфразвуковыми*, а волны с частотами $\nu > 2 \cdot 10^4$ Гц — *ультразвуковыми*.

2°. Характер восприятия звука органами слуха зависит от его спектра частот. *Шумы* обладают сплошным спектром, т. е. частоты содержащихся в них простых синусоидальных волн образуют непрерывный ряд значений, целиком заполняющих некоторый интервал. *Музыкальные (тональные) звуки* обладают линейчатым спектром частот: частоты ν_i входящих в их состав синусоидальных волн образуют ряд дискретных значений.

Музыкальным звукам соответствуют периодические или почти периодические колебания.

Каждую синусоидальную звуковую волну называют *тоном (простым тоном)*. *Высота тона* зависит от частоты: чем больше частота, тем выше тон. *Основным тоном* сложного музыкального звука называют тон, соответствующий наименьшей частоте в его спектре.

Тоны, соответствующие остальным частотам спектра, называют *обертонами*. Если частоты обертонов кратны частоте ν_0 основного тона, то обертоны называют *гармоническими*, причем основной тон с частотой ν_0 называют *первой гармоникой*, обертон с частотой $2\nu_0$ — *второй гармоникой* и т. д.

Музыкальные звуки с одним и тем же основным тоном могут различаться *тембром*. Тембр определяется составом обертонов — их частотами и амплитудами, а также характером нарастания амплитуд в начале звучания и их спада в конце звучания.

3°. Мерой силы слухового ощущения является *громкость звука*. Громкость звука зависит от его эффективного давления $p_{эф}$ и частоты. *Порогом слышимости* называют то наименьшее значение p_0 эффективного давления, при котором звук еще воспринимается органами слуха. Порог слышимости зависит от частоты звука, достигая минимального значения порядка $2 \cdot 10^{-5}$ Па при частотах $\nu = 700—6000$ Гц. *Стандартный порог слышимости* p_0^* принимают равным $2 \cdot 10^{-5}$ Па при $\nu = 1000$ Гц.

Порогом болевого ощущения (порогом осязания) называют то наибольшее эффективное давление звука, при котором восприятие звука еще не вызывает болевого ощущения. Если эффективное давление звука превосходит эту величину, то нормальное восприятие звука становится невозможным. Порог болевого ощущения зависит от частоты звука.

4°. *Уровнем звукового давления* синусоидальной звуковой волны называют величину L , пропорциональную десятичному логарифму отношения эффективного давления $p_{эф}$ этой волны к *условному порогу звукового давления*, принимаемому равным $p_0^* = 2 \cdot 10^{-5}$ Па:

$$L = 2k \lg \frac{p_{эф}}{p_0^*},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Выбор логарифмической зависимости L от $p_{эф}$ основывается на *законе Вебера—Фехнера*: прирост силы ощущения пропорционален логарифму отношения интенсивностей двух сравнимых раздражений.

5°. Закон Вебера—Фехнера является приближенным. В области энергий раздражения, близких к пороговым, он дает заметные расхождения с данными опытов. Применительно к физиологической акустике этот закон недостаточно точно учитывает также влияние частоты звука на его громкость. Поэтому для сравнения громкости звуковых волн всевозможных частот пользуются величиной, которую называют *уровнем громкости звука*. Она выражается следующим образом:

$$L^* = 2k \lg \frac{p_{эф}^*}{p_0^*},$$

где p_0^* — стандартный порог слышимости, а $p_{эф}^*$ — эффективное давление звука стандартной частоты $\nu = 1000$ Гц равногромкого с исследуемым звуком. Для звуковых волн с частотой 1000 Гц уровень громкости совпадает с уровнем звукового давления.

11. УЛЬТРАЗВУК

1°. *Ультразвуком* называют упругие волны с частотами от $2 \cdot 10^4$ до 10^{13} Гц. Ультразвуковые волны с частотами порядка 10^9 Гц и выше иногда называют *гиперзвуковыми*. Верхний предел частот ультразвука (10^{12} — 10^{13} Гц в кристаллах и жидкостях и 10^9 Гц в газах при нормальных условиях) соответствуют частотам, при которых длина волны ультразвука становится соизмеримой с межмолекулярными расстояниями (в случае газов — со средней длиной свободного пробега молекул). Для генерирования ультразвуков применяются механические и электромеханические излучатели. Примером механического излучателя низкочастотных ультразвуков ($\nu = 20$ — 200 кГц) большой интенсивности является *сирена*. «Звучание» сирены является результатом периодического прерывания мощной струи сжатого воздуха или пара при ее прохождении через отверстия в двух соосных дисках, один из которых (статор) неподвижен, а другой (ротор) вращается. Частота звука сирены $\nu = \frac{N\omega}{2\pi}$, где ω — угловая скорость ротора,

N — число отверстий, равномерно распределенных по окружности статора и ротора.

Электромеханические излучатели ультразвука делятся на два основных типа: магнитострикционные и пьезоэлектрические.

Магнитострикционные излучатели применяют для генерирования низкочастотных ультразвуков (до 200 кГц). Их действие основано на явлении магнитострикции в переменном магнитном поле. Простейший излучатель такого типа представляет собой ферромагнитный стержень, являющийся сердечником соленоида, по которому пропускается высокочастотный переменный ток.

Пьезоэлектрические излучатели применяют для генерирования ультразвуков с частотами до 50 МГц. Основным элементом пьезоэлектрического излучателя является пластинка из пьезоэлектрика, совершающая вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта вынужденные механические колебания в переменном электрическом поле.

2°. Для регистрации и анализа ультразвуков применяют пьезоэлектрические и магнитострикционные датчики. В первых используется прямой пьезоэлектрический эффект, который возникает в пластинке пьезоэлектрика, совершающей вынужденные колебания под действием регистрируемых ультразвуковых волн.

Магнитострикционные датчики основаны на явлении изменения индукции магнитного поля ферромагнитного тела при деформации этого тела. Переменная деформация ферромагнитного стержня, на торец которого действует ультразвуковая волна, вызывает возникновение переменной э. д. с. электромагнитной индукции в обмотке катушки, надетой на стержень.

3°. Вследствие малости длины ультразвуковой волны ультразвуки, подобно свету, могут излучаться в виде узких направленных пучков. Отражение и преломление ультразвуковых пучков на границе раздела двух сред происходит по законам геометрической оптики.

Для изменения направления и фокусирования ультразвуковых лучей применяются зеркала различной формы, звуковые линзы, излучатели специальной формы и т. д. Зеркала должны возможно полнее отражать ультразвуковые волны, поэтому их изготавливают из веществ, акустические сопротивления которых во много раз больше акустического сопротивления окружающей среды. Звуковые линзы изготавливаются из веществ,

акустические сопротивления которых близки к акустическому сопротивлению среды. Собирающие (рассеивающие) свойства звуковых линз и зеркал подчиняются тем же закономерностям, что и для соответствующих оптических устройств.

4°. Амплитуды скорости и ускорения колебательно-го движения частиц среды, а также амплитуда звукового давления в ультразвуковых волнах во много раз больше соответствующих величин для слышимых звуков. Благодаря большой амплитуде звукового давления, создаваемого мощными ультразвуковыми излучателями, в жидкостях возникает явление *кавитации* — в ней непрерывно образуются и исчезают внутренние разрывы сплошности. Исчезновение этих разрывов, имеющих вид мельчайших пузырьков, сопровождается кратковременным возрастанием давления до сотен и даже тысяч атмосфер. Поэтому ультразвуки обладают дробящим действием — они разрушают находящиеся в жидкости твердые тела, живые организмы, крупные молекулы и т. д.

5°. Ультразвуки весьма сильно поглощаются газами и во много раз слабее — жидкостями. Например, коэффициент поглощения ультразвука в воздухе приблизительно в 1000 раз больше, чем в воде. Одна из причин этого различия состоит в том, что кинематическая вязкость воды значительно меньше кинематической вязкости воздуха.

6°. Ультразвуки применяются в технике для контрольно-измерительных целей (гидролокация, дефектоскопия, измерение толщины стенок трубопроводов и слоя накипи и т. д.), а также для осуществления и ускорения различных технологических процессов.

7°. Принцип гидролокации сходен с принципом радиолокации и состоит в определении расстояния до тела, находящегося в толще воды, по величине промежутка времени между посылкой короткого ультразвукового сигнала и приемом эхо-сигнала, возникающего в результате рассеяния ультразвука телом. По изменению частоты эхо-сигнала, обусловленному эффектом Доплера, можно также определить лучевую скорость тела, т. е. проекцию скорости движения тела относительно наблюдателя на соединяющую их прямую.

8°. *Ультразвуковой дефектоскопией* называют обнаружение внутренних дефектов (трещин, раковин, неод-

нородностей структуры) в твердых телах с помощью ультразвука. Она основана на явлении рассеяния ультразвуковых волн от поверхностей дефектных областей тела.

9°. Дробящее действие ультразвуков используют в различных технологических процессах: для образования эмульсий и суспензий, снятия пленок окислов и обезжиривания поверхностей деталей, стерилизации жидкостей, размельчения зерен фотоэмульсии и т. д. Разрушающее действие ультразвуковых волн в жидкости на поверхность твердого тела заметно увеличивается при введении в жидкость мелких абразивных частиц. Это явление используют для ультразвукового шлифования и полирования, а также «сверления» отверстий различных форм в стекле, керамике, сверхтвердых сплавах и кристаллах.

10°. Ультразвуки ускоряют процессы диффузии, растворения и химических реакций. Влияние ультразвука на ход химических реакций главным образом обусловлено тем, что при кавитации в жидкости образуются свободные ионы. Ультразвук используют для газоочистки, так как он вызывает коагуляцию содержащихся в газах мельчайших твердых частиц и капелек жидкости.

11°. Ультразвуковые волны широко используют в молекулярной акустике для исследования акустическими методами строения и свойств вещества.

12. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗАХ

1°. *Ударной волной* называют распространение в газообразной, жидкой или твердой среде поверхности, на которой происходит скачкообразное повышение давления, сопровождающееся изменением плотности, температуры и скорости движения среды. Эту поверхность называют *поверхностью разрыва* или *скачком уплотнения*. Ударные волны возникают, например, при взрыве, детонации, движении тел в воздухе со сверхзвуковыми скоростями и т. д. Скорость распространения ударной волны относительно невозмущенной среды больше скорости звука в последней.

2°. На поверхности разрыва в газах выполняются следующие соотношения:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad \frac{v_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{v_{2n}^2}{2} + h_2,$$

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2, \quad v_{1\tau} = v_{2\tau},$$

где ρ и p — плотность и давление газа, v_n и v_τ — проекции скорости газа (в системе координат, жестко связанной с рассматриваемым элементом поверхности разрыва) на нормаль к элементу поверхности разрыва и касательную к ней плоскость, h — энтальпия единицы массы газа, а индексы 1 и 2 относятся к состояниям газа по разные стороны поверхности разрыва, т. е. до и после скачка уплотнения.

3°. Скачок уплотнения называют *прямым*, если его поверхность нормальна к скорости набегающего потока газа: $v_{1\tau} = 0$ и $v_{1n} = v_1$, $v_{2n} = v_2$. В противном случае скачок уплотнения называют *косым*.

4°. Некоторые соотношения для скачков уплотнения:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = (\rho_1 v_{1n})^2, \quad v_{1n} - v_{2n} = \sqrt{(p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}.$$

Уравнение ударной адиабаты (адиабаты Гюгонио):

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = 0,$$

или

$$u_1 - u_2 + \frac{1}{2} (p_2 + p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = 0,$$

где u — внутренняя энергия единицы массы газа.

Для идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями c_p и c_v имеем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} - (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) - (\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1}}, \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\kappa + 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa - 1)}{(\kappa - 1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa + 1)},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{(\kappa + 1)p_1 + (\kappa - 1)p_2}{(\kappa - 1)p_1 + (\kappa + 1)p_2} \right],$$

где $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты. При неограничен-

ном возрастании скачка давления $\left(\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \right)$ отношение

плотностей газа после и до скачка стремится к конечному пределу, равному $\frac{\kappa+1}{\kappa-1}$. Этот результат является

следствием необратимости процесса адиабатного сжатия газа ударной волной, сопровождающегося диссипацией энергии и возрастанием энтропии. Если течение газа перед ударной волной является потенциальным, то за ней оно становится вихревым.

Скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности пропорционален кубу скачка давления:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3,$$

где T_1 — температура газа перед ударной волной, s и ρ —

удельная энтропия и плотность газа, $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2} \right)_s > 0$.

5°. После прямого скачка уплотнения течение газа становится дозвуковым. Скорости газа перед (v_1) и за (v_2) скачком уплотнения удовлетворяют соотношениям

$$v_1 v_2 = c_*^2, \quad v_1 > c_1 \quad \text{и} \quad v_2 < c_2,$$

где c_1 и c_2 — скорости звука до и после скачка, c_* — критическая скорость.

Для идеального газа

$$v_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{2\kappa} \left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1) \right]},$$

$$v_2 = c_1 \frac{(\kappa-1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa+1)}{\sqrt{2\kappa \left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1) \right]}},$$

$$c_* = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1} c_1^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v_1^2} = \sqrt{\frac{c_1^2}{2\kappa} \left[(\kappa-1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1) \right]}.$$

Связь между параметрами состояния газа имеет вид:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)M_1^2}{(\kappa-1)M_1^2+2},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\kappa M_1^2 + (\kappa-1)][(\kappa-1)M_1^2+2]}{(\kappa+1)^2 M_1^2},$$

$$M_2 = \frac{v_2}{c_2} = \sqrt{\frac{(\kappa-1)M_1^2+2}{2\kappa M_1^2-(\kappa-1)}}, \text{ где } M_1 = \frac{v_1}{c_1}$$

(M — число Маха)

Изменения параметров состояния идеального газа и скорости:

$$p_2 - p_1 = \frac{2\kappa}{\kappa+1} p_1 (M_1^2 - 1) = \frac{2}{\kappa+1} \rho_1 v_1^2 \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right) = \\ = \rho_1 c_*^2 (M_{1*}^2 - 1),$$

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{M_1^2 - 1}{\frac{\kappa-1}{2} M_1^2 + 1} = \rho_1 (M_{1*}^2 - 1),$$

$$T_2 - T_1 = \frac{\kappa-1}{2} T_1 M_1^2 \left[1 - \left(\frac{2}{\kappa+1} \frac{1}{M_1^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^2\right] = \\ = \frac{(M_{1*}^2 - 1) T_1}{M_{1*}^2 \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - M_{1*}^2\right)},$$

$$v_1 - v_2 = c_* \frac{1 - M_{1*}^2}{M_{1*}},$$

где $M_{1*} = \frac{v_1}{c_*}$ — коэффициент скорости потока перед скачком, связанный с M_1 соотношением

$$M_{1*} = \sqrt{\frac{(\kappa+1)M_1^2}{(\kappa-1)M_1^2+2}}.$$



Рис. V.1.3

6°. Косой скачок уплотнения (рис. V.1.3) в идеальном газе. Угол α между вектором v_1 скорости газа перед скачком и поверхностью скачка может быть любым в пределах от α_0 до $\pi - \alpha_0$,

где $\sin \alpha_0 = \frac{c_1}{v_{1n}}$ ($v_{1n} > c_1$). В ре-

зультате прохождения через поверхность скачка линии тока «преломляются» ($\beta < \alpha$, так как $v_{2n} > v_{1n}$, а $v_{2t} > v_{1t}$):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2(\kappa - 1)M_1^2 \sin^2 \alpha + 4}{(\kappa + 1)M_1^2 \sin^2 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{1 + M_1^2 \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \sin^2 \alpha \right)} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$\beta = \alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (прямой скачок) или $\alpha = \arcsin \frac{c_1}{v_1}$.

Связь между составляющими скоростей, нормальными к поверхности разрыва:

$$v_{1n} v_{2n} = c_*^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} v_1^2 \cos^2 \alpha, \quad v_{1n} > c_1, \quad v_{2n} < c_2.$$

При этом в зависимости от значения касательной составляющей $v_t = v_1 \cos^2 \alpha$ скорость v_2 за косым скачком может быть как дозвуковой, так и сверхзвуковой:

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1)M_1^2}{2\kappa M_1^2 \sin^2 \alpha - (\kappa - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2 \alpha}{2 + (\kappa - 1)M_1^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Отношения давлений и плотностей газа:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} M_1^2 \sin^2 \alpha + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa + 1)M_1^2 \sin^2 \alpha}{(\kappa + 1)M_1^2 \sin^2 \alpha + 2}.$$

7°. Ударной полярной называют кривую зависимости проекции v_{2y} скорости v_2 за скачком уплотнения на ось Oy , перпендикулярную к скорости v_1 до скачка, от проекции v_{2x} скорости v_2 на ось Ox , параллельную v_1 . Уравнение ударной полярной имеет вид

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\frac{2}{\kappa + 1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}.$$

Ударная полярная изображена на рис. V.1.4. Она пересекает ось Ox в точках

$$Q \left(v_{2x} = \frac{c_*^2}{v_1} \right) \text{ и } P (v_{2x} = v_1),$$

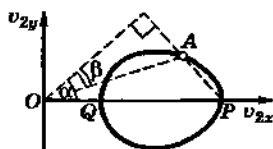


Рис. V.1.4

первая из которых соответствует прямому скачку уплотнения, а вторая — ударной волне нулевой интенсивности: $v_2 = v_1$. Произвольная точка A ударной полярной соответствует косому скачку уплотнения, способ определения углов α и β для которого ясен из рис. V.1.4; отрезок $OA = v_2$.

8°. Если тело движется в газе с дозвуковой скоростью ($v < c$), то создаваемые этим телом слабые (звуковые) волны распространяются в газе по всем направлениям. В том числе они, опережая тело, охватывают также область газа, лежащую перед движущимся телом.

В случае движения тела со сверхзвуковой скоростью ($v > c$) звуковые волны охватывают лишь часть объема газа, лежащую позади движущегося тела и ограниченную некоторой поверхностью, называемой *характеристической поверхностью* или *поверхностью слабого разрыва*. При сверхзвуковом прямолинейном движении тела исчезающе малых размеров характеристическая поверхность имеет вид конической поверхности (рис. V.1.5), вершина которой совпадает с движущимся телом O , а угол α между образующими и траекторией тела удовлет-

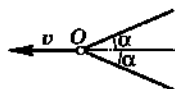


Рис. V.1.5

воряют условию: $\sin \alpha = \frac{c}{v}$. Этот угол называют *углом слабых возмущений* или *углом Маха*. Поверхность слабого разрыва является предельным случаем косого скачка уплотнения. На ударной поляре она соответствует точке P ($v_{2x} = v_1 = v$).

Глава 2

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

1°. *Электромагнитными волнами* называют распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле. Электромагнитные волны являются поперечными: векторы E и H напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору v скорости распространения волны. Векторы v , E и H образуют правовинтовую систему: из конца вектора v вращение от E к H по кратчайшему углу видно происходящим против часовой стрелки, т. е.

$$v = \frac{vE \times H}{EH}.$$

Лучом называют линию, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением распространения волны в этой точке, т. е. с направлением переноса энергии.

2°. Связь между E и H в электромагнитной волне, распространяющейся в непроводящей среде, определяется уравнениями Максвелла, в которых ρ и j полагают равными нулю:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = 0,$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0.$$

В случае рассматриваемой ниже однородной, изотропной, непроводящей среды, не обладающей ферромагнитными или сегнетоэлектрическими свойствами,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

где ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, ϵ и μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поля электромагнитной волны можно выразить через скалярный ϕ и векторный $\mathbf{A}$ потенциалы:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\Delta \phi = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

где Δ — оператор Лапласа, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с,

$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Таким образом, ϕ и каждая из проекций векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta s_i = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, \dots, 10),$$

где $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — фазовая скорость электромагнитной волны,

$s_1 = \phi$, $s_2 = A_x$, $s_3 = A_y$, ..., $s_{10} = H_z$. В вакууме ($\epsilon = \mu = 1$) $v = c$. Для всех сред, кроме ферромагнитных, $\mu \approx 1$ и

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}.$$

3°. Электромагнитную волну называют *плоской*, если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ зависят только от времени и одной декартовой координаты, например от x . В плоской волне все лучи параллельны друг другу.

Для плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Ox правовинтовой системы координат, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} E_x - H_x &= 0, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ H_z &= \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_y, & H_y &= -\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_z, \\ \mathbf{E} &= \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны. Следовательно, плоская волна может быть полностью определена с помощью одного лишь векторного потенциала $\mathbf{A}$. В вакууме

$$\begin{aligned} H_y &= -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_z, & H_z &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_y, \\ \sqrt{\mu_0} \mathbf{H} &= \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E}. \end{aligned}$$

4°. Электромагнитную волну называют *монохроматической*, если компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электромагнитного поля волны совершают гармонические колебания одинаковой частоты, называемой частотой волны. Монохроматическая волна не ограничена в пространстве и времени.

Произвольная немонохроматическая волна может быть представлена в виде совокупности монохроматических волн.

5°. Векторный потенциал плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re}\{\mathbf{A}_0 \exp[-i(\omega t - kx)]\}.$$

где A_0 — некоторый постоянный комплексный вектор, ω — циклическая частота, r — радиус-вектор, проведенный в рассматриваемую точку поля, k — волновой вектор:

$$k = \frac{\omega}{v} n = \frac{2\pi}{\lambda} n = \text{const},$$

n — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны, v — фазовая скорость волны, $\lambda = vT$ — длина волны, T — период колебаний.

6°. Напряженности электрического и магнитного полей плоской монохроматической волны:

$$E = \text{Re}\{E_0 \exp[-i(\omega t - kr)]\},$$

$$H = \text{Re}\{H_0 \exp[-i(\omega t - kr)]\}.$$

Здесь E_0 и H_0 — постоянные комплексные векторы:

$$E_0 = i\omega A_0 = \frac{ikc}{\sqrt{\epsilon\mu}} A_0,$$

$$H_0 = \frac{i}{\mu\mu_0} k \times A_0.$$

7°. Вектор E_0 может быть записан в виде

$$E_0 = a_1 e^{-i\alpha_1} + a_2 e^{-i\alpha_2},$$

где a_1 и a_2 — два взаимно перпендикулярных вещественных вектора, лежащих в плоскости, перпендикулярной волновому вектору k , α_1 и α_2 — вещественные скаляры. Если ось Oy проведена вдоль вектора a_1 , а ось Ox — в направлении распространения волны, то

$$E_y = a_1 \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$E_z = \pm a_2 \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

где знак плюс (минус) относится к случаю, когда вектор совпадает с положительным (отрицательным) направлением оси.

8°. В каждой точке поля плоской монохроматической волны конец вектора E описывает эллипс, лежащий в плоскости; уравнение этого эллипса имеет вид

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} - 2 \frac{E_y}{a_1} \frac{E_z}{a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Такую волну называют *эллиптически поляризованной*. Если $a_1 = a_2$ и $\alpha_1 - \alpha_2 = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, где $m = 0, \pm 1, \dots$, то эллипс превращается в окружность и волну называют *циркулярно поляризованной* (*поляризованной по кругу*). В зависимости от направления вращения вектора E при эллиптической или круговой поляризации различают *левую поляризацию* (вращение влево, т. е. против часовой стрелки) и *правую поляризацию* (вращение вправо, т. е. по часовой стрелке). Если $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, либо $\alpha_1 - \alpha_2 = m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \dots$, то плоскую волну называют *линейно поляризованной* (*плоскополяризованной*). В линейно поляризованной плоской волне векторы E во всех точках поля колеблются вдоль параллельных прямых. Плоскость, проведенную через вектор E и луч, называют *плоскостью поляризации колебаний* линейно поляризованной электромагнитной волны (рис. V.2.1).

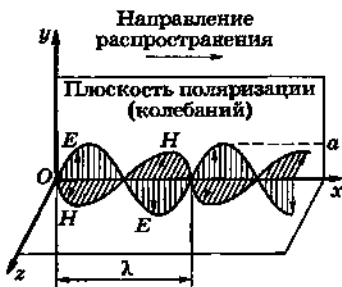


Рис. V.2.1

Произвольная плоская поляризованная волна может быть представлена в виде совокупности двух плоских волн, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.

9°. Амплитудой a линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны называют максимальное значение модуля вектора E : $a = |E|_{\text{макс}}$.

Интенсивностью I электромагнитной волны называют величину, равную энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единицу площади поверхно-

сти, перпендикулярной направлению распространения волны. Интенсивность I равна модулю среднего значения вектора Пойнтинга Π :

$$I = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\Pi| dt,$$

где T — период волны.

Для линейно поляризованной плоской монохроматической волны $I \propto a^2$, где a — амплитуда волны. Для произвольной плоской волны в однородной непоглощающей среде $I = \text{const}$.

10°. Электромагнитную волну называют *сферической*, если ее интенсивность зависит только от расстояния r до некоторой точки — центра волны. Из закона сохранения энергии следует, что для сферической волны в однородной непоглощающей среде $I = \frac{\text{const}}{r^2}$.

11°. Зависимость фазовой скорости электромагнитной волны в среде от частоты волны называют *дисперсией*. Среда, в которых наблюдается это явление, называют *диспергирующими* средами. Дисперсия электромагнитных волн отсутствует только в вакууме.

12°. Реальные электромагнитные волны не являются монохроматическими, хотя бы уже потому, что они всегда имеют ограниченную протяженность в пространстве и ограниченную длительность во времени. Такие волны могут быть представлены в виде совокупности монохроматических волн и называют *группой волн* или *волновым пакетом*. В диспергирующей среде происходит искажение формы группы волн в процессе ее распространения, обусловленное различием фазовых скоростей отдельных монохроматических компонент группы. Для характеристики распространения групп волн и скорости переноса ими энергии, т. е. скорости распространения сигнала, понятия фазовой скорости недостаточно.

13°. В первом приближении линейно поляризованный плоский волновой пакет, возбуждаемый синусоидально-модулированным по амплитуде источником и распространяющийся вдоль положительного направле-

ния оси Ox , может быть представлен в форме, соответствующей амплитудно-модулированным колебаниям поля в каждой точке пространства:

$$E = a [1 + m \cos (\Omega t - Kx)] \cos (\omega t - kx),$$

где $m = \frac{a'}{a} \ll 1$, $\Omega \ll \omega$, a' и Ω — амплитуда и циклическая частота модуляции, a и ω — амплитуда и циклическая частота модулируемой («несущей») волны, $K = -\frac{1}{2}(k_1 - k_2)$, k , k_1 , и k_2 — волновые числа, соответствующие монохроматическим волнам с частотами ω , $\omega_1 = \omega + \Omega$ и $\omega_2 = \omega - \Omega$.

Линейная протяженность группы волн вдоль оси Ox равна

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K}.$$

Скорость переноса энергии группой волн называют *групповой*:

$$u = \frac{\Omega}{K} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

При малых значениях Ω

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}},$$

где v — фазовая скорость модулируемой волны, $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$ — ее длина.

В случае отсутствия дисперсии $\frac{dv}{d\omega} = \frac{dv}{d\lambda} = 0$ и $u = v$.

Нормальной дисперсии соответствует

$$\frac{dv}{d\omega} < 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} > 0 \quad \text{и} \quad u < v.$$

Аномальной дисперсии соответствует

$$\frac{dv}{d\omega} > 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} < 0 \quad \text{и} \quad u > v.$$

14°. Результаты, приведенные в п. 13°, являются достаточно точными лишь в области

$$x \ll \frac{4\pi}{\left| \Omega^2 \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right|} \text{ или } x \ll \Delta x \frac{u}{|\Delta u|},$$

где x — расстояние от источника волн, Δx — длина группы волн, Δu — разность значений групповой скорости при частотах ω и $\omega \pm \Omega$. Вблизи частот поглощения средой электромагнитных волн $\left| \frac{dv}{d\omega} \right|$ очень велико, и понятие групповой скорости теряет смысл.

15°. В зависимости от частоты $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (или длины волны в вакууме $\lambda = \frac{c}{\nu}$), а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение и гамма-излучение.

Радиоволнами называют электромагнитные волны, длина которых в вакууме $\lambda > 5 \cdot 10^{-5}$ м (соответственно, частота $\nu < 6 \cdot 10^{12}$ Гц).

В связи с особенностями распространения и генерации весь диапазон длин волн и частот принято делить на 9 диапазонов, приведенных в таблице V.1.

Таблица V.1

Диапазон	Длина волны	Частота
Сверхдлинные волны (СДВ)	100 — 10 км	3 — 30 кГц
Длинные волны (ДВ)	10 — 1 км	30 — 300 кГц
Средние волны (СВ)	1000 — 100 м	0,3 — 3 МГц
Короткие волны (КВ)	100 — 10 м	3 — 30 МГц
Ультракороткие волны (УКВ):		
метровые	10 — 1 м	30 — 300 МГц
дециметровые	10 — 1 дм	0,3 — 3 ГГц
сантиметровые	10 — 1 см	3 — 30 ГГц
миллиметровые	10 — 1 мм	30 — 300 ГГц
субмиллиметровые	1 — 0,05 мм	0,3 — 3 ТГц

16°. Оптическим излучением, или светом, называют электромагнитные волны, длины которых в вакууме лежат в диапазоне от 10 нм до 1 мм (границы условны). К оптическому излучению относят инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения.

Инфракрасным излучением (ИК) называют электромагнитное излучение, длины волн которого в вакууме лежат в пределах от 1 мм до 770 нм.

Видимым излучением (видимым светом) называют электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме от 380 до 770 нм, которое способно непосредственно вызывать зрительное ощущение в человеческом глазе.

Ультрафиолетовым излучением (УФ) называют электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме от 380 до 10 нм.

17°. Рентгеновским излучением (рентгеновскими лучами) называют электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме, лежащими в диапазоне с условными границами от 10—100 нм до 0,01—1 нм.

Гамма-излучением (гамма-лучами) называют электромагнитное излучение с длинами волн в вакууме менее 0,1 нм.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВАКУУМЕ

1°. Согласно классической электродинамике, электромагнитные волны возбуждаются ускоренно движущимися электрическими зарядами. В веществе электромагнитные волны могут также возбуждаться зарядами, ускорения которых равны нулю, но скорости превосходят фазовую скорость света в этом веществе (*излучение Вавилова—Черенкова*). Процесс испускания электрической системой электромагнитных волн называют *излучением*, а сама система — *излучающей системой*. Электромагнитное поле волн, излучаемых системой, называют *полем излучения*.

2°. Волновой зоной называют область пространства, отстоящую от излучающей системы на расстояниях, которые значительно превосходят размеры из-

лучающей системы и длину излучаемых ею волн. В пределах малых участков волновой зоны электромагнитные волны можно считать плоскими. В волновой зоне электромагнитное поле излучения системы может быть определено с помощью запаздывающего векторного потенциала A .

Если начало координат выбрано в пределах излучающей системы, размеры которой малы по сравнению с расстоянием до рассматриваемой точки поля ($r' \ll R$), то в волновой зоне вектор-потенциал поля системы в вакууме имеет вид

$$A(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_{V'} j \left(t' + \frac{r'n}{c} \right) dV',$$

где R — радиус-вектор рассматриваемой точки поля, $R = |R|$, $n = \frac{R}{R}$, r' — радиус-вектор элемента объема dV' системы и $t' = t - \frac{R}{c}$.

В волновой зоне

$$E = (\dot{A} \times n) \times n \text{ и } H = \frac{1}{c} (A \times n),$$

где $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$.

Так как $r'n \ll R$, то в выражении для A обычно достаточно ограничиться одним (первое приближение) или двумя (второе приближение) членами разложения подынтегральной функции в ряд по степеням $\frac{r'n}{c}$:

$$A(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \int_{V'} j(t') dV' + \frac{\mu_0}{4\pi c R} \frac{\partial}{\partial t'} \int_{V'} j(t') r'n dV'.$$

Для системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$\int_{V'} j dV' = \sum_{i=1}^n q_i v_i \text{ и } \int_{V'} j(r'n) dV' = \sum_{i=1}^n q_i v_i (r_i n),$$

где r_i и v_i — радиус-вектор и скорость заряда q_i .

3°. В первом приближении излучение электрической системы обусловлено изменением по времени ее

дипольного электрического момента $\mathbf{p}_e = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$, где

$q_1, q_2, \dots, q_n$ — заряды, входящие в состав системы, а $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор заряда. Это излучение называют *дипольным излучением*, или *электрическим дипольным излучением*. В волновой зоне поле дипольного излучения в вакууме системы зарядов, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме ($v_i \ll c$), имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}_e(t'),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} (\ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi c R^2} \ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из излучающей системы в рассматриваемую точку поля, $R = |\mathbf{R}|$, $\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t'}$, $\ddot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial^2 \mathbf{p}_e}{\partial t'^2}$ в момент времени $t' = t - \frac{R}{c}$ и μ_0 — магнитная постоянная.

В частности, для излучения точечного заряда q , $\mathbf{p}_e = q\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{p}}_e = qa$, и

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^3} (\mathbf{a} \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{4\pi c R^2} \mathbf{a} \times \mathbf{R},$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение заряда q в момент времени $t' = t - \frac{R}{c}$.

4°. В волновой зоне вектор Пойнтинга для дипольного излучения в вакууме равен

$$\Pi(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left(t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 (\sin^2 \theta) \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{p}}_e$ в момент времени $\left(t - \frac{R}{c} \right)$ и $\mathbf{R}$.

Мгновенная мощность дипольного излучения в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении, определяемом углом θ , равна

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left| \ddot{\mathbf{p}}_e \left(t - \frac{R}{c} \right) \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Мгновенная мощность дипольного излучения по всем направлениям равна

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}_e|^2.$$

Примеры.

1. Излучение заряда q , движущегося в вакууме с ускорением a :

$$N = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.$$

В случае гармонических колебаний заряда с циклической частотой ω и амплитудой A_0 мгновенная (N) и средняя ($\langle N \rangle$) мощности излучения равны

$$N = \frac{\mu_0 q^2 A_0^2 \omega^4}{6\pi c} \sin^2 \omega t, \quad \langle N \rangle = \frac{\mu_0 q^2 A_0^2 \omega^4}{12\pi c}.$$

Время затухания, т. е. промежуток времени, в течение которого амплитуда свободных колебаний заряда уменьшается в $e = 2,71 \dots$ раз вследствие потерь энергии на излучение, а также число n полных колебаний, совершаемых за время τ , равны

$$\tau = \frac{12\pi c m}{\mu_0 \omega^2 q^2}, \quad n = \frac{6 c m}{\mu_0 \omega q^2},$$

где m — масса заряженной частицы.

В классической теории излучения света атомом $q = e$; а величина τ характеризует продолжительность излучения атомом одного цуга волн, ее называют *средним временем жизни излучающего атома*. Для частот видимого света ($\omega \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$) $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$ и $n \approx 10^7$.

2. *Вибратор (диполь) Герца* — короткий (по сравнению с длиной λ излучаемых волн) провод с одинаковыми сосредоточенными емкостями на концах и искровым промежутком посередине, к которому подводится переменное напряжение.

Так как длина вибратора $l \ll \lambda$, то ток $I = I_0 \sin \omega t$ в вибраторе можно считать *квазистационарным*, т. е. одинаковым во всей цепи; $\ddot{p}_e = l \frac{dI}{dt}$, и средняя мощность излучения в вакууме равна

$$\langle N \rangle = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{12\pi c} I_0^2.$$

Расход энергии на излучение принято характеризовать с помощью величины $R_{\text{изл}} = \frac{2\langle N \rangle}{I_0^2}$, называемой *сопротивлением излучения*:

$$R_{\text{изл}} = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{6\pi c} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

5°. Во втором приближении вектор-потенциал поля в волновой зоне системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$, движущихся в вакууме со скоростями $v_i \ll c$, можно представить в следующей форме:

$$A(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{p}_e(t') + \frac{\mu_0}{4\pi c R} (\dot{p}_m(t') \times n) + \frac{\mu_0}{24\pi c R} \ddot{D}(t'),$$

где $t' = t - \frac{R}{c}$, $p_e(t') = \sum_{i=1}^n q_i r_i(t')$ — дипольный электрический момент системы, $p_m(t')$ — магнитный момент системы:

$$p_m(t') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i r_i(t') \times v_i(t'),$$

$D(t')$ — произведение единичного вектора $n = \frac{R}{R}$ на тензор квадрупольного электрического момента системы зарядов:

$$D(t') = \sum_{i=1}^n q_i [3r_i(nr_i) - r_i^2 n];$$

$$\dot{p}_e = \frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad \dot{p}_m = \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad \text{и} \quad \ddot{D} = \frac{\partial^2 D}{(\partial t')^2}$$

Соответственно напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$ электромагнитного поля излучения в вакууме имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = & \frac{\mu_0}{4\pi R} [(\ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n})_x \times \mathbf{n} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_m(t') + \\ & + \frac{1}{6c} (\ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = & \frac{1}{4\pi c R} [\ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n} + \frac{1}{c} (\ddot{\mathbf{p}}_m(t') \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \\ & + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}].\end{aligned}$$

Второй и третий члены выражений для $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$ характеризуют соответственно *магнитное дипольное* и *электрическое квадрупольное излучения* системы зарядов. Средняя мощность этих типов излучения приблизительно в $(c/v)^2$ раз меньше средней мощности дипольного излучения системы. Поэтому при нерелятивистских скоростях ($v \ll c$) магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучение играют существенную роль лишь в тех случаях, когда электрический дипольный момент системы равен нулю или постоянен, так что электрическое дипольное излучение полностью отсутствует.

6°. В волновой зоне вектор Пойнтинга для магнитного дипольного излучения в вакууме равен

$$\Pi(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 (\sin^2 \theta) \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

где θ — угол между вектором $\ddot{\mathbf{p}}_m(t')$ и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, проведенным из излучающей системы в рассматриваемую точку поля.

Мгновенная мощность магнитного дипольного излучения в элемент телесного угла $d\Omega$ в направлении, определяемом углом θ :

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Мгновенная мощность магнитного дипольного излучения по всем направлениям:

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} |\ddot{\mathbf{p}}_m(t')|^2.$$

Пример. Рамочная антенна — замкнутый контур переменного тока. В этом случае $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ($\mathbf{j}$ — вектор плотности тока), и из закона сохранения заряда следует, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, т. е. распределение зарядов и электрические дипольный и квадрупольный моменты системы неизменны во времени. Излучение обусловлено переменностью магнитного дипольного момента системы, т. е. представляет собой магнитное дипольное излучение.

В случае синусоидального тока ($I = I_0 \sin \omega t$) средняя мощность магнитного дипольного излучения рамочной антенны в вакууме равна

$$\langle N \rangle = \frac{\mu_0 S^2 \omega^4}{12\pi c^3} I_0^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{S^2}{12\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 I_0^2,$$

где S — площадь, ограниченная контуром, и $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ —

длина волны излучения ($\lambda \gg \sqrt{S}$).

Сопротивление излучения

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\langle N \rangle}{I_0^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{S^2}{6\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4.$$

Для замкнутой системы, состоящей из заряженных частиц с одинаковыми удельными зарядами $\frac{q_i}{m_i}$ (m_i — масса частицы), $\vec{\mathbf{p}}_e = \vec{\mathbf{p}}_m = 0$, т. е. такая система не создает ни электрического дипольного, ни магнитного дипольного излучения. Магнитное дипольное излучение отсутствует также в случае изолированной системы, состоящей всего лишь из двух частиц с произвольными зарядами и массами.

7°. Излучение в вакууме быстро движущегося заряда q (скорость соизмерима со скоростью света c).

Вдали от заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ и ускорением $\mathbf{a}$, поле его излучения имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right] \times \mathbf{a}}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^3}, \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ — единичный вектор, проведенный в направлении излучения, причем все величины, входящие в правые части этих равенств, берутся в моменты времени $t' = t - \frac{R}{c}$.

Мгновенная мощность излучения в телесный угол $d\Omega$

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \left[\frac{a^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\mathbf{a})(\mathbf{v}\mathbf{a})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^5} - \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n}\mathbf{a})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^6} \right] d\Omega,$$

где $\beta = v/c$.

В случае, когда векторы скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{a}$ заряда параллельны,

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} d\Omega,$$

где θ — угол между направлением излучения $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$. Заряд не излучает в направлениях $\theta = 0, \pi$.

В случае, когда $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$,

$$dN = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \cos^2 \varphi \right] d\Omega,$$

где φ — угол между плоскостью, проходящей через векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, и плоскостью, проходящей через векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ (рис. V.2.2). Заряд не излучает в направлениях $\theta = \arccos \beta$, лежащих в плоскости векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ ($\varphi = 0$).

В ультрарелятивистском случае ($1 - \beta \ll 1$) заряженная частица в основном излучает в направлении своего движения (в пределах углов $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$).

8°. Излучение заряда, равномерно движущегося с произвольной скоростью по окружности в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$). Усредненная за период обращения мощность излучения в телесный

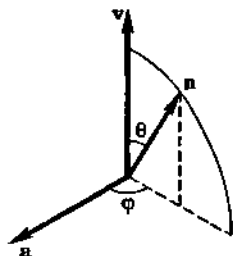


Рис. V.2.2

угол $d\Omega$ в направлении $\mathbf{n}$, составляющем угол α с нормалью к плоскости орбиты, равна

$$dN = \frac{q^4 H^2 v^2 (1 - \beta^2)}{8\pi m^2 c^5} \left[\frac{2 + \beta^2 \sin^2 \alpha}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} - \frac{(1 - \beta^2)(4 + \beta^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha}{4(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{7/2}} \right] d\Omega,$$

где m — масса заряженной частицы.

Полная мощность излучения:

$$N = \frac{2q^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 (1 - \beta^2)}.$$

Такое излучение наблюдается при движении заряженных частиц в циклических ускорителях и называется в случае релятивистских частиц *синхротронным* (магнито-тормозным) излучением, а в случае нерелятивистских частиц — *циклотронным* излучением.

При $1 - \beta \ll 1$ излучение в основном сосредоточено вблизи плоскости орбиты в интервале углов $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \Delta\alpha$,

где $\Delta\alpha \sim \sqrt{1 - \beta^2}$. Основная часть излучения приходится на область циклических частот

$$\omega = \frac{q\mu_0 H}{m} \frac{1}{1 - \beta^2},$$

и спектр излучения состоит из множества тесно расположенных линий.

9°. Излучение, возникающее при прохождении электрона в поле атома или ядра, называют *тормозным*. Тормозное излучение имеет непрерывный спектр, ограниченный максимальной частотой ν_0 , которая при

$\frac{v}{c} \ll 1$ равна

$$\nu_0 = \frac{mv^2}{2h},$$

где v — начальная скорость электрона, m — его масса, h — постоянная Планка.

10°. Излучение Вавилова—Черенкова. Согласно специальной теории относительности, скорость v движения электрона не может превосходить c — скорость света в вакууме: $\beta = \frac{v}{c} < 1$. При движении электрона (или другой заряженной частицы — протона, мезона и т.д.) в среде с показателем преломления n его скорость v может оказаться больше фазовой скорости света $\frac{c}{n}$ в данной среде, т.е. $\frac{c}{n} < v < c$. В этом случае наблюдается электромагнитное излучение, которое называется *излучением Вавилова—Черенкова*.

Излучение Вавилова—Черенкова аналогично ударным звуковым волнам, возникающим при движении тел со скоростями, превышающими фазовые скорости упругих волн в данной среде.

Глава 3

ПРОХОЖДЕНИЕ СВЕТА ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

1°. Согласно классической электронной теории вещество можно рассматривать как систему заряженных частиц. Переменное электромагнитное поле волны возбуждает вынужденные колебания этих частиц. В случае высокочастотных волн, соответствующих видимому свету и ультрафиолетовым лучам, вынужденные колебания со сколько-нибудь значительными амплитудами могут совершать только электроны. Значительно более массивные заряженные частицы (ядра атомов, ионы) совершают вынужденные колебания под действием более низкочастотного инфракрасного излучения.

2°. В изотропной среде сила Лоренца, действующая на заряд со стороны электромагнитного поля волны, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}_1}{v} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

где $\mathbf{v}_1$ — скорость заряда q , v — фазовая скорость волны, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, проведенный в направлении распространения волны. Так как $v_1 \ll v$, то второе слагаемое мало по сравнению с первым. Сила, действующая на заряженные частицы вещества, в основном определяется электрическим полем, т. е. вектором $\mathbf{E}$ электромагнитного поля волны. Поэтому $\mathbf{E}$ иногда называют *световым вектором*.

Если молекулы вещества электрически изотропны, то вынужденные колебания электронов в молекулах совершаются в направлении, совпадающем с направлением колебаний вектора $\mathbf{E}$ поля волны. Если молекулы анизотропны, то эти направления в общем случае различны.

Наиболее сильное воздействие на электроны оказывают световые волны, частоты которых близки к частотам квантовых переходов электронов в атомах или молекулах.

3°. В процессе вынужденных колебаний заряженных частиц в молекулах вещества периодически изменяются (с частотой ν падающего света) дипольные электрические моменты молекул. При этом молекулы излучают *вторичные электромагнитные волны* той же частоты ν . Средние расстояния между молекулами во много раз меньше протяженности одного пуга волн. Поэтому в оптически однородной среде вторичные волны, несмотря на хаотическое тепловое движение последних, когерентны как между собой, так и с первичной волной. При наложении эти волны интерферируют.

4°. В оптически однородной и изотропной среде в результате интерференции первичной и вторичной волн образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты.

В случае падения электромагнитной волны на границу раздела двух различных оптически однородных и изотропных сред в результате интерференции первичной и вторичных волн образуется *отраженная волна*,

распространяющаяся в той же среде, откуда пришла первичная волна, и *преломленная волна*, распространяющаяся во второй среде.

5°. В макроскопической теории Максвелла задача о взаимодействии электромагнитной волны с веществом сводится к решению уравнений Максвелла при определенных условиях на границе раздела сред, в которых распространяется волна. Электрические и магнитные свойства вещества, определяющие его поведение под действием световой волны, характеризуются относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , удельной проводимостью γ и относительной магнитной проницаемостью μ . Для всех веществ в области оптических частот электромагнитных волн можно считать, что $\mu = 1$, а фазовая скорость этих волн $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$.

2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА ДИЭЛЕКТРИКАМИ

1°. При падении световой волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков с разными значениями относительной диэлектрической проницаемости ϵ световая волна частично отражается и частично преломляется.

2°. Отношение скорости света c в вакууме к фазовой скорости света v в среде:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$$

называют *абсолютным показателем преломления* этой среды. Для любой среды, кроме вакуума, величина n зависит от частоты света и состояния среды (ее температуры, плотности и т. д.). Для разреженных сред (например, газов при нормальных условиях) $n \approx 1$. В анизотропных средах абсолютный показатель преломления зависит также от направления распространения света и характера его поляризации. Для характеристики поглощающих сред вводят *комплексный показатель преломления*.

Относительным показателем преломления n_{21} второй среды относительно первой называют отношение фазовых скоростей света v_1 и v_2 , соответственно, в первой и второй средах:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред. Если $n_{21} > 1$, то вторую среду называют *оптически более плотной*, чем первую.

3°. Нижеприводимые формулы справедливы только для монохроматических волн, длины λ которых во много раз больше межмолекулярных расстояний в среде. Для волн оптического диапазона это условие выполняется даже в случае не слишком сильно разреженных газов. Кроме того, предполагается, что среды однородны, изотропны и не поглощают свет. Наконец, среды, в которых распространяются отраженная и преломленная волны, считаются полубесконечными, т. е. принимается, что на границе раздела сходятся только три волны — падающая, отраженная и преломленная (пренебрегается многократным отражением).

4°. При падении световой волны на идеально плоскую границу раздела двух диэлектриков, размеры которой значительно превышают длину волны, угол между направлением распространения отраженной волны и нормалью к границе раздела i' (*угол отражения*) равен соответствующему углу для падающей волны i (*закон отражения*). Такое отражение называют *зеркальным*. Угол между направлением распространения преломленной волны и нормалью к границе раздела (*угол преломления* r) связан с углом падения i *законом Снеллуса (законом преломления)*:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления среды, в которой распространяется преломленный свет, относительной среды, в которой распространяется падающий свет.

5°. Если световая волна из оптически более плотной среды 1 падает на границу раздела с оптически менее

плотной средой 2 ($n_{21} < 1$), т.б. при углах падения $i > i_{\text{пр}}$, где $\sin i_{\text{пр}} = n_{21}$, преломленная волна отсутствует, и свет полностью отражается от оптически менее плотной среды. Это явление называют *полным внутренним отражением*. Угол $i_{\text{пр}}$ называют *предельным (критическим) углом полного внутреннего отражения*. При полном внутреннем отражении электромагнитное поле световой волны частично заходит во вторую среду. Однако амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поля во второй среде очень быстро убывают (по экспоненциальному закону) по мере удаления от поверхности раздела. Глубина проникновения сколько-нибудь заметного поля во вторую среду имеет величину порядка длины волны света. Поток энергии из первой среды во вторую в среднем равен нулю, так что энергия падающей электромагнитной волны полностью возвращается в первую среду.

6°. Величину R , равную отношению интенсивностей отраженной и падающей волн, называют *коэффициентом отражения*. Величину T , равную отношению интенсивностей преломленной и падающей волн, называют *коэффициентом пропускания*. Для отражения и преломления света на границе раздела двух прозрачных сред (не поглощающих свет) $R + T = 1$. В случае полного внутреннего отражения $R = 1$ и $T = 0$.

7°. При падении под углом i на плоскую границу раздела двух сред плоской неполяризованной (естественный свет) световой волны коэффициент отражения

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)} \right],$$

где r — угол преломления. Если $n_{21} < 1$, то предполагается, что $i < i_{\text{пр}}$. В случае $i = r = 0$ (нормальное падение света)

$$R = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2,$$

где n_{21} — относительный показатель преломления.

8°. При падении на плоскую границу раздела линейно-поляризованной плоской волны вектор $\mathbf{E}$ которой колеблется в плоскости падения (p -волна), амплитуды векторов $\mathbf{E}$ в отраженной (a_p^r) и преломленной (a_p^d) вол-

нах связаны с амплитудой вектора $\mathbf{E}$ в падающей волне (a_p^0) соотношениями (формулы Френеля для p -волны):

$$a_p^r = -a_p^0 \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)}, \quad a_p^d = a_p^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}.$$

Если $n_{21} < 1$, то предполагается, что $i < i_{\text{пр}}$.

В этих формулах a_p^r — величина алгебраическая в отличие от a_p^0 и a_p^d , которые всегда положительны. Если $a_p^r > 0$, то отражение происходит без изменения фазы колебаний вектора $\mathbf{E}$ (соответственно фаза вектора $\mathbf{H}$ изменяется на π); если $a_p^r < 0$, то при отражении фаза вектора $\mathbf{E}$ изменяется на π (соответственно фаза вектора $\mathbf{H}$ сохраняется).

Коэффициент отражения для p -волны:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}.$$

9°. При падении на границу раздела линейно поляризованной плоской волны, в которой вектор $\mathbf{E}$ колеблется в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения (s -волна), амплитуды a_s^r , a_s^d и a_s^0 связаны соотношениями (формулы Френеля для s -волны):

$$a_s^r = -a_s^0 \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad a_s^d = a_s^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}.$$

Если $n_{21} < 1$, то предполагается, что $i < i_{\text{пр}}$.

В этих формулах a_s^r — величина алгебраическая в отличие от a_s^d и a_s^0 , которые всегда положительны. Если $a_s^r < 0$, то при отражении происходит изменение фазы колебаний вектора $\mathbf{E}$ на π (соответственно фаза вектора $\mathbf{H}$ сохраняется); если $a_s^r > 0$, то при отражении фаза вектора $\mathbf{E}$ сохраняется (соответственно фаза вектора $\mathbf{H}$ изменяется на π).

Коэффициент отражения для s -волны:

$$R_s = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}.$$

Зависимости R_p , R_s и $R = \frac{1}{2}(R_p + R_s)$ от i для $n_{21} = 1,52$ (воздух—стекло) приведены на рис. V.3.1.

10°. В случае нормального падения ($i = r = 0$) p - и s -волн на границу раздела двух сред

$$a_p^r = -a_p^0 \frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}, \quad a_s^r = -a_s^0 \frac{n_{21}-1}{n_{21}+1},$$

$$a_p^r = a_p^0 \frac{2}{n_{21}+1}, \quad a_s^r = a_s^0 \frac{2}{n_{21}+1},$$

$$R_p = R_s = \left(\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1} \right)^2.$$

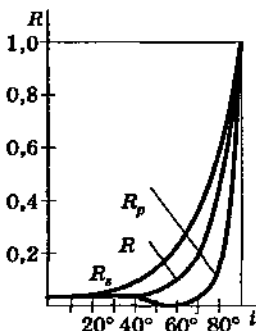


Рис. V.3.1

11°. Фаза преломленной световой волны всегда совпадает с фазой падающей волны: на границе раздела векторы E^0 и E^d колеблются в одной фазе. Фаза отраженной волны может отличаться на π от фазы падающей волны. В этом случае происходит отражение с потерей полу волны. В таблице V.2 указана разность фаз между отраженной и падающей волнами для p - и s -волн.

Таблица V.2

	$i + r > \frac{\pi}{2}$		$i + r < \frac{\pi}{2}$	
	$i > r$ ($n_{21} > 1$)	$i < r$ ($n_{21} < 1$)	$i > r$ ($n_{21} > 1$)	$i < r$ ($n_{21} < 1$)
p -волна	0	π	π	0
s -волна	π	0	π	0

При переходе $i + r$ через значение $\frac{\pi}{2}$ (т. е. угла падения i — через значение i_0 , для которого $i_0 + r_0 = \frac{\pi}{2}$; угол i_0

называют *углом Брюстера*) фаза отраженной p -волны скачком меняется на π .

Обычно $i < i_0$, т. е. $i + r \cdot \frac{\pi}{2}$. В этих случаях, как видно из табл. V.3.1, независимо от характера поляризации падающего света отражение от оптически менее плотной среды ($n_{21} < 1$) происходит без изменения фазы волны, а при отражении от оптически более плотной среды ($n_{21} > 1$) — с изменением фазы на π (с потерей полуволны).

12°. В случае полного внутреннего отражения ($n_{21} < 1$ и $i \geq i_{\text{пр}}$) отраженные p - и s -волны отстают по фазе от падающих p - и s -волн соответственно на $\Delta\varphi_p$ и $\Delta\varphi_s$, причем

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos i}$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\cos i} = n_{21}^2 \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p}{2}.$$

Разность $\Delta\varphi_s - \Delta\varphi_p$ равна нулю только в двух предельных случаях: а) $i = i_{\text{пр}}$ ($\Delta\varphi_p = \Delta\varphi_s = 0$); б) $i = \frac{\pi}{2}$ ($\Delta\varphi_p = \Delta\varphi_s = \pi$).

13°. Для уменьшения коэффициента отражения в оптических системах, где многократные отражения света существенно снижают интенсивность проходящего света и освещенность изображения, используют интерференцию лучей, отраженных от передней и задней границ специального слоя, наносимого на линзы оптической системы. Толщина h и абсолютный показатель преломления n этого слоя подбираются так, чтобы оба отраженных луча имели оптическую разность хода $\frac{\lambda}{2}$ (разность фаз π) и гасили друг друга:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2}.$$

Величину n при равных интенсивностях обоих отраженных лучей находят из соотношения (при нормальном падении из воздуха)

$$n = \sqrt{n_0},$$

где n_0 — абсолютный показатель преломления материала линзы. Оптику с такими слоями называют *просветленной*.

14°. *Диффузным (рассеянным) отражением* света называют отражение света во всевозможных направлениях. Оно наблюдается, например, при отражении света от шероховатой поверхности раздела двух сред. Поверхность называют *абсолютно матовой*, если она отражает свет равномерно по всем направлениям.

15°. *Рефракцией света* называют искривление световых лучей вследствие преломления в оптически неоднородной среде с непрерывно изменяющимся от точки к точке показателем преломления. Примером рефракции света служит *астрономическая рефракция* — искривление лучей света от небесных тел при прохождении сквозь атмосферу Земли, обусловленное уменьшением плотности атмосферы (а следовательно, также ее относительной диэлектрической проницаемости и абсолютного показателя преломления) по мере удаления от поверхности Земли. Вследствие астрономической рефракции кажущееся направление на какую-либо звезду составляет с нормалью к поверхности Земли в точке наблюдения несколько меньший угол, чем истинное направление на эту звезду. Искривление лучей света от удаленных земных источников, происходящее в слое атмосферы, прилегающем к поверхности Земли, называют *земной рефракцией*. При некоторых условиях в результате земной рефракции возникают *миражи* — ложные изображения удаленных объектов.

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА ПРИ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ

1°. При произвольном угле падения i (кроме $i = 0$ или $\frac{\pi}{2}$) коэффициенты отражения от границы раздела двух изотропных диэлектриков различны для p - и s -волн: $R_s \neq R_p$. Поэтому, если падающая волна не поляризована (естественный свет), то отраженная и прелом-

ленная волны частично линейно поляризованы. В отраженной волне преобладают колебания вектора E , перпендикулярные к плоскости падения (s -поляризация). В случае отсутствия поглощения степени линейной поляризации обеих волн соответственно равны:

$$\Delta^r = \frac{I_s^r - I_p^r}{I_s^r + I_p^r} = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}, \quad \Delta^d = \frac{I_p^d - I_s^d}{I_p^d + I_s^d} = \frac{R_s - R_p}{2 - (R_s + R_p)},$$

где I_s^r и I_s^d — интенсивности отраженной и преломленной s -волн, а I_p^r и I_p^d — то же самое для p -волн.

2°. Если угол падения удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21},$$

то $R_p = 0$, и отраженный свет полностью поляризован в плоскости падения (закон Брюстера, угол i_0 — угол Брюстера. Если $i_0 + r_0 = \frac{\pi}{2}$, т. е. отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, то коэффициент отражения

$$R_s = \sin^2(i_0 - r_0) = \left(\frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2,$$

и степень поляризации преломленного света достигает максимального значения:

$$\Delta_{\text{макс}}^d = \frac{(n_{21}^2 + 1)^2 - 4n_{21}^2}{(n_{21}^2 + 1)^2 + 4n_{21}^2}.$$

3°. Степень линейной поляризации Δ проходящего света может быть значительно повышена путем многократного отражения и преломления в стопе плоскопараллельных пластин, установленных так, что угол падения света равен i_0 . В отсутствие поглощения для стопы, состоящей из N пластин,

$$\Delta = \frac{1 - (1 - R_s)^{2N}}{1 + (1 - R_s)^{2N}}, \quad \text{где } R_s = \left(\frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2.$$

Так, например, для стопы стеклянных пластин ($n_{21} = 1,5$) при $N = 15$ степень линейной поляризации $\Delta = 0,985$.

4°. Поляризованная p -волна при падении на границу раздела диэлектриков под углом Брюстера совершенно не отражается и дает только преломленную волну.

5°. При полном внутреннем отражении плоскополяризованного света ($n_{21} < 1$ и $i \geq i_{\text{пр}}$) между s - и p -компонентами отраженной волны возникает разность фаз $\Delta\varphi$, обусловленная различием разностей фаз соответствующих компонент отраженной и падающей волн $\Delta\varphi_s$ и $\Delta\varphi_p$:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s}{2} = \frac{\cos i \sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\sin^2 i}.$$

В результате отраженная волна оказывается эллиптически поляризованной. При полном внутреннем отражении, соответствующем углу $i_{\text{пр}}$, $\sin i = n_{21}$, $\Delta\varphi_p = \Delta\varphi_s$, т. е. плоскополяризованный свет остается таким же. При $\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s = \frac{\pi}{2}$ и $a_s^0 = a_p^0$ отраженный свет циркулярно поляризован, и граница раздела диэлектриков действует подобно «пластинке в четверть волны».

4. ОСНОВЫ МЕТАЛЛООПТИКИ

1°. Электромагнитная волна, падающая на поверхность металла, частично отражается, а частично проходит внутрь металла. Коэффициент отражения зависит от частоты волны, электропроводности металла и состояния его поверхности.

В случае волн не слишком высокой частоты (радиоволны, инфракрасные лучи и видимый свет) источниками вторичных волн в металлах, в основном, являются электроны проводимости. При этом коэффициент отражения от чистых поверхностей металлов, обладающих хорошей проводимостью (натрий, серебро и т. д.), весьма близок к 1. Интенсивность волны, проходящей внутрь металла, невелика и быстро убывает до нуля в пределах тонкого поверхностного слоя вследствие потерь энергии на теплоту. Для идеального проводника эти потери равны нулю, и коэффициент отражения равен 1.

При более высоких частотах, соответствующих ультрафиолетовому излучению, существенную роль играют вынужденные колебания связанных электронов в ионах кристаллической решетки. Это приводит к сильному уменьшению коэффициента отражения света металлами (до 0,04 у серебра при $\nu = 10^{15}$ Гц) и появлению значительной прозрачности тонких металлических пленок.

2°. В классической макроскопической электродинамике задача об отражении и преломлении света на поверхности металла сводится к нахождению решения уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям на проводящей поверхности. Эта задача для однородных, изотропных и немагнитных металлов ($\mu = 1$) может быть формально сведена к аналогичной задаче для границы раздела двух прозрачных диэлектриков путем введения комплексной относительной диэлектрической проницаемости металла:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0\nu} i,$$

где γ — удельная электропроводность металла, ϵ — его вещественная относительная диэлектрическая проницаемость, ϵ_0 — электрическая постоянная, ν — частота света и $i = \sqrt{-1}$.

3°. Оптические свойства металла характеризуются комплексным абсолютным показателем преломления:

$$\tilde{n} = \sqrt{\bar{\epsilon}} = n - ik,$$

где

$$n^2 - k^2 = \bar{\epsilon} \text{ и } nk = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0\nu}.$$

Действительные величины n и k являются оптическими характеристиками металла. Они зависят от природы металла и частоты падающего света. Мнимая часть комплексного показателя преломления характеризует поглощение света в металле, происходящее в соответствии с законом Бугера—Ламберта. Она связана с линейным коэффициентом поглощения α соотношением

$$k = \frac{c}{4\pi\nu} \alpha = \frac{\lambda_0}{4\pi} \alpha,$$

где c и λ_0 — скорость и длина волны в вакууме. Это соотношение, а также понятия комплексных диэлектрической проницаемости и показателя преломления в равной мере применимы не только к металлам, но и к любым другим проводящим и непроводящим средам, сильно поглощающим свет (например, к плазме, к диэлектрикам вблизи полос поглощения и т. д.). Для типичных металлов $\kappa \gg 1$, поэтому поглощение какой-либо среды называют «металлическим», если для этой среды $\kappa \gg 1$.

4°. Расчет комплексных амплитуд, отраженных и преломленных s - и p -волн можно производить по формулам Френеля, где угол r комплексный (за исключением случая $i = 0$) и связан с углом падения i соотношением

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \bar{n}.$$

Истинный угол r_n преломления света в металле равен

$$r_n = \arcsin \left(\frac{\sin i}{n_n} \right),$$

где

$$n_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n^2 - \kappa^2 + \sin^2 i + \sqrt{(n^2 - \kappa^2 - \sin^2 i)^2 + 4n^2\kappa^2}}.$$

Показатель преломления n_n зависит от угла падения, т. е. в поглощающей среде фазовая скорость света зависит от направления его распространения.

5°. Для произвольного угла падения коэффициенты отражения s - и p -волн от поверхности металла равны:

$$R_s = \frac{|a_s^r|^2}{(a_s^0)^2} = \frac{(a - \cos i)^2 + b^2}{(a + \cos i)^2 + b^2},$$

$$R_p = \frac{|a_p^r|^2}{(a_p^0)^2} = \frac{(a - \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2}{(a + \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2} R_s,$$

где $a = \sqrt{n_n^2 - \sin^2 i}$, $b = \sqrt{n_n^2 - n^2(1 - \kappa^2)}$, $|a_s^r|$ и $|a_p^r|$ — модули комплексных амплитуд отраженных s - и p -волн.

Во всех случаях, кроме $i = 0$ и $i = \frac{\pi}{2}$, $R_s > R_p$, причем для металлов, в отличие от прозрачных диэлектриков, ни

при одном угле падения $R_p \neq 0$. Следовательно, при падении на металл естественного света отраженный свет никогда не может быть полностью линейно поляризован.

В случае нормального падения света $R_s = R_p$, $a = n$, $b = \kappa$, и коэффициент отражения

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}.$$

6°. При отражении от металла возникает сдвиг по фазе между отраженной и падающей волнами. Этот сдвиг неодинаков для s - и p -волн:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r &= \frac{2b \cos i}{\cos^2 i - (a^2 + b^2)}, \\ \operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r &= \frac{2b \cos i (a^2 + b^2 - \sin^2 i)}{a^2 + b^2 - (n^2 + \kappa^2)^2 \cos^2 i}, \end{aligned}$$

где a и b имеют тот же смысл, что в п. 5°.

При падении на металл плоскополяризованной волны между s - и p -компонентами отраженной волны возникает сдвиг по фазе $\Delta\varphi^r = \Delta\varphi_s^r - \Delta\varphi_p^r$, причем

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi^r = \frac{2b \sin i \operatorname{tg} i}{a^2 + b^2 - \sin^2 i \operatorname{tg}^2 i}.$$

Поэтому при $i \neq 0$ отраженный свет эллиптически поляризован. В случае нормального падения ($i = 0$)

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r = \operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r = \frac{2\kappa}{1 - (n^2 + \kappa^2)} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi^r = 0.$$

Глава 4

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

1. КОГЕРЕНТНЫЕ ВОЛНЫ

1°. Два волновых процесса называют *когерентными*, если они согласованно протекают в пространстве и времени. Две монохроматические волны полностью когерентны, если равны их частоты. Монохроматические волны различных частот, а также волны, состоящие из

ряда групп — *цугов волн*, начинающихся и обрывающихся независимо друг от друга со случайными значениями фаз в моменты начала и обрыва каждой группы, являются некогерентными.

Действие света на глаз, фотоэлемент, фотопленку, флуоресцирующий экран и др. регистрирующие свет устройства определяется вектором E электрической напряженности электромагнитного поля световой волны. Поэтому всюду дальше под амплитудой A световой волны понимается амплитуда вектора E , а под интенсивностью волны понимается величина $I = A^2$.

2°. При наложении двух одинаково линейно поляризованных монохроматических волн, в которых векторы E_1 и E_2 колеблются вдоль одного и того же направления, амплитуда A результирующей волны связана с амплитудами a_1 и a_2 и фазами Φ_1 и Φ_2 суперпозируемых волн в рассматриваемой точке волнового поля соотношением

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\Phi_1 - \Phi_2).$$

В случае наложения волн с различными частотами ν_1 и ν_2 амплитуда A — периодическая функция времени

с периодом $T = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|}$. Если продолжительность наблюдения $\tau \gg T$, то в эксперименте, регистрирующем среднее значение квадрата амплитуды результирующей волны: $\langle A^2 \rangle = a_1^2 + a_2^2$. Следовательно, при наложении некогерентных волн наблюдается суммирование их интенсивностей: $I = I_1 + I_2$.

3°. В случае наложения когерентных волн, линейно поляризованных в одной плоскости, $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_1 - \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — начальные фазы суперпозируемых волн в рассматриваемой точке поля. Амплитуда A результирующей волны не зависит от времени и изменяется от точки к точке поля в зависимости от значения $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: $A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$, где

$$A_{\max} = a_1 + a_2 \quad \text{при} \quad \Delta\varphi = 2m\pi,$$

$$A_{\min} = |a_1 - a_2| \quad \text{при} \quad \Delta\varphi = (2m + 1)\pi,$$

$$(m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Максимальная и минимальная интенсивности результирующей волны соответственно равны:

$$I_{\text{макс}} \sim (a_1 + a_2)^2 \text{ и } I_{\text{мин}} \sim (a_1 - a_2)^2.$$

Если $a_1 = a_2$, то $I_{\text{мин}} = 0$, и $I_{\text{макс}} = 4I_1 = 4I_2$, т. е. $I_{\text{макс}}$ вдвое превосходит сумму интенсивностей суперпозируемых когерентных волн.

4°. В результате наложения когерентных световых волн, имеющих одинаково направленные колебания вектора E напряженности электромагнитного поля, происходит устойчивое во времени усиление интенсивности света в одних точках поля и ослабление в других в зависимости от соотношения фаз складываемых световых волн. Это явление называют *интерференцией света*. Результат наложения когерентных волн, наблюдаемый на экране, фотопластинке и т. д., называют *интерференционной картиной*. При наложении некогерентных волн имеет место только пространственно равномерное усиление света, т. е. интерференция не наблюдается.

5°. В обычных источниках света используется спонтанное излучение возбужденных атомов (молекул, ионов) источника света. При этом каждый атом излучает свет в течение очень короткого промежутка времени ($\tau_{\text{изл}} \approx 10^{-8}$ с), т. е. излучает пуч волн, протяженность которого в вакууме порядка 1 м. Пуч волн представляет собой немонохроматическую волну, спектр частот которой простирается от $\nu - \frac{\Delta\nu}{2}$ до $\nu + \frac{\Delta\nu}{2}$, где $\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_{\text{изл}}}$.

Временем когерентности такой немонохроматической волны называют величину

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

За этот промежуток времени разность фаз волн с частотами ν и $\nu \pm \frac{\Delta\nu}{2}$ изменяется на π , так что взаимное усиление этих волн сменяется их взаимным ослаблением. *Длиной когерентности немонохроматической волны* называют величину

$$l_{\text{ког}} = \nu \tau_{\text{ког}},$$

где ν — скорость света в среде; $l_{\text{ког}} \sim l_{\text{пуча}} = \nu \tau_{\text{изл}}$.

При спонтанном излучении атомы источника испускают электромагнитные волны независимо друг от друга со случайными значениями начальных фаз. Поэтому за время τ наблюдения в оптических опытах ($\tau \gg 10^{-8}$ с) волны, спонтанно излучаемые атомами (молекулами) любого источника света, некогерентны и при наложении не интерferируют.

Наряду со спонтанным излучением возможен другой тип излучения — индуцированное (вынужденное) излучение, возникающее под действием переменного внешнего электромагнитного поля. Индуцированное излучение когерентно с возбуждающим его монохроматическим излучением. Оно обладает той же частотой, направлением распространения и поляризацией, а время когерентности этого излучения может быть на несколько порядков больше, чем 10^{-8} с. Например, в случае излучения одночастотных лазеров непрерывного действия $\tau_{\text{ког}} \sim 0,1$ с, а $l_{\text{ког}} \sim 10^4$ км.

6°. Для получения когерентных световых волн и наблюдения их интерференции с помощью обычных источников спонтанного излучения применяют метод расщепления волн, излучаемых одним источником света, на две или большее число систем волн, которые после прохождения различных путей накладываются друг на друга. В каждой двух таких системах волн имеются попарно когерентные между собой и одинаково поляризованные пути, соответствующие одним и тем же актам излучения атомов источника. Результат интерференции указанных систем волн зависит от разности фаз, приобретаемой когерентными путями волн вследствие прохождения ими различных расстояний от источника до рассматриваемой точки интерференционной картины. Для получения четкой интерференционной картины необходимо, чтобы разность этих расстояний $\Delta s = d_2 - d_1$, называемая *разностью хода волн*, была достаточно мала: $\Delta s \ll l_{\text{ког}}$.

7°. На рис. V.4.1 изображена принципиальная схема интерференционных установок, в которых свет от источника S с линейным размером $2b$, малым по сравнению с длиной волны ($2b \ll \lambda$), расщепляется на две системы когерентных волн с помощью зеркал, призм и т. д. Здесь S_1 и S_2 — источники когерентных волн (действительные или мнимые изображения источника S в

оптической системе установки), 2ψ — *апертура интерференции*, т. е. угол в точке S между крайними лучами, которые после прохождения через оптическую систему сходятся в точке M — центре интерференционной картины на экране EE , 2ω — *угол схождения лучей* в точке M .

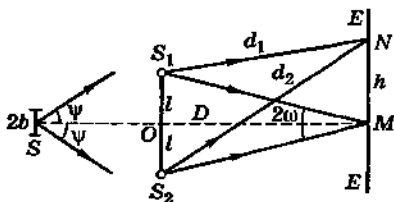


Рис. V.4.1

8°. Обычно S имеет вид щели, параллельной плоскости симметрии оптической системы. При $EE \parallel S_1S_2$ интерференционная картина представляет собой полосы, параллельные щели.

В обозначениях $S_1S_2 = 2l$, $OM = D \left(\frac{l}{D} = \tan \omega \approx \omega \ll 1 \right)$,

$MN = h$ распределение интенсивностей в интерференционной картине для монохроматического света с длиной волны λ , при $2b \ll \lambda$, $h \ll D$, и равенстве амплитуд колебаний когерентных источников волн S_1 и S_2 , имеет вид

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi l}{\lambda D} h \right),$$

где I_0 — интенсивность в точке M (при $h = 0$).

Интенсивность имеет максимумы, если

$$h = m \frac{\lambda D}{2l},$$

и минимумы, если

$$h = (2m + 1) \frac{\lambda D}{4l},$$

где $|m| = 0, 1, 2, \dots$ — *порядок интерференции*.

Расстояние между соседними максимумами или минимумами ($\Delta m = 1$) равно

$$B = \frac{\lambda D}{2l} \approx \frac{\lambda}{2\omega}.$$

Величину B называют *шириной интерференционной полосы*. Интерференционная картина тем крупнее, чем меньше $\omega = l/D$. Угловая ширина полос интерференции равна

$$\beta = \frac{B}{D} = \frac{\lambda}{2l}.$$

9°. Мерой контрастности интерференционной картины служит *видность полос*, определяемая по формуле

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ — интенсивности света в интерференционных максимумах и минимумах. При интерференции когерентных волн, имеющих равные амплитуды, видность полос максимальна и равна 1.

Если волны когерентны, но их амплитуды a_1 и a_2 различны, то видность интерференционных полос

$$V = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

10°. Обычно на практике размеры источника света $2b \gg \lambda$. В этом случае происходит наложение сдвинутых друг относительно друга интерференционных картин от множества пар когерентных источников света. Результирующая интерференционная картина остается еще достаточно отчетливой при выполнении приближенного условия:

$$2b \sin \Psi \leq \frac{\lambda}{4},$$

где 2Ψ — апертура интерференции.

Видность полос

$$V = \frac{B}{2\pi b} \left| \sin \frac{2\pi b}{B} \right|,$$

где B — ширина интерференционной полосы. Зависимость V от $\frac{2b}{B}$ показана

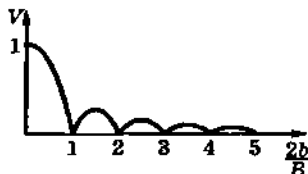


Рис. V.4.2

на рис. V.4.2.

11°. В случае интерференции частично когерентных волн, интенсивности которых равны I_1 и I_2 видность полос

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma,$$

где γ — степень когерентности интерферирующих волн. При этом считается, что γI_i — интенсивность когерентной составляющей i -й волны, участвующей в интерференции, а $(1 - \gamma)I_i$ — интенсивность некогерентной составляющей i -й волны, не участвующей в интерференции и вызывающей равномерное освещение интерференционной картины.

В схеме наблюдения интерференции света, рассмотренной в п. 7° и показанной на рис. V.4.1, степень когерентности интерферирующих волн связана с временной когерентностью источника S и убывает с увеличением порядка интерференции, а при $d_2 - d_1 \geq c\tau_{\text{ког}}$, $\gamma = 0$.

12°. Интерференционная картина в немонохроматическом свете, длины волн которого лежат в интервале от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, полностью смазываются, когда с интерференционными максимумами m -го порядка для излучения с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ совпадают максимумы $(m + 1)$ -го порядка для излучения с длиной волны λ :

$$(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Для наблюдения интерференции порядка m должно выполняться условие

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

Чем больше порядок интерференции m , который необходимо наблюдать, тем монохроматичнее должен быть свет. Даже для света с линейчатым спектром $\Delta\lambda$ не может быть меньше *естественной ширины* спектральной линии $\Delta\lambda_{\text{ест}}$. Обычно из-за доплеровского и ударного уширения $\Delta\lambda \gg \Delta\lambda_{\text{ест}}$.

2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

1°. *Оптической длиной пути* s в однородной среде называют произведение *геометрической длины пути* d световой волны в данной среде на абсолютный показатель преломления этой среды n :

$$s = nd.$$

Если оптические длины пути двух волн равны ($s_1 = s_2$), то такие пути называют *таутохронными* (не вносящими разности фаз). В оптических системах, дающих *стигматические изображения источника света*, условию таутохронности удовлетворяют все пути лучей,

выходящих из одной и той же точки источника и собирающихся в соответствующей ей точке изображения.

2°. Разность фаз $\Delta\varphi$ двух когерентных волн от одного источника, одна из которых проходит длину пути d_1 в среде с абсолютным показателем преломления n_1 , а другая — длину пути d_2 в среде с абсолютным показателем преломления n_2 , равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s,$$

где $\Delta s = s_2 - s_1 = n_2 d_2 - n_1 d_1$ — оптическая разность хода.

3°. При $\Delta s = \frac{\lambda}{2}$ разность фаз $\Delta\varphi = \pi$; удлинению (или укорочению) оптической длины пути одной из волн относительно другой на $\frac{\lambda}{2}$ соответствует запаздывание (или опережение) первой волны на π . При суперпозиции таких двух волн их амплитуды вычитаются друг из друга, и в случае равенства амплитуд обеих волн амплитуда результирующей волны равна нулю.

Наблюдение интерференции возможно лишь при не слишком больших разностях хода Δs . Если $\Delta s \geq \tau c$ (τ — средняя продолжительность одного акта излучения света атомом источника, c — скорость света в вакууме, а τc — средняя протяженность цуга волн в вакууме), то накладывающиеся волны некогерентны и не интерферируют.

Условие наблюдения интерференции при оптической разности хода Δs ($\Delta s \ll \tau c$):

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda^2}{\Delta s},$$

т. е. для осуществления интерференции при больших значениях Δs необходима сильная монохроматизация света.

4°. Если на тонкую плоскопараллельную прозрачную для света пленку падает под углом i плоская монохроматическая световая волна (рис. V.4.3), то в результате отражения света от верхней и нижней поверхностей пленки можно наблюдать интерференцию, как в отраженном, так и в проходящем свете.

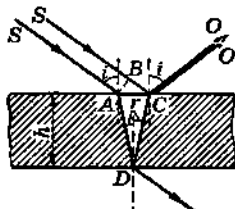


Рис V.4.3

Для пленки, находящейся в вакууме, оптическая разность хода интерферирующих волн в отраженном свете равна

$$\Delta s = n(AD + DC) - (BC) + \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta s = 2hn \cos r + \frac{\lambda}{2},$$

где h — толщина пленки, n — ее абсолютный показатель преломления, r — угол преломления. Дополнительная разность хода $\frac{\lambda}{2}$ связана с отражением света от верхней

поверхности пластинки (оптически более плотной среды), т. е. с изменением при отражении фазы волны на π .

Условия максимумов и минимумов для интерференционной картины, образуемой когерентными волнами, отраженными от обеих поверхностей пластинки:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{k\lambda}{2}.$$

Здесь $k = 2m$, где m — целое число, для минимумов и $k = 2m + 1$ для максимумов. Если отражение от обеих поверхностей пленки происходит с потерями $\frac{\lambda}{2}$ (или без

них), то интерференционная картина смещается на полполосы, т. е. значения $k = 2m$ соответствуют интерференционным максимумам, а $k = (2m + 1)$ — минимумам.

В проходящем через пленку свете всегда наблюдается дополнительная картина: максимумам отражения соответствуют минимумы интенсивности проходящего света и наоборот.

При освещении плоскопараллельной пленки параллельным пучком лучей белого света пленка приобретает в отраженном свете цветную окраску. В соответствии с условием п.3° интерференцию в белом свете можно наблюдать лишь на очень тонких пленках.

5°. Если параллельный пучок лучей монохроматического света падает нормально на пленку, толщина h которой неодинакова в разных местах, то в отраженном свете вблизи верхней поверхности пленки видны темные и светлые интерференционные полосы. Эти полосы называют *полосами равной толщины*, так как каждая из них проходит через точки с одинаковыми значения-

ми h . Полосы равной толщины, локализованные вблизи поверхности пленки, можно наблюдать также и на экране, если на него спроецировать верхнюю поверхность пленки с помощью собирающей линзы. В белом свете наблюдается система цветных интерференционных полос равной толщины.

При интерференции на прозрачном клине полосы равной толщины параллельны ребру клина. Ширина интерференционных полос при угле падения $i = 0$

$$B = \frac{\lambda}{2n\alpha},$$

где α — угол при вершине клина ($\alpha \ll 1$ рад), n — абсолютный показатель преломления вещества клина.

В случае протяженного источника света интерференционная картина наблюдается только от той части клина, вблизи его вершины, для которой $2hi\psi \ll \lambda$, где i — угол падения, ψ — угол, под которым виден протяженный источник из точки клина, соответствующий данному h .

6°. При интерференции света в воздушном зазоре между плоским черным зеркалом и плотно прижатой к нему плоско-выпуклой линзой (рис. V.4.4, свет падает нормально на плоскую поверхность линзы, параллельную плоскости черного зеркала) наблюдается система полос равной толщины воздушного зазора, имеющих вид концентрических колец (кольца Ньютона). Центры колец совпадают с точкой соприкосновения линзы и зеркала. В отраженном монохроматическом свете радиусы светлых и темных колец равны

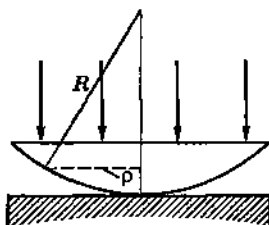


Рис. V.4.4

$$\rho_{\text{светл}} = \sqrt{(2m+1)R\frac{\lambda}{2}} \quad \text{и} \quad \rho_{\text{темн}} = \sqrt{mR\lambda},$$

где R — радиус кривизны нижней поверхности линзы, λ — длина волны света в вакууме (воздухе), $m = 0, 1, 2, \dots$. В центре интерференционной картины находится темное пятно.

В белом свете различным длинам волн λ соответствуют разные ρ , и получается система цветных колец со значительным наложением одних цветов на другие; при больших m интерференционная картина неразличима для глаза.

7°. При освещении плоскопараллельной пластинки монохроматическим сходящимся или расходящимся пучком света каждому значению угла падения i соответствует свое значение оптической разности хода Δs . Интерференционная картина наблюдается в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути света, отраженного пластинкой. Интерференционная картина имеет вид чередующихся темных и светлых полос. Каждая из этих полос соответствует определенному значению угла падения i , поэтому их называют *полосами равного наклона*. Полосы равного наклона локализованы в бесконечности. При освещении плоскопараллельной пластинки белым светом полосы равного наклона различно расположены в зависимости от λ и являются цветными. По мере возрастания порядка интерференции m картина смазывается.

3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МНОГИХ ВОЛН

1°. Для осуществления интерференции многих световых волн с близкими по величине или равными амплитудами применяют специальные интерференционные приборы — *дифракционные решетки*.

В случае интерференции N когерентных волн с одинаковыми амплитудами A_0 и одинаковыми сдвигами по фазе $\Delta\varphi_0$ между i -й и $(i-1)$ -й волнами ($\Delta\varphi_0$ не зависит от i) амплитуда A и интенсивность I результирующей волны равны

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right|, \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}},$$

где $I_0 = A_0^2$ — интенсивность каждой из интерферирующих волн.

Значения $\Delta\varphi_0 = \pm 2\pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) соответствуют *главным максимумам* (m — порядок главного максимума): $A_{\max} = NA_0$. Интенсивность главного максимума пропорциональна квадрату числа интерферирующих волн: $I_{\max} = N^2 I_0$.

Значения $\Delta\varphi_0 = \pm 2\pi \frac{p}{N}$, где p принимает любые целые

положительные значения, кроме 0, N , $2N$ и т. д., соответствуют *интерференционным минимумам*: $A_{\min} = 0$. Между каждой парой соседних минимумов находится один максимум (либо главный, либо значительно более слабый *побочный максимум*).

«Ширина» главного

максимума тем меньше,

чем больше N : $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{N}$.

При больших значениях N интенсивности побочных максимумов очень малы, и интерференционная картина в монохроматическом

свете имеет вид узких и ярких максимумов, разделенных широкими темными промежутками. На рис. V.4.5 пока-

зана зависимость отношения $\frac{I}{I_0}$ от $\Delta\varphi_0$ при $N = 8$.

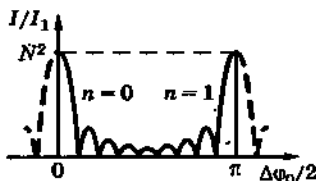


Рис. V.4.5

2°. Если число N интерферирующих когерентных волн неограниченно увеличивать, соответственно уменьшая A_0 и $\Delta\varphi_0$ так, чтобы NA_0 и $N\Delta\varphi_0$ оставались постоянными и равными, соответственно, A_0 и $\Delta\varphi_0$, то в пределе ($N \rightarrow \infty$) амплитуда и интенсивность результирующей волны равны

$$A = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta\varphi_0}{2}\right)}{\frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right|, \quad I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi_0}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\varphi_0}{2}\right)^2},$$

где A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность в центральном максимуме интерференции порядка $m = 0$ (при $\Delta\varphi = 0$). Зависимость I/I_0 от $\Delta\varphi_0/2$ показана на рис. V.4.6.

Значения $(\Delta\varphi)_m$, соответствующие максимумам порядка $m \geq 1$, находят из уравнения $\text{tg}\left[\frac{(\Delta\varphi_0)_m}{2}\right] = \frac{(\Delta\varphi_0)_m}{2}$ и

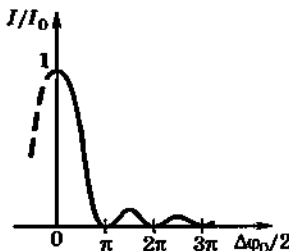


Рис. V.4.6

могут быть рассчитаны по приближенной формуле: $(\Delta\varphi_0)_m = \pm(2m + 1)\pi$. Их интенсивность значительно меньше I_0 и быстро убывает с увеличением порядка максимума.

Условие минимумов интерференции $(\Delta\varphi_0)_m = \pm 2m\pi$ ($m = 1, 2, \dots$).

Глава 5

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА—ФРЕНЕЛЯ

1°. *Дифракцией света* называют совокупность явлений, которые обусловлены волновой природой света и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями (например, при прохождении через отверстия в непрозрачных экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т. д. В более узком смысле под дифракцией понимают явления огибания светом малых препятствий, т. е. отклонения от законов геометрической оптики.

Математически строгое решение дифракционных задач на основе волнового уравнения с граничными условиями, зависящими от характера препятствий, как правило, представляет трудности. Поэтому применяются приближенные методы решения.

2°. *Принцип Гюйгенса*: положение фронта распространяющейся волны может быть в любой момент времени представлено огибающей всех вторичных (элементарных) волн. Источниками вторичных волн являются точки, до которых дошел фронт первичной волны в предшествующий момент времени. При этом предполагается, что вторичные волны излучаются только «вперед», т. е. в направлениях, составляющих острые углы с направлением внешней нормали к фронту первичной волны.

Принцип Гюйгенса позволяет объяснить законы отражения и преломления света, однако он недостаточен для объяснения дифракционных явлений.

3°. Пусть S — источник света и σ — произвольная замкнутая поверхность, охватывающая S .

Принцип Гюйгенса—Френеля: в любой точке, находящейся вне поверхности σ , световая волна, возбуждаемая источником S , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, которые «излучаются» элементарными фиктивными (воображаемыми) источниками, непрерывно распределенными вдоль вспомогательной поверхности σ .

Иными словами, вне поверхности σ действительно распространяющаяся (первичная) волна может быть заменена системой когерентных фиктивных *вторичных волн*, интерферирующих при наложении.

Амплитуда, начальная фаза и диаграмма направленности излучения вторичных волн, «возбуждаемых» элементарным участком do вспомогательной поверхности, зависят от характеристик первичной волны (ее амплитуды, фазы и направления распространения) в точках do . Обычно вспомогательную поверхность σ совмещают с положением в некоторый момент времени одной из волновых поверхностей первичной волны, так что начальные фазы всех вторичных волн одинаковы. В этом случае амплитуда элементарной вторичной волны, «возбуждаемой» элементом волновой поверхности площадью do , пропорциональна выражению $\phi \frac{A}{r} do$, где

A — амплитуда первичной волны в точках элемента do , r — расстояние от do до рассматриваемой точки M поля, лежащей вне поверхности σ , ϕ — неизвестная функция угла α между направлением внешней нормали к элементу do волновой поверхности и направлением радиуса-вектора r , проведенного из do в точку M . Согласно гипотезе Френеля, функция ϕ максимальна при $\alpha = 0$ и медленно убывает с ростом α , обращаясь в нуль при $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Для получения правильного значения фазы волны в точке M необходимо считать, что в точках поверхности σ вторичные волны опережают по фазе первичную волну на $\frac{\pi}{2}$.

4°. Если между источником световых волн и точкой их наблюдения находится непрозрачный экран с отверстиями, то на поверхности экрана амплитуды вторичных волн принимаются равными нулю, а в отверстиях — такими, как если бы экран отсутствовал. Тем самым предполагается, что материал экрана не играет роли. Это упрощение допустимо, если размеры отверстий велики по сравнению с длиной волны λ . Амплитуда волны, прошедшей экран, определяется расчетом в точке наблюдения интерференции вторичных волн от вторичных источников, располагающихся в отверстиях экрана.

5°. В ряде дифракционных задач, обладающих осевой симметрией, расчет интерференции вторичных волн может быть сильно упрощен с помощью наглядного геометрического метода разбиения фронта волны на кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. Разбиение на зоны производится так, чтобы оптическая разность хода от сходственных границ (внутренних или внешних) каждой пары соседних зон до рассматриваемой точки T равнялась $\frac{\lambda}{2}$. Вторичные волны от сходственных точек двух соседних зон приходят в точку T в противоположных фазах и взаимно ослабляют друг друга при наложении.

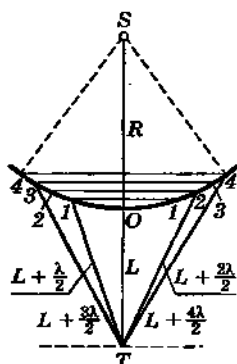


Рис. V.5.1

На рис. V.5.1 показано построение зон Френеля в случае сферической волны, возбуждаемой источником S . Участок 101 волновой поверхности называется первой (центральной) зоной Френеля, кольцевой участок 21 — второй зоной и т. д. Так как R и $L \gg \lambda$, то при не слишком большом i площади первых i зон Френеля одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i = \frac{\pi R L \lambda}{R + L}.$$

В случае плоского волнового фронта

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_i = \pi R \lambda.$$

2. ГРАФИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУД ВТОРИЧНЫХ ВОЛН

1°. Амплитуду волны в точке наблюдения можно рассчитывать на основе графического метода векторных диаграмм сложения одинаково направленных когерентных колебаний, возбуждаемых в этой точке всеми элементарными источниками вторичных волн. В пределах каждой зоны Френеля угол α между внешней нормалью к фронту и направлением в точку наблюдения, а также расстояние r до точки наблюдения, изменяются незначительно. Поэтому векторная диаграмма, соответствующая одной зоне, имеет вид, близкий к полуокружности. Результирующая амплитуда вторичных волн от всех элементарных участков зоны равна диаметру этой полуокружности.

2°. Результирующая амплитуда A_i вторичных волн от i -й зоны прямо пропорциональна площади этой зоны. Для равновеликих по площади зон (см. рис. V.5.1) амплитуда A_i уменьшается по мере увеличения номера i зоны благодаря возрастанию угла α и расстояния r : $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$. В этом случае векторная диаграмма для системы зон имеет вид медленно скручивающейся спирали (рис V.5.2).

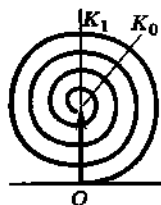


Рис. V.5.2

3°. Если сферическая или плоская волна распространяется в однородной среде, т. е. в отсутствие препятствий, так что фронт волны полностью открыт, то ее амплитуда в точке T (см. рис. V.5.1) определяется отрезком OK_0 на рис. V.5.2. Этот отрезок равен половине амплитуды OK_1 , соответствующей действию одной только центральной зоны Френеля. Радиус центральной зоны пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием $ST = R + L$. Поэтому можно считать, что в однородной среде свет от источника S распространяется в точку T вдоль луча ST , т. е. прямолинейно.

4°. Амплитуду и интенсивность света в точке T можно значительно увеличить, если с помощью специального устройства, называемого *зонной пластинкой*, закрыть четные зоны Френеля, оставив открытыми нечетные зоны (либо наоборот). Если общее число зон

Френеля, укладываемых на зонной пластинке, равно $2k$, то амплитуда A световой волны в точке наблюдения T равна $A = A_1 + A_3 + \dots + A_{2k-1}$. При не слишком больших k амплитуда $A \approx kA_1$, т. е. в $2k$ раз больше, чем при беспрепятственном распространении света от источника в точку T .

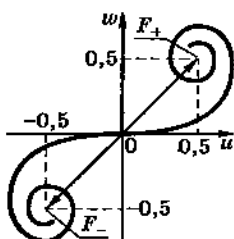


Рис. V.5.3

5°. Для расчета дифракции света на прямолинейном крае плоского экрана или на прямолинейной щели метод зон Френеля неудобен, так как эти зоны оказываются частично закрытыми экраном. В этих случаях фронт падающей плоской волны разбивается на бесконечно узкие полоски, параллельные прямолинейному краю экрана или щели. Расчет

дифракции можно произвести графически с помощью спирали Корню (рис. V.5.3), уравнение которой в параметрической форме имеет вид

$$u = \int_0^v \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi \quad \text{и} \quad w = \int_0^v \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi,$$

где параметр $v = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} (x - x_0)$. Здесь λ — длина волны,

L — расстояние от плоскости экрана до точки T (предполагается, что волна падает на экран нормально к его плоскости), x_0 — координата точки наблюдения T , x — текущая координата точек фронта волны, а ось Ox проведена в плоскости экрана перпендикулярно к его краю.

Спираль Корню состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат ($v = 0$) и при $v \rightarrow \pm \infty$ асимптотически навивающихся соответственно на полюс $F_+(0,5; 0,5)$ и полюс $F_-(-0,5; -0,5)$.

Амплитуда A колебаний в точке T , возбуждаемых участком фронта волны, ограниченным прямыми $x = x_1$

и $x = x_2$, равна $\frac{A_0 b}{F F_+}$, где A_0 — амплитуда колебаний в

точке T , при полностью открытом фронте волны, а b —

длина отрезка, соединяющего две точки спирали Корню, соответствующие значениям $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(x_1 - x_0)$ и $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}(x_2 - x_0)$. В пределе при $x_1 \rightarrow -\infty$ и $x_2 \rightarrow \infty$ (полностью открытый фронт волны) $b = F_- F_+ = \sqrt{2}$.

При фиксированных значениях x_1 и x_2 величины v_1 и v_2 зависят от x_0 , т. е. от положения точки T на плоскости наблюдения дифракционной картины. Поэтому отрезки b , соответствующие различным x_0 , характеризуют значения относительной амплитуды $\frac{A}{A_0}$ в различных точках дифракционной картины.

3. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

1°. Дифракцией Френеля называют такие дифракционные задачи, в которых нельзя пренебрегать кривизной волновых поверхностей падающей и дифрагировавшей волн (либо только дифрагировавшей волны). Дифракция Френеля осуществляется в тех случаях, когда источник света и экран, служащий для наблюдения дифракционной картины, (либо только последний) находятся на конечных расстояниях от препятствия, вызвавшего дифракцию. При дифракции Френеля на экране получается «дифракционное изображение» препятствия. Аналитический расчет этих задач обычно труден. В простейших случаях, рассматриваемых ниже, вид дифракционной картины можно установить либо путем применения метода кольцевых зон Френеля, либо с помощью спирали Корню.

2°. Дифракция на круглом отверстии в непрозрачном экране (рис. V.5.4). Дифракционная картина на плоскости PQ , параллельной экрану, имеет вид концентрических чередующихся темных и светлых дифракционных колец.

Центры колец лежат в точке O пересечения с плоскостью PQ прямой, проведенной из источника S через центр отверстия. Если для точки O число зон Френеля,

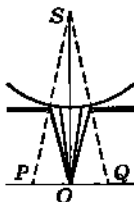


Рис. V.5.4

укладывающихся в отверстие, нечетно $(2k + 1)$, то амплитуда в точке O больше, чем в отсутствие экрана:

$$A \approx \frac{1}{2} (A_1 + A_{2k+1}),$$

где A_1 и A_{2k+1} — амплитуды, соответствующие действию 1-й и $(2k + 1)$ -й зон Френеля. Если число зон четно $(2k)$, то амплитуда в точке O меньше, чем в отсутствие экрана:

$$A \approx \frac{1}{2} (A_1 - A_{2k}).$$

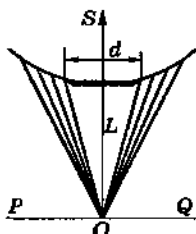


Рис. V.5.5

3°. Дифракция на малом круглом экране (рис. V.5.5). Интенсивность света в точке O , лежащей против центра экрана, равна четверти интенсивности волны от первой открытой зоны. Если экран невелик ($d \sim \sqrt{2L\lambda}$), то интенсивность света в точке O практически такая же, как и в отсутствие экрана.

4°. Дифракция плоской волны на прямолинейном крае плоского экрана (рис. V.5.6). Расчет дифракционной картины можно произвести с помощью спирали Корню. Амплитуда в точке T_0 , лежащей против края экрана ($b = OF_+ = 0,5 F_- F_+$), вдвое меньше, чем в отсутствие экрана. Интенсивность света соответственно вчетверо меньше. Распределение интенсивностей на плоскости наблюдения, параллельной плоскости экрана, показано на рис. V.5.6.

5°. Дифракция плоской волны на прямолинейной щели (рис. V.5.7). Вид дифракционной картины зависит от величины волнового параметра $p = \frac{\sqrt{\lambda L}}{a}$, где

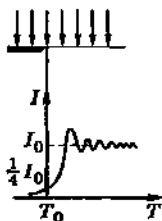


Рис. V.5.6

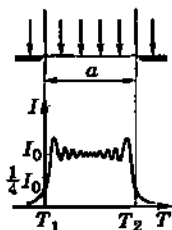


Рис. V.5.7

a — ширина щели, L — расстояние от плоскости щели до параллельной ей плоскости наблюдения, λ — длина волны.

Если $p \ll 1$ («широкая» щель), то амплитуда волны в точке наблюдения, лежащей против середины, определяется расстоянием F_-F_+ между полюсами спирали Корню: $A = A_0$, т. е. такая же, как в отсутствие экрана. Распределение интенсивностей на плоскости наблюдения показано на рис. V.5.7, б. Вблизи точек T_1 и T_2 , лежащих против краев щели, оно подобно распределению интенсивностей вблизи точки T_0 при дифракции на крае полубесконечного экрана (см. рис. V.5.6, б).

При $p \approx 1$ колебания интенсивности охватывают всю область T_1T_2 , соответствующую изображению щели в геометрической оптике, а также наблюдаются и в области геометрической тени (в отличие от монотонного спада интенсивности вблизи краев тени при $p \ll 1$). В зависимости от величины p в середине дифракционной картины может быть как максимум, так и минимум интенсивности.

При $p \gg 1$ дифракционная картина имеет такой же вид, как при дифракции Фраунгофера на той же щели (рис. V.5.9). Против середины щели находится основной максимум интенсивности, который тем сильнее «размазан», чем уже щель (рис. V. 5.10).

6°. Дифракция плоской волны на длинном прямоугольном экране (рис. V.5.8). Относительная амплитуда $\frac{A}{A_0}$ в произвольной точке T на плоскости наблюдения, параллельной экрану, может быть рассчитана с

помощью спирали Корню: $\frac{A}{A_0} =$

$$= \frac{|a_1 - a_2|}{F_-F_+}. \text{ Здесь } a_1 \text{ и } a_2 \text{ — век-}$$

торы, проведенные в полюсы спирали Корню F_+ и F_- из точек спирали, соответствующих значениям v_1 и v_2 параметра v для краев экрана.

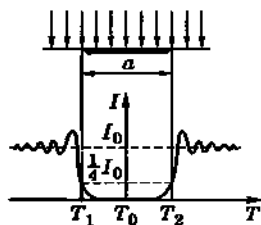


Рис. V.5.8

Если волновой параметр $p = \frac{\sqrt{\lambda L}}{a} \ll 1$ (a — ширина экрана), то вблизи границ геометрической тени от экрана либо $a_1 \approx 0$, либо $a_2 \approx 0$. Поэтому за экраном образуется область тени, на границах которой наблюдаются дифракционные полосы (рис. V.5.8), подобные полосам от края полубесконечного экрана (п. 4°).

7°. Если форма краев экранов и отверстий в них отличается от геометрически идеальной, то дифракционные закономерности пп. 2°—6° не выполняются. Степень отклонения от этих закономерностей определяется величиной $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}}$, где Δ — длина основания и высота выступов (шероховатостей) на краях экрана, L — расстояние от экрана до точки наблюдения, λ — длина волны:

а) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \ll 1$ — нарушения дифракционной картины практически отсутствуют;

б) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \approx 1$ — дифракционная картина сглаживается и может исчезнуть;

в) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \gg 1$ — дифракционные полосы или кольца повторяют конфигурацию выступов и впадин на внешних краях экранов или краях отверстий в них.

4. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

1°. Дифракцией Фраунгофера или дифракцией в параллельных лучах называют дифракцию плоских волн, т. е. такие дифракционные задачи, в которых источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, на котором происходит дифракция. Для практического осуществления этого типа дифракции источник света помещают в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину наблюдают в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной позади препятствия. Дифракционная картина представляет собой «дифракционное изображение» источника света. Этот вид дифракции обычно рассчитывают аналитически.

2°. Два препятствия — экраны называют дополнительными экранами, если отверстиям в одном из них со-

ответствуют точно такие же по форме, размерам и расположению непрозрачные участки в другом, и наоборот.

Теорема (принцип) Бабине: при фраунгоферовой дифракции на каком-либо экране интенсивность дифрагированного света в любом направлении, не совпадающем с направлением распространения первичной плоской волны, падающей на экран, должна быть такой же, как и при дифракции на дополнительном экране.

3°. Дифракция на узкой длинной щели. Монохроматический свет падает на щель нормально к ее плоскости. Амплитуда волны в точке наблюдения — побочном фокусе собирающей линзы — равна

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \varphi\right)}{\frac{kb}{2} \sin \varphi} = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi},$$

где φ — угол дифракции, отсчитываемый от внешней нормали к фронту падающей волны, т. е. от нормали к плоскости щели, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, b — ширина щели, A_0 — амплитуда в центре дифракционной картины (при $\varphi = 0$).

Условие минимумов:

$$A(\varphi) = 0 \text{ при } \sin \varphi = \pm \frac{n\lambda}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Условия максимумов:

для максимума нулевого порядка

$$\varphi = 0 \text{ и } A = A_0;$$

для остальных максимумов

$$\sin \varphi = \pm \frac{k_m}{b} \lambda,$$

где k_m — корни уравнения $\operatorname{tg}(k_m \pi) = k_m \pi$, $m = 1, 2, \dots$ — порядок максимума; $k_1 = 1,43$, $k_2 = 2,46$, $k_3 = 3,47$, $k_4 = 4,48, \dots$

Приближенное условие для всех максимумов, кроме нулевого, имеет вид

$$\sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2b} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

4°. Распределение интенсивностей ($I \sim A^2$):

$$I(\varphi) = A^2(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)^2}.$$

Это распределение показано на рис. V.5.9.

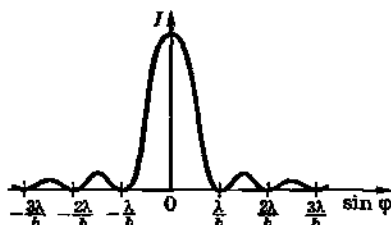


Рис. V.5.9

Относительная интенсивность максимумов порядка $m \geq 1$ удовлетворяет следующей приближенной формуле:

$$\frac{I_m}{I_0} \approx \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2}.$$

5°. Расстояние от центра дифракционной картины до первого минимума растет с уменьшением b . Центральный максимум интенсивности при этом расширяется и уменьшается в высоте (рис. V.5.10). При $b = \lambda$ первый минимум уходит в бесконечность. Интенсивность постепенно спадает от центра в плоскости наблюдения к ее краям. При увеличении b дифракционная картина сужается, главный максимум выделяется резче. При $b \gg \lambda$ на экране получается четкое изображение источника света, соответствующее законам геометрической оптики.

6°. Дифракция на прямоугольном отверстии шириной b и высотой a . Направление распространения дифрагированного света можно задать с помощью двух углов α и β между этим направлением и осями Ox и Oy , проведенными параллельно соответственно сторонам b и a отверстия. В случае нормального падения

света на плоскость отверстия направления, соответствующие минимумам интенсивности дифрагированного света, удовлетворяют условиям:

$$b \sin \varphi = \pm m\lambda \text{ и } a \sin \psi = \pm n\lambda,$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \beta$, а m и n — любые целые неотрицательные числа.

Распределение интенсивностей:

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \psi \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \psi \right)^2}.$$

Интенсивность в направлениях, для которых $\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin \psi \approx \psi$, равна

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi b}{\lambda} \varphi}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \varphi \right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \psi}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \psi \right)^2},$$

где I_0 — интенсивность света, идущего по направлению, определенному углами $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

7°. Дифракция на круглом отверстии. В случае точечного источника света при нормальном падении света на плоскость отверстия дифракционная картина представляет собой чередование светлых и темных колец; распределение интенсивности показано на рис. V.5.11.

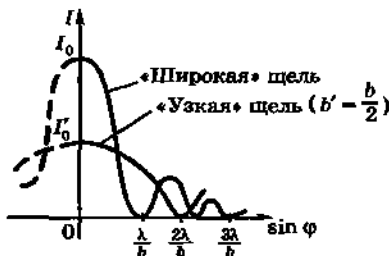


Рис. V.5.10

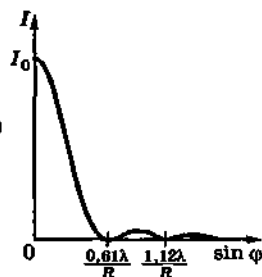


Рис. V.5.11

Положения максимумов и минимумов на рис. V.5.11 удовлетворяют условию

$$\sin \varphi = \frac{k_m}{R} m \lambda,$$

где $\varphi = \arctg \frac{\rho}{F}$ — угол дифракции, F — фокусное расстояние линзы, ρ — расстояние от центра дифракционной картины до рассматриваемой ее точки (радиус кольца), $m = 1, 2, 3, \dots$ — порядок максимума или минимума, R — радиус отверстия, λ — длина волны. Значения $k_{\min}$, $k_{\max}$ и относительные интенсивности максимумов $I_{\text{отн}}$ для $m = 1, 2, 3$ и 4 приведены в табл. V.3.

Таблица V.3

m	$k_{\max}$	$k_{\min}$	$I_{\text{отн}}$
1	0	0,61	1
2	0,41	0,56	0,0175
3	0,44	0,54	0,0042
4	0,46	0,53	0,0016

Сужение отверстия приводит к расплыванию дифракционной картины. При увеличении R дифракционная картина стягивается в точку.

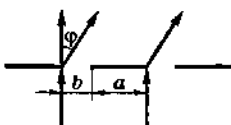


Рис. V.5.12

8°. Дифракция на двух одинаковых параллельных щелях (рис. V.5.12).

Свет падает нормально к плоскости щелей. «Главные» минимумы интенсивности удовлетворяют тому же условию, что и для одной щели. Дополнительные минимумы соответствуют направлениям, в которых интерференция света от обеих щелей приводит к его гашению:

$$d \sin \varphi = \pm(2l + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

здесь $d = b + a$, b — ширина щели, a — расстояние между щелями.

Положения главных минимумов:

$$b \sin \varphi = \pm n \lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Положения главных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda,$$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$ — порядок главного максимума.

Распределение интенсивностей показано на рис. V.5.13. Дифракционные максимумы уже и ярче, чем в случае дифракции на одной щели той же ширины (п. 4°).

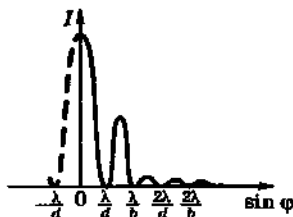


Рис. V.5.13

9°. Дифракция на одномерной дифракционной решетке, т. е. на системе из N одинаковых параллельных щелей в плоском непрозрачном экране, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Величину $d = b + a$, где b — ширина щели, а a — ширина непрозрачного промежутка между соседними щелями, называют постоянной (периодом) дифракционной решетки.

Если свет падает на решетку нормально к ее плоскости, то имеют место следующие условия:

для главных минимумов:

$$b \sin \varphi = \pm n \lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

для главных максимумов:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

для добавочных минимумов:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{p \lambda}{N},$$

где $p = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1, 2N - 1, 2N + 1, \dots$.

Между двумя соседними главными максимумами располагаются $N - 1$ добавочных минимумов, разделенных вторичными максимумами. С увеличением числа щелей интенсивность главных максимумов растет пропорционально N^2 , а энергия пропускаемого света увеличивается пропорционально N . В результате возникают резкие узкие максимумы, разделенные практически темными промежутками; наибольшая интенсивность вторичных максимумов составляет не более 5% от интенсивности главного максимума.

Угловую ширину $\Delta\varphi$ главного максимума определяют как разность углов дифракции φ , которые соответствуют двум добавочным минимумам, ограничивающим этот максимум. При $d \gg \lambda$ и больших N угловая ширина главных максимумов не слишком высоких порядков

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\lambda}{Nd}.$$

10°. Распределение интенсивности на плоскости наблюдения:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)},$$

где I_0 — интенсивность по направлению $\varphi = 0$ для одной щели. В главных максимумах интенсивность в N^2 раз больше, чем дает в соответствующих местах одна щель. Распределение интенсивностей по главным максимумам (m — номер максимума):

$$I_m = I_0 \frac{N^2 d^2}{\pi^2 m^2 b^2} \sin^2 \frac{\pi m b}{d}.$$

Если $\frac{d}{b}$ — иррациональное число, то I_m монотонно убывает с ростом порядка максимума m . Если же $\frac{d}{b}$ — рациональное число: $\frac{d}{b} = \frac{k_1}{k_2}$, где k_1 и k_2 — целые числа, не имеющие общих множителей, то $I_m = 0$ при $m = k_1, 2k_1, \dots$, т. е. главные максимумы порядков, кратных k_1 , отсутствуют.

В табл. V.4 приведены относительные интенсивности главных максимумов для разных порядков дифракции (различные числа m) при двух значениях отношения $\frac{d}{b}$.

Таблица V.4

$\frac{d}{b}$	m				
	0	1	2	3	4
2	1	0,4	0	0,045	0
3	1	0,675	0,17	0	0,042

11°. Если плоская волна падает на дифракционную решетку под углом θ (рис. V.5.14), то условие главных максимумов имеет вид

$$d(\sin \varphi_m - \sin \theta) = \pm m\lambda,$$

или

$$2d \cos \left(\frac{\varphi_m + \theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi_m - \theta}{2} \right) = \pm m\lambda,$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Если $d \gg \lambda$, то φ_m мало отличается от θ , и

$$d(\varphi_m - \theta) \cos \theta = \pm m\lambda.$$

Дифракционная картина совпадает с наблюдаемой при нормальном падении волны на решетку, когда последняя имеет как бы уменьшенный период $d' = d \cos \theta$.

При скольльзящем падении света ($\theta \approx \frac{\pi}{2}$) можно наблюдать дифракцию даже на очень грубых ($d \gg \lambda$) решетках.

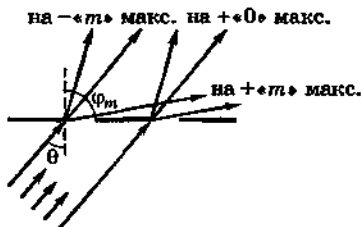


Рис. V.5.14

12°. Дифракция на большом числе одинаковых и одинаково ориентированных препятствий. Интенсивность I света в произвольной точке дифракционной картины равна произведению двух функций: $I = Ff$. Функция F равна интенсивности света в той же точке дифракционной картины при дифракции только на одном препятствии. Функция f зависит только от взаимного расположения и числа N препятствий. Так, для одно-

мерной дифракционной решетки (п. 10°) $F = \frac{I_0 \sin^2(ab)}{(ab)^2}$ и

$$f = \frac{\sin^2(Nad)}{\sin^2(ad)}, \text{ где } a = \frac{\pi}{\lambda} \sin \varphi.$$

Если число препятствий велико и они расположены друг относительно друга совершенно хаотично, то $f \approx F$, и дифракционная картина имеет такой же вид, как и при дифракции на одном препятствии, но ее интенсивность в N раз больше: $I = NF$.

5. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА МНОГОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

1°. Оптически неоднородное тело, коэффициенты пропускания или отражения которого зависят от двух координат на его поверхности, называют *двумерной оптической структурой*. Простейшим примером периодической двумерной структуры является плоская ортогональная двумерная дифракционная решетка, представляющая собой скрещенные под прямым углом вдоль осей x и y одномерные дифракционные решетки с периодами d_1 и d_2 .

2°. В случае нормального падения света вдоль оси z на плоскую ортогональную двумерную решетку положения главных максимумов одновременно удовлетворяют двум условиям:

$$d_1 \cos \alpha = m\lambda,$$

$$d_2 \cos \beta = n\lambda,$$

где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, α и β — углы между осями x и y решеток и направлением на главный максимум порядка (m, n) . Угол γ между этим направлением и осью z определяется из условия

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

откуда

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{d_1}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{d_2}\right)^2}.$$

В общем случае падения плоской волны на плоскую ортогональную двумерную решетку вдоль произвольного направления, образующегося с осями Ox и Oy решетки углы α_0 и β_0 , положения главных максимумов одновременно удовлетворяют условиям:

$$d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$

$$d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$

где $m, n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$

3°. Тело, оптические свойства которого зависят от всех трех пространственных координат, представляет собой *трехмерную оптическую структуру*. Простейшим примером трехмерной оптической структуры — *пространственной дифракционной решетки* — может служить система одинаковых двумерных плоских решеток, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях вдоль оси, перпендикулярной к их плоскостям. Важным случаем пространственной дифракционной решетки являются кристаллические структуры твердых тел. Вообще говоря, дифракционная картина на трехмерной периодической структуре (пространственной кристаллической решетке) определяется видом симметрии решетки.

Направления на главные максимумы дифракции удовлетворяют *уравнениям Лауэ*:

$$d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$

$$d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$

$$d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = l\lambda,$$

где $m, n, l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$; d_1, d_2 и d_3 — периоды решетки вдоль трех ее осей; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ и α, β, γ — углы между осями решетки и, соответственно, падающими и дифрагированными лучами. Значения $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ должны, кроме того, удовлетворять еще одному (геометрическому) соотношению, связанному с взаимным расположением осей решетки. Например, в случае ортогональной решетки $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Поэтому при заданном направлении падающих лучей, т. е. при фиксированных значениях α_0, β_0 и γ_0 , наблюдение дифракционных максимумов порядка (m, n, l) возможно лишь при определенном значении длины волны. Так, в случае ортогональной решетки

$$\lambda = -2 \frac{\frac{m}{d_1} \cos \alpha_0 + \frac{n}{d_2} \cos \beta_0 + \frac{l}{d_3} \cos \gamma_0}{\left(\frac{m}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{l}{d_3}\right)^2}.$$

4°. Второй, более простой метод расчета дифракции на кристаллической решетке основан на представлении кристалла в виде систем параллельных плоскостей. Каждая такая плоскость проходит через большое число

узлов решетки и называется *сетчатой плоскостью*. Предполагается, что сетчатые плоскости зеркально отражают падающие на них волны. Для возникновения дифракционных максимумов необходимо, чтобы волны, отражаемые всеми параллельными сетчатыми плоскостями, усиливали друг друга при интерференции. Это условие выполняется только при таких соотношениях между длиной λ дифрагирующей волны и углом i ее падения на сетчатые плоскости, которые удовлетворяют формуле (условию) Вульфа—Брэгга:

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

где $\theta = \frac{\pi}{2} - i$ — угол скольжения, d — расстояние между

двумя соседними сетчатыми плоскостями, $k = 1, 2, \dots$ — порядок отражения. Угол между направлением на дифракционный максимум и падающим лучом равен 2θ . Формула Вульфа—Брэгга согласуется с уравнениями Лауэ и может быть получена непосредственно из них.

5°. Согласно формуле Вульфа—Брэгга на пространственных решетках могут дифрагировать только такие волны, длина которых $\lambda < 2d$. Следовательно, неравенство

$d < \frac{\lambda}{2}$ представляет собой условие оптической однородности

кристалла для электромагнитных волн с длиной волны λ . У кристаллических решеток $d \approx (10^{-9} - 10^{-10})$ м. Поэтому кристаллы оптически однородны для видимого и ультрафиолетового излучения¹⁾. На кристаллических решетках дифрагируют рентгеновские и γ -лучи, а также электроны, нейтроны и другие микрочастицы, длины волн де Бройля которых достаточно малы.

6°. Зная параметры решетки, можно по положению дифракционных максимумов определять длины λ дифрагирующих волн, т. е. осуществлять спектральный анализ последних (например, рентгеновских лучей). Наоборот, зная длину волн, дифрагирующих на исследуемом образце, а также вид дифракционной картины,

¹⁾ Это верно только для идеального кристалла, расстояния между узлами которого строго одинаковы. Благодаря тепловому движению реальные кристаллы нельзя считать полностью оптически однородными даже для видимого света. Их оптическая неоднородность проявляется, например, в явлении молекулярного рассеяния света в кристаллах.

можно выяснить структуру этого образца (о б р а т н а я задача). Методы исследования структуры вещества, основанные на дифракции рентгеновских лучей, электронов и нейтронов, называют соответственно *рентгеноструктурным анализом, электронографией и нейтронографией*.

Электронография широко применяется, в частности, для исследования структуры поверхностного слоя вещества. Это связано с тем, что, благодаря сильному взаимодействию электронов с веществом, глубина их проникновения в исследуемый образец порядка 10^{-5} — 10^{-7} см.

Взаимодействие рентгеновского излучения с веществом имеет электромагнитную природу. Амплитуда рассеяния рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов возрастает с увеличением порядкового номера Z элемента.

Рассеяние нейтронов веществом обусловлено главным образом их взаимодействием с ядрами атомов (ядерное взаимодействие). Амплитуда рассеяния медленных нейтронов немонотонно изменяется с изменением Z и неодинакова для разных изотопов одного и того же элемента. Однако порядок ее величины во всех случаях один и тот же. Поэтому нейтронография обладает существенными преимуществами перед рентгеноструктурным анализом в тех случаях, когда вещество состоит из элементов с очень близкими или с очень сильно различающимися значениями Z (например, водородосодержащие вещества). Рассеяние нейтронов веществом может быть обусловлено также электромагнитным взаимодействием между магнитными моментами нейтронов и атомов вещества. Поэтому нейтронография применяется также для изучения магнитных материалов.

6. ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН

1°. Дифракция радиоволн рассматривается с помощью решения уравнений Максвелла при заданных условиях излучения радиоволн и при заданных граничных условиях на поверхности раздела Земля—атмосфера.

В задачах дифракции радиоволн атмосфера в первом приближении принимается однородной, с относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\epsilon = \mu = 1$. Рефракция радиоволн не учитывается.

2°. Рассматривают обычно *дифракцию на поверхности Земли*, принимаемой идеально шарообразной и од-

нородной по своим электрическим и магнитным свойствам, и *дифракцию на рельефе* поверхности Земли (горы, впадины и т. п.)

Дифракция на поверхности Земли соответствует заходу (приему) радиоволн в область геометрической тени за горизонтом, дифракция на рельефе поверхности Земли — огибанию радиоволнами препятствий, размеры которых сравнимы с длиной радиоволн или меньше ее.

Дифракция радиоволн на поверхности Земли обеспечивает возможность дальней радиосвязи на длинных волнах «*земным лучом*», огибающим поверхность Земли.

Глава 6

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1°. *Геометрической (или лучевой) оптикой* называют предельный случай волновой оптики при $\lambda \rightarrow 0$ (λ — длина волны). В геометрической оптике отвлекаются от волновой природы света и связанных с ней дифракционных явлений. Это возможно, когда дифракционные эффекты пренебрежимо малы (например, при прохождении света через линзу, диаметр оправы которой $d \gg \lambda$).

2°. В геометрической оптике рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представлений о свете как о совокупности *световых лучей* — линий, вдоль которых распространяется световая энергия. В оптически изотропной среде световые лучи ортогональны к волновым поверхностям и направлены в сторону внешних нормалей к этим поверхностям. В оптически однородной среде лучи прямолинейны. На границе раздела двух сред они подчиняются законам отражения и преломления. Пучки световых лучей могут пересекаться, не интерферируя, и распространяться после пересечения независимо друг от друга.

3°. *Принцип Ферма*: путь распространения реального луча света между двумя точками *A* и *B* есть такой путь, для прохождения которого свету требуется экстремальное

время T по сравнению с временем прохождения любых других путей между этими точками:

$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{dl}{v} = 0, \text{ или } \delta \int_A^B ds = 0,$$

где δ — символ вариаций, dl — элемент длины пути из A и B , $v = v(x, y, z)$ — скорость света в среде; $ds = n dl$ — элемент оптической длины пути; $n = n(x, y, z)$ — абсолютный показатель преломления среды.

4°. Принцип Ферма вытекает как следствие из принципа Гюйгенса при условии, что длина волны света бесконечно мала. Он представляет собой наиболее общий принцип геометрической оптики, из которого можно получить все основные законы геометрической оптики. Так, например, в случае оптически однородной среды

$$\delta \int_A^B ds = n \delta \int_A^B dl = 0,$$

т. е. из принципа Ферма следует закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде. Аналогичным образом выводятся законы отражения и преломления света.

Из принципа Ферма вытекает также закон обратимости световых лучей (или закон взаимности): если луч падает из первой среды на границу со второй под углом i , преломляется и входит во вторую среду под углом r , то луч, падающий из второй среды на границу с первой под углом r , после преломления войдет в первую среду под углом i . Отсюда следует соотношение для относительных показателей преломления обеих сред:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}},$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления обеих сред.

5°. В геометрической оптике каждая точка S источника света считается центром расходящегося пучка лучей, называемого *гомоцентрическим*. Если после отражений и преломлений в оптической системе пучок остается гомоцентрическим, то его центр S называют *стигматическим изображением точки S в оптической системе*. Изображение S^* называют *действительным*, если в точке S^* пе-

ресекаются сами лучи пучка, и *мнимым*, если в ней пересекаются продолжения этих лучей. Сходственные точки источника и его изображения, а также соответствующие лучи и пучки света называют *сопряженными*.

2. ПЛОСКОЕ ЗЕРКАЛО.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА. ПРИЗМА

1°. Гомоцентрический пучок, выходящий из точки S , после отражения в плоском зеркале (рис. V.6.1) остается гомоцентрическим. Точка S^* является *мнимым изображением* источника S , так как оно образовано не самими отраженными лучами, а их продолжениями. Линия SS^* перпендикулярна к плоскости зеркала, причем $l = l'$, где l и l' — соответственно расстояния точки и ее изображения от зеркала. Геометрические размеры протяженного источника света и его мнимого изображения одинаковы.

2°. В плоскопараллельной пластинке (рис. V.6.2) угол падения и угол выхода лучей света из пластинки равны друг другу. Пластинка смещает луч света параллельно самому себе на расстояние

$$\Delta = d \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right),$$

где d — толщина пластинки, i — угол падения лучей, n — относительный показатель преломления материала пластинки. Источник кажется приближенным к поверхности на расстояние

$$\Delta' = d \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

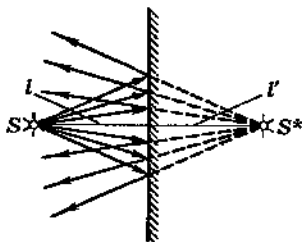


Рис. V.6.1

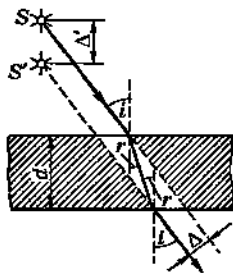


Рис. V.6.2

При нормальном падении лучей ($i = 0$) $\Delta = 0$ и $\Delta' = d \frac{n-1}{n}$.

3°. В призме с основанием AB и преломляющим ребром C (рис. V.6.3) угол α между гранями AC и BC называют *преломляющим углом призмы*. Луч света, падающий на призму в плоскости, перпендикулярной к ее ребрам A , B и C , после преломления отклоняется к основанию AB призмы на угол, равный $\varphi = i_1 + r_2 - \alpha$, где i_1 — угол падения луча на грань AC и r_2 — угол преломления на грани BC . Если $r_2 = i_1$, то преломленный луч идет в призме параллельно ее основанию AB , а угол отклонения минимален ($\varphi = \varphi_{\min}$).

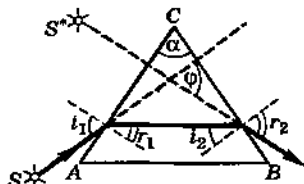


Рис V.6.3

Такое расположение призмы относительно источника света называют *установкой под углом наименьшего отклонения*; при этом

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

где n — показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.

3. ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1°. Если две среды имеют границу раздела сферической формы (рис. V.6.4), то после преломления на ней пучок останется гомоцентрическим только в том случае, когда угол раствора его невелик, точнее, ког-

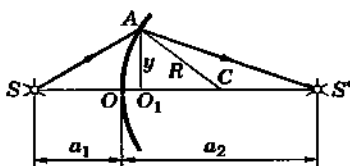


Рис V.6.4

да расстояния $SA \approx SO$, $S^*A \approx S^*O_1$, а точки O_1 и O практически совпадают.

Прямую, проходящую через точечный источник света S и центр кривизны C сферической поверхности, называют *оптической осью сферической поверхности*.

2°. Узкий конус световых лучей с осью, нормальной к сферической границе раздела, называют *параксиальным (приосевым) пучком*. Непараксиальные пучки не дают стигматических изображений и после преломления перестают быть гомоцентрическими.

3°. Если сферическая поверхность имеет радиус кривизны R , а среды по обе стороны от нее обладают абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 , то для параксиальных пучков остается неизменной величина $Q = n \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right)$, называемая *нулевым инвариантом Аббе*:

$$Q = n_1 \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R} \right),$$

где a_1 и a_2 — расстояния до источника и его изображения, отсчитываемые от границы раздела O , причем в направлении распространения света они считаются положительными, а в противоположном — отрицательными (на рис V.6.4 $a_2 > 0$ и $a_1 < 0$). Для выпуклой (по отношению к источнику света) поверхности раздела $R > 0$, для вогнутой $R < 0$.

4°. Соотношение п. 3° для параксиальных пучков, записанное в форме

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad \text{или} \quad \frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1$$

называют *формулой преломляющей сферической поверхности*. Здесь

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

— *переднее и заднее фокусные расстояния преломляющей сферической поверхности*. Точку F_1 , для которой $a_1 = f_1$, и точку F_2 , для которой $a_2 = f_2$, называют соответственно *передним и задним фокусами сферической*

поверхности. Если источник света S находится в фокусе F_1 ($a_1 = f_1$), то его изображение получается в бесконечности ($a_2 = \infty$), т. е. сходящийся параксиальный пучок с вершиной в точке F_1 после преломления превращается в систему параллельных лучей. Если источник S находится в бесконечности ($a_1 = -\infty$), то его изображение получается в фокусе F_2 .

Фокусы F_1 и F_2 действительные, если $f_1 < 0$ и $f_2 > 0$, т. е. если либо $R > 0$ и $n_2 > n_1$, либо $R < 0$ и $n_2 < n_1$. В этом случае изображение S^* источника S действительное ($a_2 > 0$), если $\frac{a_1}{f_1} > 1$.

Положения источника S и его изображения S^* можно также характеризовать с помощью расстояний x_1 и x_2 соответственно от F_1 до S и от F_2 до S^* : $x_1 = a_1 - f_1$ и $x_2 = a_2 - f_2$. Величины x_1 и x_2 удовлетворяют формуле Ньютона:

$$x_1 x_2 = f_1 f_2 = -\frac{n_1 n_2 R^2}{(n_2 - n_1)^2}.$$

5°. Формула сферического зеркала ($n_2 = -n_1$):

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R},$$

где R — радиус кривизны зеркала, a_1 и a_2 — расстояния от зеркала до источника света и его изображения (правило знаков для a_1 , a_2 и R то же, что в п. 3°). Фокусное расстояние сферического зеркала $f = \frac{R}{2}$. Изображе-

ние в сферическом зеркале действительное, если оно находится по ту же сторону от зеркала, что и источник ($a_2 < 0$), и мнимое — в противоположном случае ($a_2 > 0$). Изображение в выпуклом зеркале ($R > 0$) всегда мнимое, а в вогнутом ($R < 0$) — действительное, если $\frac{2a_1}{R} > 1$,

и мнимое, если $\frac{2a_1}{R} < 1$.

6°. Если светящийся предмет — небольшой отрезок размером h_n ($h_n \ll |a_1|$), перпендикулярный к оптиче-

ской оси сферической поверхности (рис. V.6.5), то его изображение, полученное с помощью параксиальных лучей, также имеет вид небольшого отрезка, перпендикулярного к оптической оси.

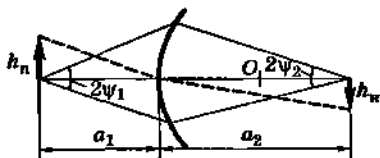


Рис. V.6.5

Отношение поперечных линейных размеров изображения (h_k) и предмета называют *линейным* или *поперечным увеличением*:

$$Y = \pm \frac{h_k}{h_n}.$$

Знак плюс, т. е. $Y > 0$, соответствует *прямому* изображению, а знак минус, т. е. $Y < 0$, — *перевернутому* изображению (этот случай изображен на рис. V.6.5).

Для преломления на сферической поверхности при указанных выше условиях

$$Y = \frac{n_1}{n_2} \frac{a_2}{a_1}.$$

Для отражения от сферического зеркала при тех же условиях

$$Y = -\frac{a_2}{a_1}.$$

В обоих случаях, если изображение действительное, то оно перевернутое, а если оно мнимое, то прямое.

Если $2\psi_1$ и $2\psi_2$ — максимальные углы раскрытия параксиальных пучков света соответственно у источника и его изображения (см. рис. V.6.5), то при преломлении на сферической поверхности выполняется *уравнение (условие) Лагранжа — Гельмгольца*:

$$h_n n_1 \psi_1 = h_k n_1 \psi_1.$$

7°. Плоскость предмета и плоскость его изображения называют *сопряженными* относительно сферической поверхности. Сопряженные плоскости, для которых $Y = 1$, называют *главными*. Для сферической

поверхности обе главные плоскости совпадают с плоскостью, касательной к сферической поверхности в точке пересечения ее с оптической осью.

4. ТОНКИЕ ЛИНЗЫ

1°. *Линзой* называют прозрачное тело, ограниченное двумя криволинейными или криволинейной и плоской поверхностями. В большинстве случаев применяются линзы, поверхности которых имеют сферическую форму.

2°. Линзу называют *тонкой*, если ее толщина d мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей R_1 и R_2 . В противном случае линзу называют *толстой*.

3°. *Главной оптической осью линзы* называют прямую, проходящую через центры кривизны ее поверхностей.

Можно считать, что в тонкой линзе точки пересечения главной оптической оси с обеими поверхностями линзы сливаются в одну точку (рис. V.6.6), называемую *оптическим центром линзы*. Тонкая линза имеет одну *главную плоскость*, общую для обеих поверхностей линзы и проходящую через оптический центр линзы перпендикулярно к ее главной оптической оси.



Рис. V.6.6

Все прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с ее главной оптической осью, называют *побочными оптическими осями линзы*.

Лучи, идущие вдоль оптических осей линзы (главной и побочных), не испытывают преломления.

4°. *Формула тонкой линзы:*

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = (n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

где $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, n_2 и n_1 — абсолютные показатели преломления для материала линзы и окружающей среды, R_1 и R_2 — радиусы кривизны передней и задней (относительно предмета) поверхностей линзы, a_1 и a_2 — рас-

стояния до предмета и его изображения, отсчитываемые от оптического центра линзы вдоль ее главной оптической оси. Правило знаков для R_1 , R_2 , a_1 и a_2 то же, что при преломлении на одной сферической поверхности. Формула тонкой линзы, написанная выше, справедлива только для параксиальных лучей.

5°. Величину

$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

называют *фокусным расстоянием линзы*. Точки, лежащие на главной оптической оси линзы по обе стороны от оптического центра на одинаковых расстояниях, равных f , называют *главными фокусами линзы*. Для переднего (F_1) главного фокуса $a_1 = -f$, для заднего (F_2) главного фокуса $a_2 = f$. Если источник монохроматического света находится в точке F_1 , то его изображение получается в бесконечности ($a_2 = \infty$). Наоборот, если источник монохроматического света находится в бесконечности ($a_1 = -\infty$), то его изображение получается в точке F_2 .

Плоскости, проходящие через главные фокусы и линзы перпендикулярно к ее главной оптической оси, называют *фокальными плоскостями линзы*. Точки пересечения побочных оптических осей с фокальными плоскостями линзы называют *побочными фокусами линзы*.

6°. Линзу называют *собирающей (положительной)*, если ее фокусное расстояние $f > 0$. Линзу называют *рассеивающей (отрицательной)*, если ее фокусное расстояние $f < 0$. При вышеуказанном правиле знаков для a_2 «задний фокус» F_2 рассеивающей линзы ($a_2 = f < 0$) находится перед линзой (со стороны источника света), а не позади нее, как у собирающей линзы ($a_2 = f > 0$). Соответственно, «передний фокус» F_1 рассеивающей линзы находится позади линзы.

Для $n_2 > n_1$ собирающими линзами являются *двогвыпуклые, плоско-выпуклые и вогнуто-выпуклые (положительные менисковые линзы)*, утоньшающиеся от центра к краям; рассеивающими являются *двогвогнутые, плоско-вогнутые и выпукло-вогнутые линзы (отрицательные мениски)*, утолщающиеся от центра к краям. Для $n_2 < n_1$ классификация линз обратна случаю $n_2 > n_1$.

7°. Если на собирающую линзу падает пучок параллельных монохроматических лучей, то после преломления в линзе все лучи пересекаются в побочном фокусе линзы, соответствующем побочной оптической оси, параллельной падающим лучам. Если такой же пучок лучей падает на рассеивающую линзу, то после преломления в линзе он превращается в пучок расходящихся лучей, продолжения которых пересекаются в соответствующем побочном фокусе линзы. Поэтому фокусы собирающей линзы действительные, а рассеивающей — мнимые.

8°. Для линз справедлива формула

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{|f|},$$

где $s = |a_1|$, $d = a_2$, f — фокусное расстояние линзы, знак плюс соответствует собирающей линзе, знак минус — рассеивающей.

Величину

$$\Phi = \frac{1}{f},$$

называют *оптической силой линзы*. Для собирающих линз $\Phi > 0$, для рассеивающих $\Phi < 0$. Оптическая сила линз выражается в *диоптриях*; размерность диоптрий — м^{-1} .

9°. Тонкая линза дает неискаженное изображение предмета, если свет монохроматический, а предмет мал (или достаточно удален от линзы), так что лучи от него идут в непосредственной близости от главной оптической оси линзы (параксиальны).

10°. Построение изображения предмета в линзе осуществляется с помощью двух лучей от каждой точки предмета: изображение точки находится в месте пересечения этих лучей после прохождения сквозь линзу (в случае мнимого изображения — в месте пересечения продолжений лучей, прошедших сквозь линзу). Обычно пользуются любыми двумя лучами из следующих трех:

1) *лучом, проходящим без преломления через оптический центр линзы;*

2) *лучом, падающим на линзу параллельно ее главной оптической оси (после преломления в линзе этот луч или его продолжение проходит через задний главный фокус линзы);*

3) *лучом (либо его продолжением), который проходит через передний главный фокус линзы, а после преломления в линзе идет параллельно ее главной оптической оси.*

На рис. V.6.7, а показано построение с помощью этих лучей изображения И небольшого предмета П — стрелки, перпендикулярной оси линзы, в случае собирающей и рассеивающей линз. Мнимое изображение в рассеивающей линзе и продолжения лучей показаны штриховыми линиями (рис. V.6.7, б).

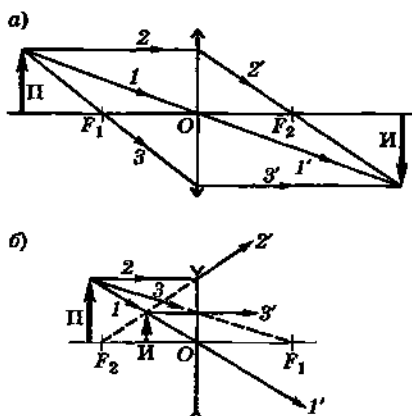


Рис. V.6.7

11°. Линейное увеличение тонкой линзы $Y = \frac{a_2}{a_1}$.

Для действительных изображений $Y < 0$, т. е. они перевернуты; для мнимых изображений $Y > 0$, т. е. они прямые. При $a_2 = -a_1$ линза дает действительное перевернутое равное изображение предмета. Это возможно, только когда предмет и изображение оба находятся на двойных фокусных расстояниях от центра линзы.

12°. Изображениям предметов с помощью линз присущи многочисленные искажения. Для уменьшения этих искажений собирают группы разных линз, называемые *оптическими системами*.

5. ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1°. Оптическую систему называют *центрированной*, если центры кривизны всех ее преломляющих поверхностей лежат на одной прямой, называемой *главной оптической осью системы*.

2°. Оптическую систему, в которой сохраняется гомотетичность пучков и изображение геометрически подобно предмету, называют *идеальной оптической системой*. Идеальными можно приближенно считать центрированные оптические системы, в которых изображения получаются с помощью монохроматических и параксиальных пучков света.

3°. Всякая идеальная оптическая система обладает двумя главными и двумя фокальными плоскостями. Главные плоскости перпендикулярны к главной оптической оси системы и в общем случае не совпадают друг с другом. Они представляют собой сопряженные плоскости, соответствующие линейному увеличению $Y = +1$. Фокальные плоскости перпендикулярны к главной оптической оси системы и пересекают ее в фокусах. Точки H_1 и H_2 пересечения главных плоскостей с главной оптической осью системы (см. рис. V.6.8) называют *главными точками системы*. Расстояния от них до фокусов называют *фокусными расстояниями системы*.

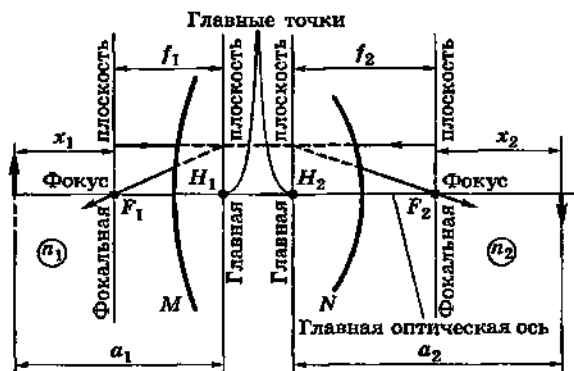


Рис. V.6.8

4°. Если f_1 и f_2 — фокусные расстояния оптической системы, положение сопряженных точек определено их расстоянием a_1 и a_2 до соответствующих главных плоскостей (с учетом правила знаков), а x_1 и x_2 — расстояния соответственно от предмета до переднего фокуса и от изображения до заднего фокуса системы ($x_1 = a_1 - f_1$, $x_2 = a_2 - f_2$), то справедливы формулы:

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1; \quad x_1 x_2 = f_1 f_2; \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}; \quad Y = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1},$$

где n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред, в которых расположены соответственно предмет и его изображение.

Если эти среды одинаковы ($n_1 = n_2$), то

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}; \quad x_1 x_2 = -f^2; \quad f_2 = -f_1 = f.$$

5°. Оптическую систему характеризуют *угловым увеличением* Z :

$$Z = \frac{\operatorname{tg} \psi_2}{\operatorname{tg} \psi_1},$$

где ψ_1 — половина угла раскрытия пучка лучей у точки предмета, лежащей на главной оптической оси (см. рис. V.6.5), ψ_2 — то же для сопряженной точки изображения. В случае перевернутого изображения знаки ψ_1 и ψ_2 считаются различными и $Z < 0$, в случае прямого изображения $Z > 0$. Линейное и угловое увеличения связаны соотношением

$$ZY = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если предмет и его изображение находятся в одной среде ($n_1 = n_2$), то

$$ZY = 1.$$

6°. Сопряженные точки, для которых $Z = 1$, называют узлами оптической системы. Сопряженные лучи, проходящие через узлы, параллельны друг другу. Узлы отстоят от фокусов F_1 и F_2 , соответственно, на расстояни-

ях $x_1 = f_2$ и $x_2 = f_1$. Две плоскости, проходящие через узлы перпендикулярно к главной оптической оси, называют *узловыми плоскостями*.

7°. Оптическую систему также характеризуют *продольным увеличением*:

$$X = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}; \quad X = \frac{n_2}{n_1} Y^2; \quad XZ = Y.$$

8°. Две главные, две фокальные и две узловые плоскости и, соответственно, точки составляют *шесть кардинальных плоскостей и точек системы*. При $n_1 = n_2$ $f_1 = -f_2$, узловые точки и плоскости сливаются с главными и остаются лишь четыре кардинальные плоскости и точки. Переход от оптической системы к тонкой линзе приводит к слиянию двух главных плоскостей и точек в одну. Тонкая линза характеризуется тремя кардинальными точками — двумя фокусами и оптическим центром — и соответствующими им кардинальными плоскостями.

9°. Для толстой сферической линзы, находящейся в воздухе ($n_1 = n_2 = 1$) *оптическая сила*

$$\Phi = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1 R_2} \right),$$

где n — абсолютный показатель преломления материала линзы, d — толщина линзы вдоль главной оптической оси, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы.

Передняя (H_1) и задняя (H_2) главные точки толстой линзы находятся на расстояниях

$$h_1 = -\frac{R_1 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d} \quad \text{и} \quad h_2 = -\frac{R_2 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d},$$

отсчитываемых в направлении распространения света соответственно от точек O_1 и O_2 пересечения главной оптической оси линзы с ее передней и задней поверхностями. Например, для двояковыпуклой ($R_1 > 0$, $R_2 < 0$) или двояковогнутой ($R_1 < 0$, $R_2 > 0$) линзы $h_1 > 0$ и $h_2 < 0$, т. е. главная точка H_1 лежит правее точки O_1 , а главная точка H_2 — левее точки O_2 .

Если $(n - 1)d \ll n |R_2 - R_1|$, то можно пользоваться приближенными формулами:

$$h_1 = \frac{R_1 d}{n(R_1 - R_2)} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{R_2 d}{n(R_1 - R_2)}.$$

10°. Оптическая сила Φ и фокусное расстояние f центрированной системы из двух тонких линз с оптическими силами Φ_1 и Φ_2 , находящихся на расстоянии d друг от друга, равны:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi \Phi d, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

где $f_1 = \frac{1}{\Phi_1}$ и $f_2 = \frac{1}{\Phi_2}$ — фокусные расстояния обеих линз. Положения главных точек:

$$h_1 = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = \frac{f d}{f_2} = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2 - d},$$

$$h_2 = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{f d}{f_1} = -\frac{f_2 d}{f_1 + f_2 - d},$$

где h_1 и h_2 отсчитываются от оптических центров, соответственно, первой и второй линз. В частности, для двух тонких линз, сложенных вплотную ($d = 0$),

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}, \quad h_1 = h_2 = 0.$$

6. ОСНОВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

1°. Назначением оптических приборов является получение на экране или в светочувствительных устройствах (глаз, фотопленка и др.) четких изображений удаленных крупных предметов, близких мелких предметов, мелких деталей близких крупных предметов, нормальных предметов в глазу с аномальными оптическими свойствами, предметов, спроецированных на большие экраны. В соответствии с этим оптические приборы подразделяются на зрительные трубы (в том числе телескопы), лупы и микроскопы, очки, проекционные аппараты.

2°. Оптические приборы увеличивают угол зрения для изображения по сравнению с углом зрения, соот-

ветствующим рассматриваемому предмету. *Углом зрения* называют угол, под которым в оптическом центре глаза сходятся лучи от крайних точек предмета или его изображения. *Увеличение оптического прибора*:

$$N = \frac{\operatorname{tg} \varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_{\text{и}}},$$

где φ_n и $\varphi_{\text{и}}$ — соответственно углы зрения для предмета и его изображения.

3°. Оптические приборы обычно дают двумерное (плоское) изображение трехмерных (пространственных) предметов (*объектов*). Ограничение угла раскрытия пучков света от предмета, необходимое для получения достаточно четкого изображения, осуществляется с помощью *апертурной диафрагмы*. Роль апертурной диафрагмы может играть либо круглое отверстие в непрозрачном экране, либо оправа одной из линз системы.

4°. *Входным* и соответственно *выходным зрачками* оптического прибора называют то из отверстий в нем (или их изображений), которое сильнее всего ограничивает углы раскрытия входящих в прибор и выходящих из него пучков света (рис. V.6.9). Если апертурная диафрагма находится внутри прибора, то ее изображение в передней по отношению к предмету части прибора служит входным зрачком, а изображение в задней части прибора — выходным зрачком.

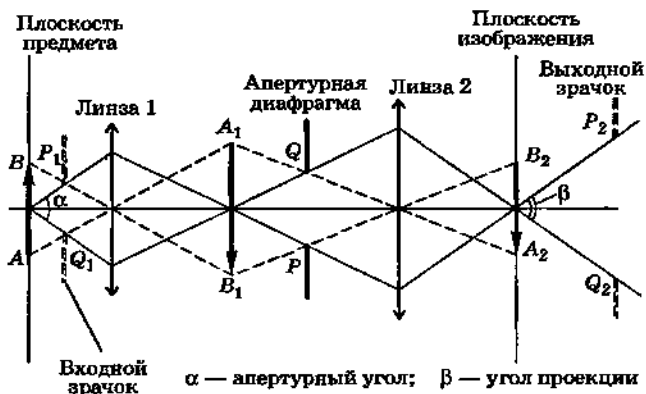


Рис. V.6.9

5°. Угол α , под которым виден диаметр входного зрачка из точки пересечения главной оптической оси прибора с плоскостью предмета, называют *апертурным углом*. Угол β , под которым виден диаметр выходного зрачка из точки пересечения главной оптической оси с плоскостью изображения, называют *углом проекции*.

Для ограничения поля зрения (в плоскости предмета), помимо апертурной диафрагмы, применяется *диафрагма поля зрения*, роль которой может также играть оправа одной из линз системы. Действительный контур диафрагмы поля зрения или его изображение в части системы, расположенной между этой диафрагмой и предметом, называют *люком (входным окном)*. Наиболее резкое диафрагмирование поля зрения осуществляется тогда, когда плоскости люка и предмета совпадают.

6°. Отношение площади входного зрачка к квадрату фокусного расстояния передней (по отношению к предмету) линзы — *объектива оптического прибора* — называют *светосилой (геометрической светосилой) I объектива*. Освещенность изображения удаленного предмета $E \sim I$.

Отношение диаметра входного зрачка к фокусному расстоянию объектива называют *относительным отверстием объектива Ω* . Освещенность изображения удаленного предмета $E \sim \Omega^2$.

7°. *Лупа* представляет собой систему из одной или нескольких линз с небольшим фокусным расстоянием ($f = 10\text{—}100$ мм). Предмет обычно располагают вблизи переднего фокуса лупы, так что его прямое мнимое увеличенное изображение в лупе получается в бесконечности, т. е. рассматривается глазом без усилия аккомодации. *Увеличение лупы $N = \frac{D}{f}$* , где D — расстояние

наилучшего зрения (для нормального глаза $D = 250$ мм).

8°. *Микроскоп* представляет собой комбинацию двух оптических систем (из одной или нескольких линз) — *объектива и окуляра*, разделенных значительным, по сравнению с f_1 и f_2 , расстоянием. Малый объект помещается вблизи переднего фокуса объектива, дающего его увеличенное действительное перевернутое изображение, которое рассматривается с помощью окуляра, играющего роль лупы.

Увеличение микроскопа равно

$$N = \frac{\Delta}{f_1} \frac{D}{f_2},$$

где f_1 и f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра, Δ — расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра, D — расстояние наилучшего зрения.

Для малых f_1 и f_2 величина N может иметь порядок 10^3 . Возможное значение N и разрешающая способность микроскопа ограничиваются дифракционными явлениями. Освещение предмета в микроскопе широкими пучками света (для увеличения разрешающей способности микроскопа) производится с помощью конденсора, фокус которого располагается в плоскости предмета. Объектив должен удовлетворять условию *апланатизма* для точек возле его фокуса, а также должен быть *ахроматизирован*. Значение угла раствора пучка света, поступающего от предмета в объектив микроскопа, ограничено явлением полного внутреннего отражения света на верхней поверхности покровного стекла. Для увеличения этого угла, а также разрешающей способности микроскопа, применяют *иммерсионные объективы*.

9°. *Телескоп* представляет собой комбинацию двух оптических систем (из одной или нескольких линз) — объектива и окуляра. Действительное уменьшенное перевернутое изображение удаленного предмета, даваемое объективом, рассматривается через окуляр как через лупу. Для этого передняя фокальная плоскость окуляра совмещается с задней фокальной плоскостью объектива (*телескопическая система*).

Увеличение телескопической системы равно

$$N = \frac{f_1}{f_2},$$

где f_1 и f_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра.

В *зрительных трубах*, предназначенных для рассматривания удаленных земных предметов, вводится еще одна дополнительная оптическая система. Эта система осуществляет преобразование перевернутого изображения предмета в прямое.

10°. *Спектральными приборами* называют оптические приборы, служащие для получения и исследования спектрального разложения по частотам (или длинам волн) электромагнитного излучения оптического диапазона (т. е. инфракрасного, видимого и ультрафиолетового).

Оптическая система спектральных приборов с пространственным разложением состоит из источника света — узкой входной щели, на которую падает исследуемое излучение, переднего объектива (*коллиматора*), диспергирующего элемента и заднего объектива (*камерного объектива*). В качестве диспергирующих элементов применяют призмы, дифракционные решетки, эталон Фабри—Перо, эшелон Майкельсона и т. д. Соответственно спектральные приборы называют *призменными, дифракционными и интерференционными*. В призменных спектральных приборах призмы обычно располагают под углом наименьшего отклонения. Коллиматор преобразует расходящийся пучок света от входной щели в параллельный пучок, падающий на диспергирующий элемент. В задней фокальной плоскости камерного объектива образуется *спектр* — система изображений входной щели в монохроматическом свете различных частот. В *спектроскопах* спектр регистрируется визуально, а в *спектрографах* — путем фотографирования. В *спектрометрах* производится измерение интенсивности излучения, которое выходит из узкой щели, расположенной в фокальной плоскости камерного объектива.

11°. *Угловой дисперсией спектрального прибора* называют величину

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где $d\varphi$ — угловое расстояние, т. е. разница в углах на выходе из призмы (или дифракционной решетки) между лучами света с длинами волн в вакууме, равными λ и $\lambda + d\lambda$. Угловая дисперсия дифракционной решетки в спектре m -го порядка

$$D = \frac{m}{d \cos \varphi},$$

где d — период решетки.

Линейной дисперсией спектрального прибора называют величину

$$D^* = \frac{dl}{d\lambda},$$

где dl — расстояние между линиями спектра, соответствующими свету с длинами волн λ и $\lambda + d\lambda$. Линейная дисперсия спектрального прибора зависит от его угловой дисперсии и фокусного расстояния f_2 камерного объектива: $D^* = Df_2$.

7. ПОГРЕШНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1°. Искажения изображений в оптических системах, вызываемые использованием широких светосильных пучковых лучей, а также применением немонахроматического света, называют *абберациями*.

Геометрическими абберациями называют погрешности изображения, возникающие в оптической системе из-за использования широких или наклонных пучков монохроматического света. Хроматическими абберациями называют искажения изображения, обусловленные явлением дисперсии света в линзах и призмах оптической системы при использовании белого света.

2°. Использование широких пучков лучей в оптических системах вызывает *сферическую абберацию* и *кому* изображений.

В результате сферической абберации точка S предмета (рис. V.6.10), лежащая на главной оптической оси системы, изображается в виде *кружка рассеяния*. Радиус этого кружка называют *поперечной сферической абберацией* $\frac{\rho}{2}$. Расстояние σ между изображениями S'

и S'' точки S , даваемыми соответственно параксиальными лучами и крайними лучами пучка, пропускаемого входным зрачком системы, называют *продольной сферической абберацией*.

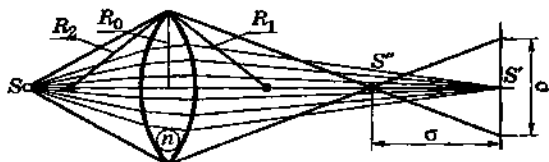


Рис. V.6.10

Поверхность, огибающую все лучи преломленного пучка, называют *каустической поверхностью* (*каустикой*), а ее сечение плоскостью, проходящей через луч, — *каустической линией*. В случае сферической аберрации каустическая поверхность имеет ось симметрии.

3°. Сферические аберрации линзы для изображения, получающегося в его главном фокусе (т. е. для изображения удаленного предмета, получающегося с помощью широкого пучка лучей, параллельного главной оптической оси линзы), называют *главными сферическими аберрациями линзы*.

Для двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны R_1 и R_2 ($R_1 > 0$; $R_2 < 0$) главные сферические аберрации равны:

$$\frac{\rho}{2} = K R_0^3, \quad \sigma = -f_2 K R_0^2,$$

где

$$K = \frac{n^2}{2} \left\{ \frac{1}{R_1^2} \left[1 - \frac{2(n^2 - 1)}{n^3} \right] + \frac{1}{R_1 R_2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 2 \right) + \frac{1}{R_2^2} \right\},$$

R_0 — радиус линзы, n — относительный показатель преломления линзы, f_2 — главное фокусное расстояние. С увеличением n при данной форме линзы модуль величины σ уменьшается. Аберрация уменьшается также, если линза обращена к источнику поверхностью с большей кривизной ($R_1 < |R_2|$). Если $R_1 = -R_2 = R$, то

$$K = \frac{1}{R^2} \left(2n^2 - 2n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right).$$

Для плоско-выпуклой линзы, обращенной выпуклой стороной к предмету ($R_1 = R$; $R_2 = \infty$),

$$K = \frac{n^2}{2R^2} \left[1 - \frac{2(n^2 - 1)}{n^3} \right].$$

Аберрация наименьшая, когда

$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{4 + n - 2n^2}{2n^2 + n}.$$

4°. Для собирающей линзы $\sigma < 0$, для рассеивающей $\sigma > 0$. Поэтому сферическая аберрация может быть зна-

чительно уменьшена путем замены простой линзы системой соответствующим образом подобранных собирающих и рассеивающих линз.

5°. *Комой* называют геометрическую aberrацию, возникающую при прохождении через оптическую систему широких пучков света от точки предмета, находящейся на некотором расстоянии от главной оптической оси системы. Изображение этой точки имеет вид вытянутого и неравномерно освещенного пятна, напоминающего волос (греч. *κομή* — волос). Кома соответствует каустика, имеющая только одну плоскость симметрии, которая проходит через рассматриваемую внеосевую точку предмета и оптическую ось системы.

6°. Если для точки S , лежащей на главной оптической оси системы, устранена сферическая aberrация, то может быть устранена и кома для всех точек небольшого предмета, лежащих вблизи S в плоскости, перпендикулярной к главной оптической оси. Для этого необходимо, чтобы выполнялось *условие синусов Аббе*:

$$y_1 n_1 \sin \psi_1 = y_2 n_2 \sin \psi_2.$$

Здесь n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления сред, в которых находится предмет и его изображение, y_1 и y_2 — расстояния от рассматриваемой точки предмета и ее изображения до главной оптической оси системы, а ψ_1 и ψ_2 — максимальные углы между главной оптической осью и сопряженными лучами (см. рис. V.6.5). Условие синусов вытекает из требования *таутохронности* путей всех лучей, с помощью которых получается изображение каждой точки предмета. Для параксиальных лучей углы ψ_1 и ψ_2 малы, так что $\sin \psi_1 = \psi_1$, $\sin \psi_2 = \psi_2$, и условие синусов переходит в *уравнение Лагранжа—Гельмгольца*.

Условие синусов может быть выполнено только для одной пары сопряженных плоскостей системы, называемых *апланатическими*. Следовательно, безабберационное изображение малого предмета с помощью широкого пучка света может быть получено только при вполне определенном (расчетном) расстоянии от предмета до оптической системы. Поэтому *апланатические линзы (апланаты)* широко используются в качестве объективов микроскопов, в которых исследуемый небольшой предмет всегда помещают вблизи переднего главного фокуса объектива.

7°. Использование наклонных (в том числе и узких) пучков лучей от точек предмета, удаленных от оптической оси системы, вызывает астигматизм наклонных пучков, искривление и дисторсию изображения.

8°. Астигматизм наклонных пучков заключается в том, что они не дают *стигматических* изображений. Если ось пучка лежит в меридиональной плоскости, т. е. в плоскости, проходящей через оптическую ось системы, то изображение точки предмета имеет вид эллипса рассеяния, эксцентриситет которого зависит от расстояния плоскости изображения до главного фокуса системы. При некоторых положениях плоскости изображения эллипс вырождается в отрезок прямой, расположенной в меридиональной плоскости, либо в отрезок прямой, расположенной в сагиттальной плоскости, перпендикулярной к меридиональной, либо в кружок рассеяния.

9°. Искривление плоского изображения проявляется в том, что изображение внеосевых точек плоского предмета не является плоским, а имеет некоторую кривизну, тем более значительную, чем дальше находятся точки от оптической оси системы. Обычно исправляется вместе с астигматизмом в специальных системах линз — *анастигматах*.

10°. Переменная величина увеличения Y по полю изображения приводит к искажению изображения — *дисторсии*. Если Y постоянна, то дисторсия отсутствует (рис. V.6.11, а). Если Y убывает от центра поля изображения к периферии, то имеет место *бочкообразная дисторсия* (рис. V.6.11, б), если наоборот, то *подушкообразная дисторсия* (рис. V.6.11, в). Оба вида дисторсии устраняются специальными системами линз.

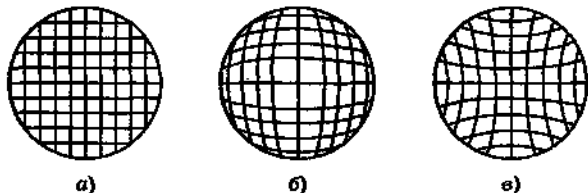


Рис. V.6.11

11°. Хроматическая aberrация присуща некоррегированным оптическим системам, содержащим преломляющие свет элементы (линзы и призмы). Различают *хроматическую aberrацию положения* (*продольную хроматическую aberrацию*) и *хроматическую aberrацию увеличения*. Хроматическая aberrация положения связана с зависимостью положения главного фокуса оптической системы от длины волны света. Она проявляется в том, что изображение точечного осевого источника белого света, получаемое даже с помощью параксиального пучка, имеет вид концентрических цветных колец. Последовательность цветов колец зависит от положения экрана, на котором получается изображение. Хроматическая разность увеличений проявляется в том, что в белом свете изображение небольшого объекта, перпендикулярного к главной оптической оси, окружено цветной каймой.

Хроматическая разность увеличений связана с хроматической aberrацией положения и одновременно устраняется вместе с последней только в тонкой линзе, положение главной плоскости которой не зависит от длины волны света. В толстой линзе совмещение главных фокусов для длин волн λ_1 и λ_2 устраняет для этих волн лишь хроматическую aberrацию положения. При этом для других длин волн сохраняется *остаточная хроматическая aberrация положения* (*вторичный спектр*).

12°. Объектив, у которого устранена для двух длин волн λ_1 и λ_2 хроматическая aberrация положения, а также сферическая aberrация, называют *ахроматическим* (*ахроматом*). Система из двух тонких линз, склеенных между собой, будет ахроматизирована, если для света с длиной волны λ_1 оптические силы Φ_1 и Φ_2 первой и второй линз связаны с оптической силой Φ системы соотношениями:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{1 - \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}} \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{\Phi}{1 - \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} \cdot \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}},$$

причем n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления материалов линз для света с длиной волны λ_1 , а $n_1 + \Delta n_1$ и $n_2 + \Delta n_2$ — то же для света с длиной волны λ_2 (предполагается, что система находится в воздухе).

Более совершенными являются *апохроматические объективы (апохроматы)*, у которых продольная хроматическая aberrация устранена для трех различных значений λ . Апохроматические объективы имеют во много раз меньшую остаточную хроматическую aberrацию, чем ахроматические объективы.

8. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

1°. В любой оптической системе изображение предмета получается с помощью пучка лучей, ограниченно-го входным зрачком, т. е. представляет собой результат дифракции света в системе. Поэтому изображение не может быть абсолютно стигматичным даже в оптической системе, свободной от каких бы то ни было aberrаций. Вследствие дифракции любая точка светящегося предмета изображается в виде центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми интерференционными кольцами. Это явление ограничивает возможность обнаружения на изображении мелких деталей предмета.

2°. *Критерий Рэлея*: изображения двух близких самосветящихся (некогерентных) точек можно еще считать раздельными, если центр дифракционного пятна, соответствующего одной точке, совпадает с первым дифракционным минимумом для второй точки.

В соответствии с критерием Рэлея наименьшее угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя удаленными точечными источниками, изображения которых в объективе телескопа или зрительной трубы можно еще считать раздельными, равно

$$\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{d},$$

где λ — длина волны света, d — диаметр входного зрачка. Величину

$$\frac{1}{\delta\varphi} = \frac{d}{1,22\lambda}$$

называют *разрешающей силой (разрешающей способностью)* объектива. Разрешающая способность всего прибора зависит также от разрешающей способности приемника (глаза, слоя фотоэмульсии и т. д.).

Разрешающая способность глаза ограничена зернистым строением сетчатки, а также дифракцией света на зрачке.

При хорошей освещенности диаметр зрачка $d \approx 2$ мм и предельный угол разрешения, обусловленный дифракцией света в зрачке, $\delta\varphi = 1'$, что совпадает с разрешающей способностью сетчатки глаза. Разрешающая способность слоя фотоэмульсии лимитируется размерами зерен и рассеянием света, связанным с сильным различием показателей преломления желатина и кристаллов галлоидного серебра.

Увеличение окуляра телескопа или зрительной трубы подбирают так, чтобы все детали предмета, разрешаемые объективом, разрешались бы и приемником.

3°. Разрешающую способность микроскопа характеризуют величиной δl наименьшего расстояния между двумя точками предмета, видимыми на изображении раздельно. Для самосвещающегося предмета эти точки можно рассматривать как независимые (некогерентные) источники света, и

$$\delta l = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin \psi},$$

где n — абсолютный показатель преломления среды, находящейся между предметом и объективом, λ_0 — длина волны света в вакууме, 2ψ — апертурный угол, а $n \sin \psi$ — числовая апертура объектива. Обычно в микроскоп рассматривают не самосвещающиеся, а освещенные объекты. Поэтому в зависимости от условий освещения свет, рассеиваемый различными точками объекта, в большей или меньшей степени когерентен. Однако и в этом случае, при оптимальных условиях освещения, наименьшее расстояние между двумя разрешаемыми точками объекта

$$\delta l = \frac{0,5\lambda_0}{n \sin \psi}.$$

Разрешающая способность микроскопа может быть увеличена за счет: а) уменьшения λ_0 (*ультрафиолетовая микроскопия*); б) увеличения числовой апертуры объектива путем заполнения пространства между покровным стеклом и объективом жидкостью с большим абсолютным показателем преломления (*иммерсионный объектив*), обычно для иммерсионных жидкостей $n = 1,4—1,6$.

4°. Указанные выше значения разрешающих способностей оптических приборов являются теоретически предельными. Практически они всегда меньше вследствие влияния aberrаций, возникающих в оптических системах приборов, а также отсутствия идеального контраста между объектом и окружающим его фоном. Разрешающая способность глаза, кроме того, уменьшается при недостаточной освещенности объекта.

5°. Оптические приборы можно использовать за пределами их разрешающей способности, но уже не столько для установления точной формы или деталей наблюдаемых объектов, сколько для обнаружения этих объектов и наблюдения за их движением.

6°. Очень мелкие (порядка 10^{-8} м) коллоидные частички, размеры которых $d \ll \lambda$, наблюдаются в ультрамикроскопе по методу затемненного поля. В этом методе направление наблюдения перпендикулярно к направлению освещения объекта и наблюдаются не прямые, а рассеянные микрочастицами лучи света (явление Тиндалля). Схема ультрамикроскопа показана на рис. V.6.12.

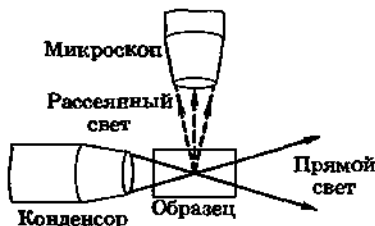


Рис. V.6.12

7°. В соответствии с критерием Рэлея две близкие спектральные линии, получаемые в спектральном приборе, можно еще считать разрешенными, если расстояние между максимумами интенсивностей для этих линий не меньше ширины самих линий.

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

причем λ и $\lambda + \delta\lambda$ — длины волн линий, которые еще способен разрешить этот спектральный прибор. Вели-

чина R определяется свойствами диспергирующего элемента и приемника, дифракционными явлениями и aberrациями оптической системы.

8°. Разрешающая способность призмы призмленного спектрального прибора, в котором роль апертурной диафрагмы играет сама призма, установленная под углом наименьшего отклонения, равна

$$R = a \frac{dn}{d\lambda},$$

где a — длина основания призмы, а n — ее абсолютный показатель преломления.

9. ОСНОВЫ ФОТОМЕТРИИ

1°. Фотометрией называют область оптики, в которой рассматриваются измерения энергии, переносимой электромагнитными волнами оптического диапазона (длины волн от 10^{-8} до 10^{-3} м).

В более узком смысле, рассматриваемом ниже, под фотометрией понимают раздел оптики, посвященный измерению действия видимого света на глаз человека (световые измерения). Для характеристики этого действия вводят световые величины: световой поток, сила света, освещенность, светимость, яркость.

2°. Действие видимого света на глаз зависит не только от физических характеристик света (плотности потока энергии, частоты или спектрального состава), но и от спектральной чувствительности глаза (видности) V_λ , равной отношению светового потока данного монохроматического излучения к потоку энергии (лучистому потоку) этого излучения. Величину $K_\lambda = \frac{V_\lambda}{(V_\lambda)_{\max}}$ назы-

вают относительной спектральной чувствительностью глаза (относительной видностью). Для нормального глаза $K_\lambda = 1$ при $\lambda = 555$ нм. Зависимость K_λ от λ (кривая видности) приведена на рис. V.6.13.

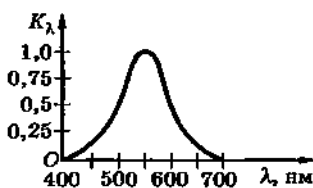


Рис. V.6.13

3°. *Световым потоком Φ* называют мощность светового (видимого) излучения, оцениваемую по его действию на нормальный глаз.

Световой поток $\Phi_{\text{полн}}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность, охватывающую источник света, равен мощности светового излучения последнего и называется *полным световым потоком источника света*. Величина $\Phi_{\text{полн}}$, характеризующая источник света, не может быть увеличена никакими оптическими системами. Действие последних сводится только к перераспределению светового потока по избранным направлениям за счет других.

Спектральной плотностью световой мощности источника монохроматического излучения называют величину $\frac{d\Phi}{d\lambda}$; $d\Phi$ — полный световой поток источника, приходящийся на интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$.

4°. *Точечным источником света* называют источник, излучающий сферические волны. *Силой света точечного источника* называют величину I , равную световому потоку, излучаемому источником в единичный телесный угол. Если точечный источник излучает равномерно по всем направлениям, то его сила света

$$I = \frac{\Phi_{\text{полн}}}{4\pi}.$$

В случае произвольного источника сила света I малого элемента его поверхности ΔS в данном направлении равна

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

где $d\Phi$ — световой поток, излучаемый элементом поверхности ΔS в заданном направлении в телесный угол $d\Omega$.

Средней сферической силой света произвольного источника называют величину

$$\langle I \rangle = \frac{\Phi_{\text{полн}}}{4\pi},$$

где $\Phi_{\text{полн}}$ — полный световой поток источника. Если источник излучает по всем направлениям равномерно (изотропно), то $\langle I \rangle = I$.

5°. Освещенностью E поверхности называют отношение приходящегося на нее светового потока $d\Phi$ к ее площади dS :

$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

В случае точечного источника света

$$E = I \frac{n \cdot R}{R^3} = \frac{I \cos \varphi}{R^2},$$

где R — радиус-вектор, проведенный из источника к элементу dS освещаемой поверхности, n — единичный вектор, нормальный к площадке dS , φ — угол между R и n (угол падения).

Если на поверхность падает плоская световая волна, то

$$E = E_0 \cos \varphi,$$

где E_0 — освещенность поверхности, нормальной к направлению распространения волны, φ — угол между этой и рассматриваемой поверхностями.

6°. Количество освещения (экспозиция) H есть произведение освещенности E поверхности на продолжительность t ее освещения (в фотографии — время экспонирования, или выдержка):

$$H = Et.$$

7°. Яркостью B_φ называют поверхностную плотность силы света в заданном направлении, равную отношению силы света к площади проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную к этому направлению:

$$B_\varphi = \frac{dI}{dS \cos \varphi} = \frac{d^2\Phi}{dS d\Omega \cos \varphi},$$

где dI — сила света элемента dS светящейся поверхности в направлении, составляющем угол φ с нормалью к элементу dS , $d^2\Phi$ — световой поток, излучаемый элементом dS в телесный угол $d\Omega$ в том же направлении.

Источник света, для которого B_φ не зависит от φ , называют подчиняющимся закону Ламберта или косинусным. Строго говоря, этому условию удовлетворяет только черное тело и поверхности или среды, равномерно рассеивающие свет по всем направлениям (идеально рассеивающие).

8°. **Светимостью (светностью) R** называют поверхностную плотность светового потока излучения, испускаемого поверхностью, равную отношению светового потока $d\Phi$ к площади dS светящейся поверхности:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Светимость выражается в люксах.

Светимость и яркость связаны соотношением:

$$R = 2\pi \int_0^{\pi/2} B_{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi.$$

Для источников, подчиняющихся закону Ламберта,
 $R = \pi B_{\varphi}.$

Глава 7

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

1. СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

1°. Каждый пучок волн, испускаемый атомом в одном акте излучения, поляризован. Однако при спонтанном излучении множества атомов источника света нет никакой корреляции между состояниями поляризации различных пучков. Поэтому в свете, испускаемом источником, все направления колебаний вектора E электрической напряженности поля, ортогональные направлению распространения волны, статистически равновероятны. Такой свет называют *неполяризованным*, или *естественным светом*. В каждой точке поля естественного света нет какого-либо преимущественного направления колебаний вектора E : колебания всевозможных направлений в плоскости, перпендикулярной лучу, быстро и беспорядочно сменяют друг друга.

2°. Во всех способах преобразования естественного света в поляризованный из естественного света полностью или частично отбираются составляющие с вполне

определенной ориентацией плоскости поляризации. В первом случае получается плоскополяризованная волна, во втором — частично поляризованная волна, в которой имеется преимущественная ориентация плоскости поляризации.

Устройства, служащие для преобразования естественного или частично поляризованного света в свет плоскополяризованный, называют *поляризаторами*. Их действие основано либо на явлении поляризации света при отражении и преломлении на границе раздела двух изотропных прозрачных диэлектриков, либо на явлении оптической анизотропии и связанного с ним двойного лучепреломления, а также на явлении дихроизма.

3°. Среду называют *оптически анизотропной*, если ее оптические свойства (в частности, фазовая скорость света и абсолютный показатель преломления) зависят от направления распространения световой волны и характера ее поляризации. Закономерности распространения света в среде в конечном счете определяются интерференцией первичной и вторичных волн, излучаемых молекулами, атомами или ионами среды вследствие их электронной поляризации под действием поля световой волны. Поэтому оптические свойства среды полностью обусловлены электрическими свойствами этих элементарных излучателей, их взаимным расположением и взаимодействием. Атомы и молекулы в зависимости от их строения могут быть электрически изотропными (поляризуемость не зависит от направления) или анизотропными.

4°. При обычных условиях газы, жидкости и аморфные твердые тела оптически изотропны, так как хотя молекулы многих из них электрически и анизотропны, но зато их ориентация полностью хаотична. Всякое упорядочение ориентаций анизотропных молекул в этих средах приводит к возникновению оптической анизотропии (*искусственная оптическая анизотропия*).

Оптическая анизотропия кристаллов может быть обусловлена как электрической анизотропией образующих их частиц, так и анизотропией поля сил взаимодействия частиц. Характер этого поля связан с симметрией кристаллической решетки. Все кристаллы, кроме кристаллов кубической системы, оптически анизотропны независимо от электрических свойств образующих их частиц.

В области оптических частот большинство кристаллов *немагнитно*, т. е. их относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Оптическая анизотропия немагнитных, оптически неактивных и прозрачных (т. е. не поглощающих свет) кристаллов обусловлена анизотропией диэлектрической восприимчивости κ и относительной диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1 + \kappa$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ КРИСТАЛЛООПТИКИ

1°. Для оптически неактивного, немагнитного ($\mu = 1$), прозрачного, оптически однородного анизотропного кристалла зависимость относительной диэлектрической проницаемости от направления может быть представлена графически. Если из произвольной точки O кристалла проводить по всевозможным направлениям радиусы-векторы $\mathbf{r}$, модули которых $r = \sqrt{\epsilon}$, где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость кристалла в направлении $\mathbf{r}$, то концы векторов $\mathbf{r}$ будут лежать на поверхности эллипсоида, называемого *оптической индикатрисой*, а также *эллипсоидом волновых нормалей* или *эллипсоидом индексов* (рис. V.7.1). Оси симметрии этого эллипсоида определяют три взаимно перпендикулярных *главных направления* в кристалле.

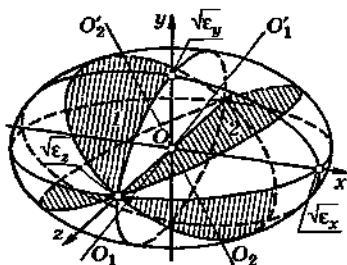


Рис. V.7.1

В прямоугольной декартовой системе координат, оси Ox , Oy и Oz которой проведены вдоль главных направлений, уравнение оптической индикатрисы имеет вид

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1,$$

где ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z — значения ϵ вдоль главных направлений, называемые *главными значениями диэлектрической проницаемости кристалла*. Во всех точках однородного кристалла, удовлетворяющего указанным выше требованиям, оптические индикатрисы тождественны, т. е. ориентация и размеры их полуосей одинаковы.

2°. В случае оптически изотропного кристалла ϵ не зависит от направления ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$), и оптическая индикатриса вырождается в сферу радиусом $r = \sqrt{\epsilon} = n$, где n — абсолютный показатель преломления изотропного кристалла.

Оптической осью (или *бинормалью*) анизотропного кристалла в точке O называют прямую, проходящую через точку O перпендикулярно к плоскости кругового сечения оптической индикатрисы. В общем случае оптическая индикатриса имеет вид трехосного эллипсоида ($\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$), так что через точку O можно провести два различных круговых сечения (плоскости 1 и 2 на рис. V.7.1) и две соответствующие им оптические оси $O_1O'_1$ и $O_2O'_2$. Такой кристалл называют *двуосным*. Если $\epsilon_x > \epsilon_y > \epsilon_z$ (см. рис. V.7.1), то оптические оси лежат в плоскости xOy симметрично относительно оси Oy . Сходственные оптические оси в различных точках кристалла попарно параллельны друг другу, т. е. характеризуют два избранных направления в двуосном кристалле.

3°. Если оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид вращения, то кристалл имеет только одну оптическую ось, совпадающую с осью вращения эллипсоида, и называется *одноосным*. Одноосный кристалл называют *оптически положительным*, если его оптическая ось совпадает с большой осью эллипсоида оптической индикатрисы (эллипсоид вытянут вдоль оси вращения), и *оптически отрицательным*, если она совпадает с малой осью эллипсоида оптической индикатрисы (эллипсоид сжат вдоль оси вращения).

4°. В оптически неактивном, немагнитном, прозрачном кристалле проекции векторов электрического смещения $\mathbf{D}$ и напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля на главные направления связаны соотношениями:

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x, \quad D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y, \quad D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z.$$

Вектор $\mathbf{D}$ совпадает по направлению с $\mathbf{E}$ только в тех случаях, когда вектор $\mathbf{E}$ параллелен одному из главных направлений.

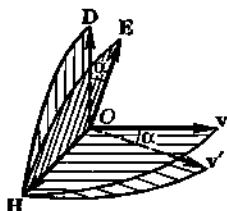


Рис. V.7.2

5°. Вследствие несовпадения направлений векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ линейно поляризованная плоская монохроматическая волна в анизотропном кристалле характеризуется двумя тройками взаимно перпендикулярных векторов: $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{v}'$ (рис. V.7.2). Скорость $\mathbf{v}'$ совпадает по направлению с вектором Пойнтинга и равна скорости переноса энергии волной. Ее называют *лучевой скоростью* волны. Скорость $\mathbf{v}$ называют *нормальной скоростью* волны. Она равна скорости распространения фазы и фронта волны по направлению нормали к последнему. Связь v и v' :

$$v' = \frac{v}{\cos \alpha},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Если $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к фронту волны, а $\mathbf{S}$ — единичный вектор луча (т. е. совпадающий по направлению с вектором Пойнтинга), то

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{N}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{N})], \quad n^2 = \frac{\mathbf{D}^2}{\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 n^2 \cos^2 \alpha} [\mathbf{D} - \mathbf{S}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{S})], \quad n'^2 = n^2 \cos^2 \alpha = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\epsilon_0 \mathbf{E}^2},$$

где $n = \frac{c}{v}$ — абсолютный показатель преломления в направлении $\mathbf{N}$, $n' = \frac{c}{v'}$.

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты главных направлений кристалла, то $\mathbf{N} = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}$ и нормальная скорость волны v в направлении вектора $\mathbf{N}$ удовлетворяет уравнению волновых нормалей Френеля:

$$\frac{N_x^2}{v^2 - b_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - b_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - b_z^2} = 0.$$

Соответственно для показателя преломления n в направлении $\mathbf{N}$

$$\frac{N_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{N_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{N_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}} = 0.$$

Здесь $b_x = \frac{c}{n_x}$, $b_y = \frac{c}{n_y}$ и $b_z = \frac{c}{n_z}$ — главные фазовые скорости волны, равные нормальным скоростям волн, у которых векторы $\mathbf{D}$ параллельны соответствующим главным направлениям; c — скорость света в вакууме, а $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ и $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$ — главные показатели преломления кристалла.

Для лучевой скорости v' в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} + S_z \mathbf{k}$,

$$\frac{b_x^2 S_x^2}{v'^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 S_y^2}{v'^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 S_z^2}{v'^2 - b_z^2} = 0.$$

Соответственно показатель преломления кристалла для луча $n' = \frac{c}{v'}$ можно найти из уравнения

$$\frac{S_x^2}{n'^2 - n_x^2} + \frac{S_y^2}{n'^2 - n_y^2} + \frac{S_z^2}{n'^2 - n_z^2} = 0.$$

6°. Из уравнения нормалей Френеля следует, что в общем случае в произвольном направлении $\mathbf{N}$ имеются два различных значения v_1 и v_2 нормальной скорости волны. Если оси координат выбраны так, что $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$, т. е. $b_x > b_y > b_z$, то направление $\mathbf{N}$, вдоль которого возможно только одно значение нормальной скорости v ($v_1 = v_2$), удовлетворяет условию:

$$N_x^2 = \frac{b_x^2 - b_y^2}{b_x^2 - b_z^2}, \quad N_y = 0, \quad N_z^2 = \frac{b_y^2 - b_z^2}{b_x^2 - b_z^2}.$$

Всего имеется четыре таких направления N , соответствующих двум бинормальям — оптическим осям двуосного кристалла. В одноосном кристалле имеется два указанных направления N , соответствующих его единственной оптической оси.

Если из точки O провести по всевозможным направлениям N векторы v соответствующих им нормальных скоростей, то концы этих векторов будут лежать на поверхности, называемой *поверхностью нормалей*. Ее уравнение в прямоугольной декартовой системе координат с началом в точке O и осями, проведенными вдоль главных направлений кристалла, имеет вид

$$(b_y^2 - r^2)(b_z^2 - r^2)x^2 + (b_z^2 - r^2)(b_x^2 - r^2)y^2 + \\ + (b_x^2 - r^2)(b_y^2 - r^2)z^2 = 0,$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = v^2$. Это уравнение двухполостной поверхности шестой степени относительно координат. Две полости соответствуют двум значениям нормальной скорости для данного направления N . Эти полости пересекаются в четырех точках, лежащих на двух бинормальных двуосного кристалла.

В случае одноосного кристалла с оптической осью Ox ($b_y = b_z = v_o$ и $b_x = v_e$) одна из полостей поверхности нормалей имеет вид сферы, $r^2 = v_o^2$, а вторая — овалоида,

$(v_o^2 - r^2)x^2 + (v_e^2 - r^2)(y^2 + z^2) = 0$. Здесь v_o и v_e — скорости обыкновенной и необыкновенной волн, соответственно. Оваловид касается сферы в двух точках ее пересечения с оптической осью.

7°. Геометрическое место точек, удаленных от точки O на расстояние $r = v'$, где v' — лучевая скорость в данном направлении, называют *лучевой поверхностью* или *поверхностью волны*. Она представляет собой поверхность равной фазы, т. е. волновую поверхность для волн, распространяющихся в анизотропном кристалле от точечного источника, расположенного в точке O . Лучевая поверхность описывается уравнением четвертой степени относительно координат:

$$\frac{b_x^2 x^2}{r^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 y^2}{r^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 z^2}{r^2 - b_z^2} = 0,$$

или

$$r^2(b_x^2 x^2 + b_y^2 y^2 + b_z^2 z^2) - b_x^2(b_y^2 + b_z^2)x^2 - \\ - b_y^2(b_x^2 + b_z^2)y^2 - b_z^2(b_x^2 + b_y^2)z^2 + b_x^2 b_y^2 b_z^2 = 0.$$

Эта поверхность также двухполостная, так как каждому направлению единичного вектора $\mathbf{S}$ луча в общем случае соответствуют два различных значения лучевой скорости v' . Полости лучевой поверхности пересекаются друг с другом в четырех точках, попарно лежащих на двух прямых, пересекающихся в точке O . Эти прямые называют *бирадиалами* или *оптическими осями первого рода*.

Для одноосного кристалла имеется одна бирадиаль, которая совпадает с его оптической осью Ox . В этом случае одна из полостей лучевой поверхности имеет вид сферы: $r^2 = v_o^2 = b_x^2 = \frac{c^2}{\epsilon_x}$, а вторая — эллипсоида вращения вокруг оптической оси Ox :

$$\frac{x^2}{v_o^2} + \frac{y^2 + z^2}{v_e^2} = 1,$$

где $v_o^2 = b_y^2 = b_z^2 = \frac{c^2}{\epsilon_y} = \frac{c^2}{\epsilon_z}$. Сфера и эллипсоид касаются друг друга в двух точках пересечения их с оптической осью. Если $v_o > v_e$ (оптически отрицательный кристалл), то сфера вписана вокруг эллипсоида; $v_o < v_e$ (оптически отрицательный кристалл), то сфера вписана в эллипсоид.

8°. В анизотропном кристалле в произвольном направлении нормали $\mathbf{N}$ могут распространяться только две плоские волны, линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Направления векторов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ этих волн совпадают с осями эллипсоида, получающегося при пересечении оптической индикатрисы с плоскостью, проведенной через точку O перпендикулярно к вектору $\mathbf{N}$. Нормальные скорости этих волн v_1 и v_2 связаны с полуосями $\sqrt{\epsilon_1}$ и $\sqrt{\epsilon_2}$ эллиптического сечения соотношениями: $v_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}$ и $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$. Век-

торы E_1 и E_2 этих волн также лежат в перпендикулярных плоскостях (рис. V.7.3), причем им соответствуют два различных по направлению лучевых вектора S_1 и S_2 и два различных значения лучевой скорости $v'_1 =$

$$= \frac{v_1}{\cos \alpha_1} \text{ и } v'_2 = \frac{v_2}{\cos \alpha_2}.$$

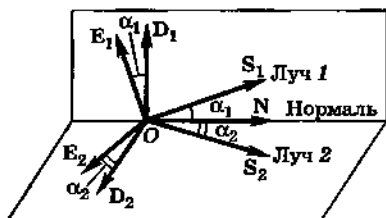


Рис. V.7.3

Аналогично для заданного направления луча (вектор S) возможны только два взаимно перпендикулярных направления колебаний вектора E (E_1 и E_2), соответствующие двум значениям v'_1 и v'_2 лучевой скорости в направлении S (рис. V.7.4).

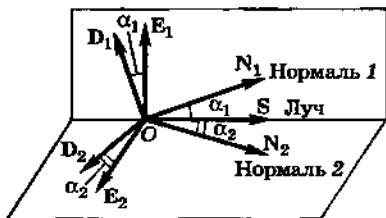


Рис. V.7.4

3. ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

1°. Зависимость лучевой скорости плоской волны в анизотропном кристалле от направления распространения и характера поляризации волны приводит к тому, что лучи света, преломляясь на поверхности кристал-

ла, раздваиваются. Это явление называют *двойным лучепреломлением*, а анизотропные кристаллы — *двокопреломляющими кристаллами*.

2°. В двуосном кристалле оба преломленных луча не подчиняются обычным законам преломления света на границе раздела двух изотропных сред. В одноосном кристалле один из преломленных лучей, называемый *обыкновенным*, подчиняется этим законам, а второй — им не подчиняется и потому называется *необыкновенным лучом*. В общем случае необыкновенный луч не лежит в плоскости падения и к нему неприменим закон Снеллиуса.

3°. Плоскость, проходящую через луч и пересекающую его оптическую ось, называют *главной плоскостью* (*главным сечением*) *одноосного кристалла* для этого луча. Обыкновенный луч поляризован в плоскости, перпендикулярной к главной плоскости, т. е. вектор E обыкновенного луча перпендикулярен к главной плоскости. Необыкновенный луч поляризован в главной плоскости: вектор E колеблется в главной плоскости. В общем случае плоскости поляризации обыкновенного и необыкновенного лучей не вполне перпендикулярны друг к другу, так как главные плоскости кристалла для этих лучей могут не совпадать. Однако обычно угол между главными плоскостями для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответствующих одному и тому же падающему лучу, мал. Он в точности равен нулю, если оптическая ось кристалла лежит в плоскости падения.

4°. Вектор E обыкновенного луча всегда перпендикулярен к оптической оси, т. е. совпадает с главным направлением в одноосном кристалле. Поэтому показатель преломления кристалла для обыкновенного луча не зависит от направления луча в кристалле и равен n_o :

$$n_o = \frac{c}{v_o}.$$

Вектор E необыкновенного луча может составлять с оптической осью любые углы от 0 до $\pi/2$. Поэтому показатель преломления кристалла для необыкновенного луча n'_e зависит от направления этого луча по отношению к оптической оси.

Вдоль оптической оси скорости обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковы ($n'_e = n_o$). В направлении, перпендикулярном к оптической оси, $n'_e = n_e = \frac{c}{v_e}$, т. е. наиболее сильно отличается от n_o . Для оптически положительного кристалла $n'_e \geq n_o$, для оптически отрицательного кристалла $n'_e \leq n_o$.

5°. Если на плоскую поверхность одноосного кристалла падает неполяризованная монохроматическая плоская световая волна, то в кристалле распространяются две линейно поляризованные плоские волны — обыкновенная и необыкновенная. Их волновые поверхности можно найти по принципу Гюйгенса, т. е. как огибающие волновых поверхностей соответствующих вторичных волн. Волновые поверхности вторичных волн определяются их лучевыми скоростями. Для обыкновенных волн они имеют сферическую форму, а для необыкновенных — эллипсоидов вращения вокруг прямых, проведенных через точечные источники вторичных волн в направлении оптической оси кристалла.

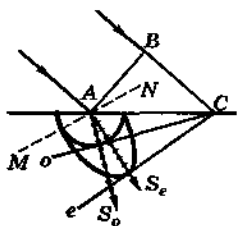


Рис. V.7.5

Графический метод построения с помощью принципа Гюйгенса фронтов обыкновенной и необыкновенной плоских преломленных волн в оптически отрицательном одноосном кристалле, а также соответствующего им обыкновенного и необыкновенного лучей показан на рис. V.7.5. На этом рисунке AB — фронт плоской волны, падающей на плоскую поверхность AC

кристалла; MN — направление оптической оси (лежит в плоскости падения); Co — фронт обыкновенной волны; Ce — фронт необыкновенной волны; AS_o — обыкновенный луч, AS_e — необыкновенный луч. Направление колебаний векторов E в обыкновенном и необыкновенном лучах показаны соответственно точками и поперечными черточками, нанесенными на лучи.

Для обыкновенной волны направления луча и нормали к фронту всегда совпадают. Для необыкновенной волны они, вообще говоря, различны. Нормаль к фронту необыкновенной волны, в отличие от обыкновенного луча, всегда лежит в плоскости падения.

6°. Закономерности распространения света в кристаллической пластинке, вырезанной из одноосного кристалла, зависят от ориентации оптической оси по отношению к поверхности пластинки и падающему лучу.

а) Пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси. Если луч света направлен вдоль оптической оси, то двойное лучепреломление отсутствует и свет остается неполяризованным. Если луч света направлен под углом i к оптической оси, то происходит двойное

лучепреломление. Отношение $\frac{\sin i}{\sin r_o}$, где r_o — угол преломления обыкновенного луча, постоянно. Отношение $\frac{\sin i}{\sin r_e}$, где r_e — угол преломления необыкновенного луча, меняется в зависимости от угла падения i .

б) Пластинка вырезана параллельно оптической оси. Если плоскость падения света параллельна оптической оси кристалла, то обыкновенный и необыкновенный лучи лежат в той же плоскости. Нормаль к фронту необыкновенной волны преломлена слабее (сильнее), чем нормаль к фронту обыкновенной волны в отрицательном (положительном) кристалле. Для соответствующих лучей закономерности могут быть иными. Если плоскость падения составляет угол α с оптической осью ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), то

обыкновенный луч остается в плоскости падения, а необыкновенный выходит из нее. Если плоскость падения перпендикулярна к оптической оси, то обыкновенный и необыкновенный лучи остаются в плоскости падения. В этом случае показатель преломления необыкновенного луча не зависит от его направления и равен n_e .

7°. Если на одноосный кристалл падает естественный свет, то интенсивности обыкновенной I_o и необыкновенной I_e волн на входе в кристалл одинаковы:

$$I_o = I_e = \frac{1}{2} I,$$

где I — интенсивность падающего света.

8°. В поглощающих анизотропных кристаллах поглощение света, вообще говоря, также анизотропно, т. е. различно в зависимости от ориентации электрического вектора волны по отношению к кристаллографическим осям. Это явление называют *дихроизмом* (или *плеохроизмом*). Так, например, одноосный кристалл турмалина поглощает обыкновенный луч во много раз сильнее, чем необыкновенный. Поглощение зависит также от частоты света. Поэтому при освещении дихроичного кристалла белым светом кристалл по-разному окрашен в зависимости от направления наблюдения.

4. ИСКУССТВЕННОЕ ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

1°. Оптически изотропное тело при его деформации становится оптически анизотропным. В случае одностороннего сжатия или растяжения оптические свойства тела подобны оптическим свойствам одноосного кристалла, направление оптической оси которого совпадает с направлением деформации. Максимальное различие в показателях преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей соответствует направлению лучей, перпендикулярному к оптической оси, и зависит от степени деформации:

$$n_o - n_e = k\sigma,$$

где σ — нормальное напряжение, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств тела. Обнаружение искусственной анизотропии является очень чувствительным методом оценки напряжений в твердых телах (*поляризационно-оптический метод*).

2°. Оптически изотропный диэлектрик (твердый, жидкий или газообразный) может стать оптически анизотропным при внесении его во внешнее однородное электрическое поле. Это явление называют *эффектом Керра*. Под действием поля диэлектрик по своим оптическим свойствам становится подобным одноосному кристаллу, оптическая ось которого параллельна направлению поля.

Для монохроматического света, распространяющегося в веществе в направлении, перпендикулярном к век-

тору $E_{\text{вн}}$ напряженности внешнего однородного электрического поля, разность показателей преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей равна

$$n_e - n_o = k E_{\text{вн}}^2.$$

Величину $B = \frac{k}{\lambda}$, где λ — длина волны света в вакууме, называют *постоянной Керра*. Значение B зависит от природы вещества, длины волны λ и температуры, как правило, быстро уменьшаясь с ростом последней.

Для большинства веществ $B > 0$, т. е. эти вещества по своим оптическим свойствам в однородном электрическом поле подобны оптически положительным одноосным кристаллам.

Часто пользуются другой константой Керра $K = \frac{B\lambda}{n}$, где n — абсолютный показатель преломления вещества в отсутствие внешнего электрического поля. Явление Керра практически безынерционно: запаздывание в изменении $n_e - n_o$ по сравнению с изменением $E_{\text{вн}}$ меньше 10^{-9} с.

3°. В газах с неполярными электрически анизотропными молекулами эффект Керра обусловлен поляризацией этих молекул во внешнем электрическом поле и нарушением полной хаотичности в расположении этих молекул. В результате совместного влияния ориентирующего действия электрического поля на наведенные дипольные моменты молекул и соударений между молекулами в процессе их теплового движения в газе возникает преимущественная ориентация молекул. При этом относительная диэлектрическая проницаемость газа ϵ максимальна в направлении вектора $E_{\text{вн}}$, так что $n_e > n_o$ и $B > 0$.

В газах с полярными электрически анизотропными молекулами во внешнем электрическом поле возникает преимущественная ориентация постоянных дипольных моментов молекул по направлению $E_{\text{вн}}$. Однако направление максимальной поляризуемости молекул может составлять некоторый угол α с направлением ее постоянного дипольного момента. Если $\alpha = 0$, то $n_e > n_o$ и $B > 0$; если $\alpha = \pi/2$, то $n_e < n_o$ и $B < 0$.

Для жидкостей эта классическая ориентационная теория описывает явление Керра лишь качественно, так как в ней не учитываются силы межмолекулярного взаимодействия, которые в жидкостях играют существенную роль.

4°. Возникновение искусственной оптической анизотропии у изотропных веществ (жидкостей, стекол, коллоидов) под действием сильного однородного внешнего поля называют *эффектом Коттона—Мутона*. При этом оптической осью является направление магнитного поля. Разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном к оптической оси, зависит от напряженности магнитного поля $H_{\text{вн}}$:

$$n_e - n_o = k' H_{\text{вн}}^2.$$

Величину $C = \frac{k'}{\lambda}$ называют *постоянной Коттона—Мутона*, она зависит от природы вещества, длины волны λ и температуры.

5. АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ И КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

1°. Для исследования характера и степени поляризации света применяются устройства, называемые *анализаторами*. В качестве анализаторов используются те же устройства, которые служат для получения линейно поляризованного света (поляризаторы).

Если световая волна, входящая в анализатор, линейно поляризована, то для интенсивности волны, выходящей из анализатора, справедлив *закон Малюса*:

$$I = k_a I_0 \cos^2 \gamma$$

где I_0 — интенсивность входящего света, k_a — коэффициент прозрачности анализатора, γ — угол между плоскостями поляризатора входящего света и света, пропускаемого анализатором.

2°. В случае падения на анализатор естественного света, интенсивность которого равна $I_{\text{ест}}$, интенсивность I линейно поляризованного, выходящего из ана-

лизатора, остается постоянной при вращении анализатора вокруг направления распространения света, т. е.

при изменении угла γ : $I = \frac{k_a I_{\text{ест}}}{2}$. Независимость интен-

сивности света, выходящего из анализатора, от угла γ наблюдается также при падении на анализатор циркулярно поляризованного света.

Если падающий свет частично поляризован, т. е. состоит из естественного света интенсивностью $I_{\text{ест}}$ и линейно поляризованного интенсивностью $I_{\text{пол}}$, то при вращении анализатора (изменении угла γ) интенсивность I проходящего света изменяется от I_{max} до I_{min} . Степень линейной поляризации Δ падающего света равна

$$\Delta = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{ест}} + I_{\text{пол}}} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}.$$

Такая же картина наблюдается в том случае, когда падающий на анализатор свет эллиптически поляризован и не может считаться частично поляризованным.

3°. Если на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из не поглощающего свет одноосного кристалла, параллельно его оптической MN падает нормально плоская, линейно поляризованная, монохроматическая волна, то в пластинке распространяются вдоль одного и того же исходного направления, но с разными скоростями, две волны — обыкновенная и необыкновенная. Если ось Oz совпадает с направлением распространения этих волн, то векторы электрической напряженности их полей колеблются вдоль взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy . Амплитуды векторов E_x (обыкновенная волна) и E_y (необыкновенная волна), равные a и b , зависят от амплитуды вектора E в падающей волне и от угла α между вектором E и оптической осью кристалла: $a = A \sin \alpha$ и $b = A \cos \alpha$.

На входе в пластинку разность фаз колебаний векторов E_x и E_y равна нулю. На выходе из пластинки толщиной d разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ и оптическая разность хода Δs обыкновенной и необыкновенной волн равны:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)d \quad \text{и} \quad \Delta s = (n_e - n_o)d,$$

где λ — длина волны в вакууме, n_e и n_o — показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей. Соответственно, свет, выходящий из пластинки, в общем случае эллиптически поляризован:

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - 2 \frac{E_x E_y}{ab} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \varphi.$$

4°. Возможны следующие частные случаи ($m = 0, 1, 2, \dots$):

1) *пластинка в четверть волны*: $\Delta s = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{4}$,

$$\Delta\varphi = \pm(2m + 1)\frac{\pi}{2};$$

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1,$$

оси эллипса совпадают с главными направлениями в пластинке. Если, кроме того, $a = b$, то на выходе из пластинки волна будет поляризована по кругу (*циркулярно поляризованный свет*);

2) *пластинка в полволны*: $\Delta s = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$,

$$\Delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi;$$

$$E_y = -\frac{b}{a} E_x,$$

свет линейно поляризован в плоскости, составляющей с плоскостью поляризации падающего света угол $(\pi - 2\alpha)$;

3) *пластинка в целую волну*: $\Delta s = \pm m\lambda$, $\Delta\varphi = \pm 2\pi m$;

$$E_y = \frac{b}{a} E_x$$

Свет линейно поляризован в той же плоскости, что и падающий на пластинку.

6. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛУЧЕЙ

1°. Естественный свет состоит из множества элементарных некогерентных пучков волн, соответствующих различным актам спонтанного излучения атомов или молекул источника света. Эти пучки линейно поляризо-

ваны во всевозможных плоскостях. Обыкновенная волна, распространяющаяся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, в основном образуется за счет тех лучей волн, плоскости поляризации которых наклонены к главной плоскости кристалла под углами $\alpha < \pi/4$. Соответственно, необыкновенная волна в основном образуется за счет тех лучей, у которых $\alpha > \pi/4$. Поэтому обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него естественного света, некогерентны.

Обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся в одноосном кристалле при падении на него линейно поляризованного света, когерентны, так как содержат попарно когерентные составляющие, соответствующие каждому из лучей волн, прошедших через поляризатор.

2°. При нормальном падении плоской, монохроматической, линейно поляризованной волны на плоскопараллельную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла параллельно его оптической оси, на выходе из пластинки между обыкновенной и необыкновенной волнами возникает разность фаз:

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d.$$

Хотя эти волны когерентны и распространяются по одному и тому же направлению, они не могут интерферировать, так как поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. В результате их наложения получается эллиптически поляризованный свет.

Для получения интерференционного усиления или ослабления этих двух волн необходимо с помощью анализатора выделить из них составляющие, поляризованные в одной плоскости и способные поэтому интерферировать (рис. V.7.6).

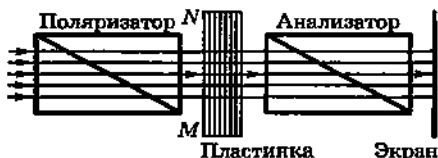


Рис. V.7.6

Интерференционная картина, даваемая анализатором, зависит от разности фаз $\Delta\varphi$, от длины волны падающего света, от угла α между его плоскостью поляризации и оптической осью пластинки, а также от взаимной ориентации направлений плоскостей I и II поляризации света, пропускаемого поляризатором и анализатором.

Анализатор и поляризатор называют *скрещенными*, если угол β между плоскостями I и II равен $\pi/2$, и *параллельными*, если $\beta = 0$.

3°. *Интерференция в монохроматическом свете.*

Если кристаллическая пластинка не поглощает свет, а коэффициент прозрачности анализатора $k_a = 1$, то интенсивность света, выходящего из анализатора равна:

$$I = I_0 \left[\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \sin 2(\alpha - \beta) \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right],$$

где I_0 — интенсивность поляризованного света, падающего на кристаллическую пластинку.

1. При $\beta = 0$

$$I_{\parallel} = I_0 \left[1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \right].$$

Интенсивность света I зависит от $\Delta\varphi$ сильнее всего при $\alpha = \pi/4$. В этом случае $I_{\min} = 0$, если $\Delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi$ и $I_{\max} = I_0$, если $\Delta\varphi = \pm 2m\pi$. При $\alpha = 0$ или $\pi/2$ интерференции нет, так как в пластинке распространяется только одна волна — необыкновенная или обыкновенная.

2. При $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Интенсивность света $I_{\perp}$ зависит от $\Delta\varphi$ сильнее всего при $\alpha = \pi/4$. В этом случае $I_{\perp \max} = I_0$ при $\Delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi$ и $I_{\perp \min} = 0$ при $\Delta\varphi = \pm 2m\pi$. При $\alpha = 0$ или $\pi/2$ свет не проходит через анализатор.

4°. *Интерференция в белом свете.* Величина $\Delta\varphi$ для света разных длин волн оказывается различной. Поэтому из соотношений п. 3° для монохроматических составляющих белого света следует, что при любых значениях $\Delta\varphi$, β и α экран освещен, за исключением

случаев $\beta = \pi/2$ и $\alpha = 0$ или $\pi/2$, когда свет через анализатор не проходит. Если $\beta = 0$ и $\alpha = 0$ или $\pi/2$, то экран освещен белым светом, во всех остальных случаях экран освещен окрашенным светом, причем при $\alpha = \pi/2$ изменение угла β с 0 на $\pi/2$ изменяет окраску экрана на дополнительную.

7. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

1°. *Вращение плоскости поляризации* заключается в повороте плоскости поляризации световой волны при прохождении ее через некоторые вещества, называемые *оптически активными*.

Оптической активностью обладают некоторые кристаллы, в том числе и не обнаруживающие явления двойного лучепреломления, многие чистые жидкости, растворы и газы. Все вещества, оптически активные в жидком состоянии (в том числе в растворах), обладают в большей или меньшей степени этим же свойством в кристаллическом состоянии. Обратное положение не всегда имеет место.

2°. В анизотропных кристаллах вращение плоскости поляризации в чистом виде наблюдается для света, распространяющегося вдоль оптической оси. Для других направлений распространения света явление усложняется благодаря двойному лучепреломлению.

Для большинства оптически активных кристаллов обнаружено существование двух модификаций, осуществляющих вращение плоскости поляризации соответственно по и против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу). Первую модификацию называют *правовращающей* или *положительной*, вторую — *левовращающей* или *отрицательной*.

3°. В твердых телах угол φ поворота плоскости поляризации прямо пропорционален длине d пути светового луча в теле:

$$\varphi = ad,$$

где a — *вращательная способность* (удельное вращение), зависящая от рода вещества, температуры и длины волны. Эта формула остается справедливой и для двоякопреломляющего кристалла, если свет в нем распространяется вдоль оптической оси; значения a в двусосном кристалле могут быть неодинаковыми

для разных оптических осей. Для лево- и правовращающихся модификаций вращательные способности одинаковы.

4°. Для растворов угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi = [\alpha]cd = [\alpha] \rho Kd,$$

где $[\alpha]$ — удельное вращение, c — объемно-весовая концентрация оптически активного вещества в растворе (отношение массы этого вещества к объему раствора),

ρ — плотность раствора и $K = \frac{c}{\rho}$ — весовая концентрация (отношение массы оптически активного вещества к массе всего раствора).

Величина $[\alpha]$ зависит от природы оптически активного вещества и растворителя, температуры и длины волны света. Весьма чувствительный метод определения концентрации c или K , основанный на этом соотношении, называют *поляризметрией (сахариметрией)*.

5°. Теория Френеля представляет линейно поляризованный свет до входа в оптически активное вещество как совокупность двух циркулярно поляризованных волн с одинаковыми частотами и амплитудами и объясняет вращение его плоскости поляризации существованием двух фазовых скоростей света в оптически активном веществе, соответствующих его правой и левой крутовым поляризациям.

Если фазовые скорости в веществе для поляризованных указанным образом волн соответственно равны v_d (показатель преломления n_d) и v_g (показатель преломления n_g), то по прохождении светом пути d в веществе угол поворота плоскости поляризации (рис. V.7.7) равен

$$\varphi = \frac{\varphi_d - \varphi_g}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} (n_g - n_d),$$

где λ — длина волны света в вакууме. Правовращающими являются вещества с $n_g > n_d$, левовращающими — с $n_g < n_d$.

6°. Оптически неактивные вещества под действием магнитного поля приобретают способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль

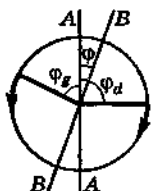


Рис. V.7.7.

направления поля. Это явление называют *эффектом Фарадея*. Угол поворота плоскости поляризации равен

$$\varphi = VdB,$$

где B — индукция однородного магнитного поля, d — длина пути света в веществе, V — *постоянная Верде* (*удельное магнитное вращение*), зависящая от природы вещества, температуры и длины волны света. Направление вращения плоскости поляризации зависит только от природы вещества и направления магнитного поля. Знак вращения отсчитывается для наблюдателя, смотрящего вдоль магнитного поля. Большинство веществ дает правое, положительное вращение; все *диамагнитные* и некоторые *парамагнитные вещества* дают левое, отрицательное вращение.

7°. Естественная оптическая активность вещества в некристаллическом состоянии обусловлена асимметрией молекул. В кристаллических веществах оптическая активность может быть также обусловлена особенностями расположения частиц в решетке.

Магнитное вращение плоскости поляризации обусловлено возникновением асимметрии оптических свойств вещества под действием магнитного поля.

8°. Зависимость вращения плоскости поляризации от длины волны света называют *вращательной дисперсией*. В первом приближении в области достаточно длинных волн, удаленной от полос поглощения света веществом, угол вращения плоскости поляризации обратно пропорционален квадрату длины волны (*закон Био*):

$$\varphi \sim \lambda^{-2}.$$

Глава 8

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

1. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

1°. *Дисперсией света* называют явление зависимости абсолютного показателя преломления вещества n от частоты ν света (или от длины волны в вакууме $\lambda = \frac{c}{\nu}$):

$$n = f(\lambda) = \varphi(\omega),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота световой волны. Дисперсию света называют *нормальной* в случае, если показатель преломления монотонно возрастает с увеличением частоты (убывает с увеличением длины волны); в противном случае дисперсию света называют *аномальной* (рис. V.8.1). Нормальная дисперсия света наблюдается вдали от полос или линий поглощения света веществом, аномальная — в пределах полос или линий поглощения.

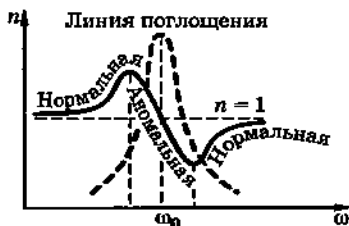


Рис. V.8.1

2°. Согласно классической электронной теории, дисперсия света обусловлена взаимодействием света с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны. Для видимого света частота столь велика ($\nu \approx 10^{15}$ Гц), что существенны лишь вынужденные колебания внешних (наиболее слабо связанных) электронов атомов, молекул или ионов. Эти электроны называют *оптическими электронами*. В процессе вынужденных колебаний оптических электронов в поле монохроматической волны с частотой ν периодически изменяются дипольные электрические моменты молекул и последние излучают вторичные электромагнитные волны той же частоты ν .

Средние расстояния между молекулами во много раз меньше протяженности одного пути волн. Поэтому вторичные волны, излучаемые весьма большим числом соседних молекул оптически однородной среды когерентны как между собой, так и с первичной волной. При наложении они интерферируют, причем результат интерференции зависит от соотношения их амплитуд и начальных фаз. В оптически однородной и изотропной

среде при этом образуется проходящая волна, фазовая скорость которой зависит от частоты, а направление распространения совпадает с направлением распространения первичной волны.

3°. Для изотропной поглощающей свет среды

$$\bar{n}^2 = \bar{\epsilon} = 1 + \bar{\chi},$$

где $\bar{n} = n - ik$ — комплексный показатель преломления среды, $\bar{\epsilon}$ — комплексная относительная диэлектрическая проницаемость, $\bar{\chi}$ — комплексная диэлектрическая восприимчивость среды, а k — коэффициент, характеризующий поглощение света в среде. Комплексность $\bar{n}$ и $\bar{\epsilon}$ обусловлена тем, что в поглощающей среде векторы поляризованности P_e и напряженности E электрического поля, колеблются со сдвигом по фазе. В непоглощающей среде этот сдвиг равен нулю. Поэтому такая среда характеризуется действительными значениями χ , ϵ и n ($k = 0$).

Если N_0 — концентрация молекул, то

$$\bar{n}^2 = 1 + \frac{N_0 p_e}{\epsilon_0 E},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, p_e — наведенный дипольный момент молекулы в поле волны напряженностью E .

4°. В классической электронной теории каждая молекула рассматривается как совокупность линейных осцилляторов — заряженных частиц с зарядами q_k и массами m_k . Собственные циклические частоты осцилляторов ω_{0k} соответствуют набору циклических частот поглощения света рассматриваемым веществом. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний осциллятора:

$$\ddot{s}_k + 2\delta_k \dot{s}_k + \omega_{0k}^2 s_k = \frac{q_k}{m_k} E_{эф},$$

где s_k — смещение заряда q_k из положения равновесия, δ_k — коэффициент затухания свободных колебаний заряда, $E_{эф}$ — напряженность эффективного поля. В газах при обычных условиях $E_{эф}$ практически совпадает

с напряженностью поля световой волны. Для монохроматического света $E = E_0 e^{i\omega t}$, и в газах

$$P_e = \sum_k q_k s_k = \sum_k \frac{q_k^2 E}{m_k} \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i \cdot 2\delta_k \omega} = \\ = \frac{e^2 E}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i \cdot 2\delta_k \omega},$$

где m и e — масса и заряд электрона, а

$$f_k = \left(\frac{q_k}{e} \right)^2 \frac{m}{m_k}$$

— сила осциллятора k -го сорта. Отсюда следует, что для газов

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{(\omega_{0k}^2 - \omega^2) f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2}, \\ n\kappa = \frac{N_0 e^2 \omega}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{\delta_k f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2 \omega^2}.$$

5°. Влияние поглощения существенно лишь при частотах, близких к ω_{0k} , вне этих областей частот

$\delta_k^2 \omega^2 \ll (\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2$, и для газов ($n^2 + 1 \approx 2n$)

$$n \approx 1 + \frac{N_0 e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2}.$$

Значения f_k и ω_{0k} в классической теории дисперсии считают известными из экспериментов. Их теоретический расчет возможен только в квантовой теории.

6°. В изотропной среде, поляризация которой в высокочастотном поле световой волны имеет чисто электронную природу, напряженность эффективного поля

$$E_{эф} = \frac{\bar{\epsilon} + 2}{3} E = \frac{\bar{n}^2 + 2}{3} E,$$

где E — напряженность поля волны. В этом случае справедлива формула Лоренца—Лоренца:

$$\frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^2 + 2} = \frac{N_0}{3} \bar{\alpha},$$

где $\bar{\alpha}$ — комплексная электронная поляризуемость молекулы.

В отсутствие поглощения эта формула совпадает с формулой Клаузиуса—Мосотти:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} N_0 \alpha.$$

7°. Величину

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho},$$

где ρ — плотность, называют *удельной рефракцией* вещества. Для данного вещества r практически не зависит от плотности, температуры и агрегатного состояния. Величины $A_i r_i$ и $\Omega = \mu r$, где A_i — атомная масса, r_i — удельная рефракция атомов i -го сорта в молекуле с молекулярной массой μ , называют соответственно *атомными* и *молярной (молекулярной) рефракциями*. Часто молярная рефракция аддитивно складывается из атомных: $r = \frac{1}{\mu} \sum_k k_i A_i r_i$, где k_i — число атомов i -го сорта в молекуле.

8°. В классической теории дисперсии света в металлах учитывают как свободные электроны, так и электроны, связанные в ионах металла. Для свободных электронов частоты $\omega_{0k} = 0$. Поэтому

$$\tilde{n}^2 - 1 = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{N_e}{2i\delta_e \omega - \omega^2} + N_0 \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + 2i\delta_k \omega} \right],$$

где N_e — концентрация свободных электронов, а δ_e — коэффициент, учитывающий потери энергии при вынужденных колебаниях свободных электронов. В области малых частот ($\omega \ll \delta_e$)

$$\tilde{n}^2 - 1 \approx \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{N_e}{2i\delta_e \omega}$$

и

$$n_K \approx \frac{e^2 N_e}{4m\epsilon_0 \delta_e \omega}.$$

Последнее выражение совпадает с приведенным в п. 5.4.3°, если

$$\delta_e = \frac{e^2 N_e}{2m\gamma} = \frac{1}{\tau},$$

где γ — удельная проводимость металла, а τ — средняя продолжительность свободного пробега электронов в металле.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1°. Произвольный, периодический во времени физический процесс, зависимость которого от времени описывается периодической с циклической частотой ω функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, может быть представлен в виде суперпозиции бесконечного числа гармоничных колебательных процессов, частоты которых образуют дискретную последовательность. Эту сумму называют *рядом Фурье*:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

где A_n и B_n — коэффициенты Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) dt, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \cos n\omega t dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \sin n\omega t dt,$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, а начальный момент времени t_0 произволен.

Ряд Фурье может быть также записан в виде

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \psi_n).$$

Совокупность величин C_n образует *спектр амплитуд функции* $\varphi(t)$, а совокупность ψ_n — *спектр начальных фаз*; *спектр интенсивностей* определяется совокупностью величин C_n^2 .

2°. Произвольный, непериодический во времени физический процесс может быть представлен в виде ряда Фурье (п.1°) в интервале времени (в течение которого процесс удовлетворяет условиям Дирихле) $t_0 \leq t < t_0 + T$, где величины t_0 и $T > 0$ произвольны. Однако вне указанного интервала времени ряд Фурье не будет равен представляемой им функции. Представление же рядом Фурье периодического во времени процесса имеет силу в любой момент времени.

3°. Произвольный непериодический во времени физический процесс, зависимость которого от времени описывается функцией $f(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном интервале времени, причем интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ сходится, может быть представлен в виде бесконечной суммы периодических во времени колебательных процессов, циклические частоты которых ω образуют непрерывную последовательность. Эту сумму называют *интегралом Фурье*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi = A(\omega) - iB(\omega),$$

а символ Re означает действительную часть следующего за ним комплексного выражения,

или

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Величины

$$dC = \frac{1}{\pi} C(\omega) d\omega$$

имеют смысл бесконечно малых комплексных амплитуд синусоидальных колебаний с циклическими частотами от ω до $\omega + d\omega$, из которых составляется $f(t)$. Соответственно величину $C(\omega)$ называют *спектральной плотностью амплитуды*. Величину

$$g^2(\omega) = C(\omega) C^*(\omega) = |C(\omega)|^2,$$

где $C^*(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$ — функция, комплексно сопряженная $C(\omega)$, называют *спектральной плотностью интенсивности*. Она характеризует распределение энергии в спектре.

4°. Примером ограниченного во времени колебательного процесса может служить акт излучения цуга волн. Функция $f(t)$, соответствующая простейшему цугу волн в виде оборванной

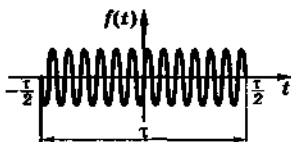


Рис. V.8.2

синусоиды (рис. V.8.2), излучаемому источником, который колеблется с циклической частотой ω^* , имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\frac{\tau}{2}, \\ a \sin \omega_0 t & \text{при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

где τ — продолжительность излучения цуга, a — амплитуда.

Представление $f(t)$ в виде интеграла Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega,$$

где

$$\begin{aligned} B(\omega) &= 2a \int_0^{\tau/2} \sin \omega_0 \xi \sin \omega \xi \, d\xi = \\ &= a \left\{ \frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega_0 - \omega} - \frac{\sin \left[(\omega_0 + \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega_0 + \omega} \right\}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\omega_0 \tau \gg 2\pi$, т. е. длительность излучения во много раз больше периода колебаний источника волн, функция $g^2(\omega) = [B(\omega)/\pi]^2$, характеризующая *распределение интенсивности* в спектре, выражается следующей приближенной формулой:

$$g^2(\omega) = \frac{a^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega_0 - \omega} \right\}^2.$$

График этой функции приведен на рис. V.8.3. Центральный максимум соответствует $\omega = \omega_0$ и равен $\left(\frac{a\tau}{2\pi} \right)^2$.

Расстояние $\tilde{\Delta\omega}$ между двумя нулевыми значениями $g^2(\omega)$, ограничивающими центральный максимум, равно $\frac{4\pi}{\tau}$. Следовательно,

$$\tilde{\Delta\omega} \tau = 4\pi, \text{ и } \tilde{\Delta\omega} \Delta x = 4\pi c,$$

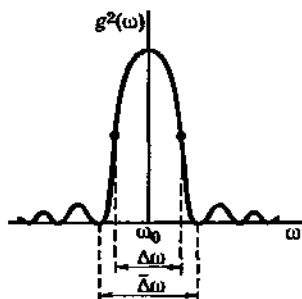


Рис. V.8.3

где $\Delta x = \tau c$ — пространственная протяженность пуга в вакууме. Чем короче пуг, тем шире его спектр, т. е. тем сильнее пуг отличается от монохроматической волны.

5°. Спектр волны называют *сплошным*, если спектральная плотность ее интенсивности $g^2(\omega)$ — непрерывная функция ω , отличная от нуля в широком интервале частот. Сплошной спектр имеет, например, свет, излучаемый раскаленными твердыми телами и жидкостями. Свет со сплошным спектром можно рассматривать как совокупность монохроматических волн, частоты которых образуют непрерывную последовательность.

Спектр волны называют *линейчатым*, если $g^2(\omega)$ практически отлична от нуля лишь в узких дискретных интервалах частот $\omega_i \pm \frac{1}{2} \bar{\Delta}\omega_i$ ($\bar{\Delta}\omega_i \ll \omega_i$), каждому из которых соответствует своя *спектральная линия*. Свет с линейчатым спектром излучают, например, атомы раскаленных разреженных газов. В первом приближении такой свет можно рассматривать как совокупность монохроматических волн с частотами ω_i .

Спектр волны называют *полосатым*, если соответствующие ему спектральные линии образуют дискретные группы — *полосы*, которые состоят из множества тесно расположенных линий.

6°. *Шириной (полушириной) спектральной линии* называют интервал частот $\Delta\omega$ (или длин волн $\Delta\lambda$) между точ-

ками ее контура, для которых $g^2 = \frac{1}{2} g_{\text{макс}}^2$ (рис. V.8.3).

Естественная ширина спектральных линий связана с конечной длительностью каждого акта излучения атома ($\tau \approx 10^{-8}$ с), обусловленной потерями энергии на излучение (*радиационное затухание*):

$$\Delta\omega_{\text{ест}} \approx 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} \text{ и } \Delta\lambda_{\text{ест}} \approx 10^{-5} \text{ нм.}$$

7°. Ширина спектральных линий, наблюдаемая в опытах, обычно значительно превосходит их естественную ширину. Это связано, во-первых, с тем, что излучающие атомы, участвуя в хаотическом тепловом движении, перемещаются по отношению к измерительному прибору со скоростями, различными по величине и направлению. Поэтому вследствие эффекта Доплера должно возникать уширение спектральных линий тем большее, чем интенсивнее тепловое движение, т. е. чем выше температура газа. Это явление называют *доплеровским уширением спектральных линий*.

Величина доплеровского уширения

$$\Delta\omega_{\text{доп}} = 2\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} \ln 2},$$

где m — масса атома, k — постоянная Больцмана, T — температура, c — скорость света в вакууме, ω — циклическая частота спектральной линии. Доплеровское уширение наиболее велико для легких атомов и в усло-

виях газовых разрядов при $\sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx (10^3—10^4)$ м/с для видимого света составляет

$$\Delta\omega_{\text{доп}} \approx (10^{10}—10^{11}) \text{ с}^{-1} \text{ и } \Delta\lambda_{\text{доп}} \approx (10^{-3}—10^{-2}) \text{ нм.}$$

8°. Вторая причина уширения спектральных линий связана с уменьшением продолжительности τ излучения возбужденных атомов вследствие их взаимодействия с другими атомами. Это явление называют *ударным уширением спектральных линий*. Оно зависит от типа взаимодействия частиц, их концентрации и других причин. В условиях газового разряда ударное уширение имеет тот же порядок, что и доплеровское уширение, или даже превосходит последнее. Ударное

уширение сопровождается также возникновением некоторой асимметрии в распределении энергии в пределах спектральной линии, максимум интенсивности которой несколько смещается, как правило, в сторону больших частот.

9°. Спектр электромагнитных волн, излучаемых каким-либо веществом, называют *спектром испускания* (*эмиссионным спектром*) этого вещества. Спектр электромагнитных волн, поглощаемых каким-либо веществом, называют *спектром поглощения* (*абсорбционным спектром*) этого вещества.

3. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

1°. *Поглощением света* называют явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе, происходящее вследствие преобразований энергии волны во внутреннюю энергию вещества или в энергию вторичного излучения, имеющего иной спектральный состав и иные направления распространения (фотолюминесценция). В результате поглощения света могут происходить: нагревание вещества, ионизация атомов или молекул, фотохимические реакции, фотолюминесценция и т. д. Поглощение света («истинное поглощение») не следует смешивать с явлением уменьшения энергии проходящей световой волны в оптически неоднородной среде вследствие рассеяния света.

2°. Поглощение света в веществе описывается *законом Бугера—Ламберта*:

$$I = I_0 e^{-\alpha d},$$

где I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны на входе в слой поглощающего вещества толщиной d и на выходе из него, α — *линейный коэффициент поглощения* или *натуральный показатель поглощения света* веществом. Показатель погло-

щения $\alpha = \frac{1}{d_0}$, где d_0 — толщина слоя вещества, после

прохождения которого интенсивность света уменьшается в $e = 2,718...$ раз. Значение α зависит от частоты (длины волны) света, химической природы и состояния

вещества. Связь α с комплексным показателем преломления $\tilde{n}$ поглощающего вещества имеет вид

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa, \quad \tilde{n} = n - i\kappa,$$

где λ_0 — длина волны в вакууме, κ — показатель поглощения вещества.

Для некоторых веществ при достаточно больших интенсивностях света наблюдаются отступления от закона Бугера—Ламберта: показатель поглощения α убывает с ростом I_0 . Это явление объясняется квантовой теорией поглощения света. Оно связано с тем, что при больших интенсивностях света в веществе, у которого сравнительно велико время жизни молекул в возбужденном состоянии, доля возбужденных молекул может быть значительной и тем большей, чем больше I_0 .

3°. Для разбавленных растворов поглощающего вещества в непоглощающем растворителе справедлив закон Бера:

$$\alpha = A c,$$

и закон Бугера—Ламберта—Бера имеет вид

$$I = I_0 e^{-A c d},$$

где c — концентрация растворенного вещества, A — постоянная, зависящая от свойств растворенного вещества и частоты света.

При больших концентрациях закон Бера нарушается, так как из-за влияния взаимодействия между близко расположенными молекулами поглощающего вещества A начинает зависеть от концентрации раствора.

4°. Вид спектра поглощения света веществом определяется характером зависимости α от частоты. Разреженный газ, состоящий из атомов, которые находятся на значительных средних расстояниях друг от друга, имеет простейший — *линейчатый* — спектр поглощения. Частоты линий поглощения совпадают с частотами линий в спектре испускания этого же газа. Разреженный молекулярный газ имеет *полосатый спектр поглощения*. Структура полос поглощения определяется структурой энергетических уровней молекул. Жидкие и твердые диэлектрики имеют *сплошные спектры поглощения*, состоящие из сравнительно широких полос частот, для ко-

торых показатель поглощения $\alpha \neq 0$. За пределами этих частот диэлектрики прозрачны ($\alpha \approx 0$). *Избирательным (селективным) поглощением* объясняется окраска многих минералов и растворов красителей.

4. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

1°. Рассеянием света называют процесс преобразования света веществом, сопровождающийся изменением направления распространения света и проявляющийся как несобственное свечение вещества. Несобственное свечение вещества обусловлено вынужденными колебаниями электронов в атомах, молекулах или ионах рассеивающей среды, возникающими под действием падающего света. Рассеяние света происходит при его распространении в оптически неоднородной среде.

2°. Оптически однородной называют среду, в которой показатель преломления не зависит от координат и является постоянным по всему объему среды. Под действием падающего света оптические электроны молекул среды совершают вынужденные колебания и излучают вторичные волны. Малые по сравнению с длиной волны λ участки объема среды, содержащие, однако, еще достаточно большое число молекул, можно рассматривать как источники вторичных когерентных волн (рассеивающие центры). Вследствие равномерного распределения молекул оптически однородной среды по ее объему рассеяние света в такой среде отсутствует: для всех направлений, отличных от направления первичного пучка света, вторичные волны взаимно гасятся в результате их интерференции.

3°. Оптически неоднородной называют среду, показатель преломления которой не остается постоянным, а нерегулярно изменяется от точки к точке среды (например, за счет флуктуаций плотности, присутствия в среде инородных малых частиц и т. п.). Вторичные волны в этом случае имеют некогерентные составляющие, благодаря чему наблюдается рассеяние света. Появление некогерентных вторичных волн связано с тем, что рассеяние света осуществляется на «некогерентных», т. е. не связанных друг с другом, неоднородностях, которые, кроме того, хаотически перемещаются в среде

вследствие теплового движения. Тем самым хаотически изменяются разности хода между вторичными волнами, излучаемыми отдельными неоднородностями. Примерами оптически неоднородных сред могут служить *мутные среды* — аэрозоли (дым, туман), эмульсии, коллоидные растворы и т. п., содержащие мелкие частицы, показатель преломления которых отличен от показателя преломления окружающей среды.

4°. Рассеяние света в мутных средах с размерами неоднородностей не выше $(0,1-0,2)\lambda$, где λ — длина волны света, называют *рэлеевским рассеянием* или *явлением Тиндаля*. Если частицы мутной среды электрически изотропны и не поглощают свет, то при рэлеевском рассеянии естественного света интенсивность света, рассеиваемого единицей объема среды под углом θ к направлению распространения падающего света,

$$I_{\theta} = a \frac{N_0 V^2}{R^2 \lambda^4} I_0 (1 + \cos^2 \theta),$$

где V — объем одной частицы, N_0 — концентрация частиц среды, R — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения, λ — длина волны света, I_0 — интенсивность падающего света, a — коэффициент, зависящий от степени неоднородности мутной среды, т. е. от показателей преломления n и n_0 частиц и той среды, в которой они находятся (при $n = n_0$ $a = 0$). Из этой формулы видно, что при прочих равных условиях интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна λ^4 (*закон Рэлея*). Поэтому при прохождении монохроматического света через мелкодисперсную мутную среду в рассеянном свете преобладает коротковолновое излучение, а в проходящем — длинноволновое.

Зависимость интенсивности рассеянного света от угла рассеяния ϕ в случае рэлеевского рассеяния естественного света на электрически изотропных частицах имеет вид

$$I_{\theta} = I_{\pi/2} (1 + \cos^2 \theta),$$

где $I_{\pi/2}$ — интенсивность света, рассеянного под углом $\theta = \pi/2$.

Зависимость I_θ от θ , изображенную в сферических координатах, называют *индикатрисой рассеяния*. Индикатриса рэлеевского рассеяния изображена на рис. V.8.4. Она имеет вид поверхности вращения, симметричной как относительно направления падающего пучка света ($\theta = 0$), так и относительно плоскости $\theta = \pi/2$, проходящей через начало координат — центр индикатрисы. Свет, рассеянный под углом $\theta = \pi/2$, полностью линейно поляризован — вектор E электрической напряженности поля рассеянного света перпендикулярен плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи.

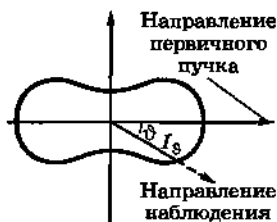


Рис. V.8.4

5°. Если линейные размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны или больше ее, то зависимость интенсивности рассеянного света I от λ становится более слабой: $I \sim \lambda^{-p}$, где $p < 4$, и убывает с увеличением размеров неоднородностей. Благодаря интерференции света, рассеиваемого отдельными участками каждой неоднородности, I_θ от угла θ становится более сложной, чем при рэлеевском рассеянии. Индикатриса рассеяния имеет лишь одну ось симметрии, совпадающую с направлением падающего света. С увеличением размеров частиц рассеяние вперед (т. е. в область острых углов θ) все сильнее преобладает над рассеянием назад (т. е. в область тупых углов θ). Это явление называют *эффектом Ми*. Свет, рассеянный под углом $\theta = \pi/2$, поляризован лишь частично, причем степень его поляризации зависит от формы и размеров рассеивающих частиц.

6°. Рассеяние наблюдается также в *оптически чистых средах*, т. е. в средах, не содержащих каких-либо инородных частиц (например, в чистых газах и жидкостях). Это явление называют *молекулярным рассеянием света*. Оно обусловлено флуктуациями плотности, возникающими в процессе хаотического теплового движения молекул. Дополнительными причинами возникновения оптической неоднородности в чистых средах с электрически анизотропными молекулами явля-

ются флуктуации ориентаций молекул (флуктуации анизотропии), а в истинных растворах, кроме того, — флуктуации концентрации.

Флуктуации плотности в газе особенно велики в критической точке. Наблюдаемое при этом сильное молекулярное рассеяние называют *критической опалесценцией*.

7°. Согласно статистической теории флуктуаций размеры участков среды, соответствующих сколько-нибудь значительным флуктуациям плотности (а следовательно и показателя преломления), при обычных условиях значительно меньше длин волн видимого света. Поэтому зависимость интенсивности рассеянного света от длины волны λ и угла рассеяния θ для молекулярного рассеяния такая же, как и для рэлеевского рассеяния в мелкодисперсных мутных средах. Для молекулярного рассеяния естественного света, рассеянного под углом θ объемом V среды, молекулы которой электрически изотропны, справедлива *формула Эйнштейна*:

$$I_{\theta} = \frac{2\pi^2 kT}{R^2 \lambda^4} V \beta \left(\rho n \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) I_0,$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура, β и ρ — термодинамический коэффициент сжимаемости и плотность среды, n — показатель преломления среды для длины волны λ , R — расстояние от рассматриваемого объема до точки наблюдения рассеянного света. В частности, для молекулярного рассеяния естественного света в идеальном газе

$$I_{\theta} = \frac{2\pi^2 (n-1)^2}{R^2 N_0 \lambda^4} V (1 + \cos^2 \theta) I_0,$$

где n — показатель преломления газа, N_0 — концентрация молекул газа. Сильным рассеянием коротких световых волн в атмосфере объясняется голубой цвет неба, а также голубоватая окраска света, рассеиваемого газом, освещенным белым светом.

Рассеяние света на флуктуациях анизотропии значительно слабее рассеяния на флуктуациях плотности.

8°. При молекулярном рассеянии естественного света происходит его частичная поляризация. При угле рассеяния $\theta = \pi/2$ в случае электрически изотропных неполярных молекул рассеянный свет полностью поля-

ризован, как и в п. 4°. В случае анизотропных молекул рассеянный свет при том же угле рассеяния поляризован лишь частично.

9°. В результате рассеяния света в оптически неоднородной среде интенсивность плоской световой волны постепенно уменьшается по мере распространения волны в среде. Эта зависимость аналогична *закону Бугера—Ламберта*

$$I = I_0 e^{-\rho d},$$

где d — толщина слоя рассеивающей среды, а ρ — коэффициент *экстинкции*. Если рассеивающая среда, кроме того, поглощает свет, то

$$I = I_0 \exp [-(\alpha + \rho)d],$$

где α — показатель поглощения, а $\mu = \alpha + \rho$ — натуральный показатель ослабления света.

Глава 9

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

1. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

1°. Все тела в той или иной степени излучают электромагнитные волны. Например, сильно нагретые (раскаленные) тела светятся, а при обычной температуре испускают только невидимое инфракрасное излучение. Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счет внутренней энергии излучающего тела, называют *тепловым излучением*. Оно зависит только от температуры и оптических свойств этого тела.

Теплообменом излучения (радиационным теплообменом) называют самопроизвольный процесс передачи энергии от более нагретого тела к менее нагретому, осуществляющийся путем испускания и поглощения этими телами электромагнитных волн.

Тепловое излучение — единственное, способное находиться в термодинамическом равновесии с веществом. Такое *равновесное излучение* устанавливается в *адиабатически изолированной системе*, все тела которой находятся при одной и той же температуре. При равно-

весаи расход энергии каждым из тел системы на тепловое излучение покрывается за счет поглощения этим телом такого же количества энергии падающего на него излучения. Поэтому справедливо *правило Прево*: если два тела при одной и той же температуре поглощают за единицу времени разные количества энергии, то их тепловое излучение при этой температуре должно быть различным.

2°. Характеристиками распределения энергии теплового излучения тела по его спектру, т. е. по частотам и по длинам волн в вакууме $\lambda = \frac{c}{\nu}$, служат физические величины $E_{\nu, T}$ и $E_{\lambda, T}$, называемые *спектральными плотностями энергетической светимости тела*, или *излучательными (лучеиспускательными) способностями тела*. Они равны:

$$E_{\nu, T} = \frac{dW}{d\nu} \quad \text{и} \quad E_{\lambda, T} = \frac{dW}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} E_{\nu, T},$$

где dW — энергия теплового излучения с единицы площади поверхности тела за единицу времени в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ (соответственно, в интервале длин волн в вакууме от λ до $\lambda + d\lambda$). Излучательная способность тела зависит ν (λ), температуры тела, его материала и состояния поверхности.

3°. *Поглощательной способностью или монохроматическим коэффициентом поглощения тела* называют величину $A_{\nu, T}$, показывающую, какая доля энергии $dW_{\text{пад}}$, доставляемой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от ν до $\nu + d\nu$, поглощается телом:

$$A_{\nu, T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}.$$

Заметим, что $A_{\nu, T}$ — величина безразмерная. Она зависит, помимо частоты излучения и температуры тела, от его материала, формы и состояния поверхности.

4°. Тело называют *черным (абсолютно черным)*, если оно при любой температуре полностью поглощает все падающие на него электромагнитные волны:

$$A_{\nu, T}^{\text{черн}} \equiv 1.$$

Реальные тела не являются черными, однако некоторые из них по оптическим свойствам близки к черному телу (сажа, платиновая чернь, черный бархат в области видимого света имеют $A_{\nu,T}$, мало отличающееся от единицы). Наиболее совершенной моделью черной поверхности может служить небольшое отверстие в непрозрачной стенке замкнутой полости. Электромагнитное излучение, проходящее извне в полость через отверстие, после многократных отражений от внутренней поверхности полости практически полностью ею поглощается независимо от того, из какого материала сделаны стенки полости.

Тело называют *серым*, если его поглощательная способность одинакова для всех частот ν и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела ($A_{\nu,T}^{\text{сер}} = A_T$).

5°. Между излучательной $E_{\nu,T}$ и поглощательной $A_{\nu,T}$ способностями любого непрозрачного тела существует соотношение (*закон Кирхгофа в дифференциальной форме*):

$$\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \epsilon_{\nu,T}.$$

Для произвольной частоты и температуры отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности одинаково для всех тел и равно излучательной способности $\epsilon_{\nu,T}$ черного тела, являющейся функцией только частоты и температуры (*функция Кирхгофа*).

Из закона Кирхгофа следует, что если тело при данной температуре T не поглощает излучения в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ ($A_{\nu,T} = 0$), то оно не может при температуре T излучать в этом же интервале частот; $E_{\nu,T} = A_{\nu,T} \epsilon_{\nu,T} = 0$.

6°. *Интегральная излучательная способность (энергетическая светимость) тела*

$$E_T = \int_0^{\infty} E_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} E_{\lambda,T} d\lambda$$

представляет собой поверхностную плотность мощности теплового излучения тела, т. е. энергию излучения всех возможных частот, испускаемого с единицы поверхности тела на единицу времени.

Интегральная излучательная способность ϵ_T черного тела

$$\epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu, T} d\nu.$$

Соотношение между интегральной излучательной способностью серого тела и его поглощательной способностью A_T :

$$E_T^{\text{сер}} = A_T \epsilon_T.$$

Закон Кирхгофа в интегральной форме: отношение интегральной излучательной способности серого тела к его поглощательной способности равно интегральной излучательной способности черного тела при той же температуре.

7°. Интегральная излучательная способность любого тела:

$$E_T = \int_0^{\infty} A_{\nu} \epsilon_{\nu, T} d\nu,$$

или

$$E_T = \alpha_T \epsilon_T,$$

где α_T — степень черноты тела, равная

$$\alpha_T = \frac{\int_0^{\infty} A_{\nu} \epsilon_{\nu, T} d\nu}{\epsilon_T} = \frac{\int_0^{\infty} A_{\nu} \epsilon_{\nu, T} d\nu}{\int_0^{\infty} \epsilon_{\nu, T} d\nu};$$

α_T зависит от температуры, материала и состояния поверхности тела.

Поглощательная способность тел A_{ν} может изменяться в пределах от 0 до 1. Поэтому $0 \leq \alpha \leq 1$. Для черного тела $\alpha_T = 1$. Непрозрачные тела, у которых степень черноты $\alpha_T = 0$, не излучают и не поглощают электромагнитные волны ($E_{\nu, T} = A_{\nu} = 0$). Падающее на них излучение они полностью отражают. Если при этом отражение происходит в соответствии с законами геометрической оптики, то тело называют *зеркальным*.

2. ЗАКОНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРНОГО ТЕЛА

1°. Законы излучения черного тела устанавливают зависимость ϵ_T и $\epsilon_{\nu,T}$ от частоты и температуры.

Закон Стефана—Больцмана:

$$\epsilon_T = \sigma T^4.$$

Интегральная излучательная способность ϵ_T черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

Величина σ — универсальная постоянная Стефана—Больцмана, равная $5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴).

2°. Распределение энергии в спектре излучения черного тела, т. е. зависимость $\epsilon_{\nu,T}$ от частоты при различных температурах, имеет вид, изображенный на рис. V.9.1. При малых частотах $\epsilon_{\nu,T}$ пропорциональна произведению $\nu^2 T$, а в области больших частот $\epsilon_{\nu,T}$ про-

порциональна $\nu^3 e^{-\frac{a\nu}{T}}$, где a — некоторая постоянная.

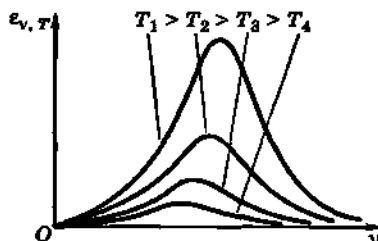


Рис. V.9.1

Площадь, ограниченная кривой зависимости $\epsilon_{\nu,T}$ от ν и осью абсцисс, пропорциональна T^4 .

3°. **Закон Вина:**

$$\epsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

где c — скорость света в вакууме, а $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ — универсальная функция отношения частоты излучения черного тела к его температуре.

Частота излучения $\nu_{\text{макс}}$, соответствующая максимальному значению излучательной способности $\epsilon_{\nu, T}$ черного тела, согласно закону Вина, равна

$$\nu_{\text{макс}} = b_1 T,$$

где b_1 — постоянная величина, зависящая от вида функции $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$.

Закон смещения Вина: частота, соответствующая максимальному значению излучательной способности $\epsilon_{\nu, T}$ черного тела, прямо пропорциональна его температуре.

4°. Другая форма закона Вина:

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

Длина волны $\lambda_{\text{макс}}$, соответствующая максимальному значению излучательной способности $\epsilon_{\lambda, T}$:

$$\lambda_{\text{макс}} = \frac{b}{T}.$$

Другая форма закона смещения Вина: длина волны, соответствующая максимальному значению излучательной способности $\epsilon_{\lambda, T}$ черного тела, обратно пропорциональна его температуре. Величина b — *постоянная Вина*, равная 0,002898 м · К.

Закон смещения объясняет, почему при понижении температуры нагретых тел в их спектре все сильнее преобладает длинноволновое излучение.

Значения $\lambda_{\text{макс}}$ и $\nu_{\text{макс}}$ не связаны формулой $\lambda = \frac{c}{\nu}$, так как максимумы $\epsilon_{\nu, T}$ и $\epsilon_{\lambda, T}$ расположены в разных частях спектра.

5°. Равновесное излучение в замкнутой полости с теплоизолированными стенками называют *черным излучением*, так как независимо от материала стенок полости оно тождественно с тепловым излучением черного тела при той же температуре. Это излучение изотропно, т. е. его можно рассматривать как совокупность элементарных неполяризованных и некогерентных плоских волн с частотами от 0 до ∞ , распространяющихся в рав-

ной мере по всем возможным направлениям. Объемная плотность энергии w поля черного излучения одинакова во всех точках и зависит только от температуры:

$$w = \frac{4\epsilon_T}{c} = \frac{4\sigma}{c} T^4,$$

где ϵ_T — интегральная излучательная способность черного тела, c — скорость света в вакууме, σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Спектральная плотность объемной плотности энергии поля черного излучения:

$$w_\nu = \frac{dw}{d\nu} = \frac{4}{c} \epsilon_{\nu,T},$$

где dw — объемная плотность энергии поля излучения в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, $\epsilon_{\nu,T}$ — излучательная способность черного тела.

Давление, производимое черным излучением на стенки полости:

$$p = \frac{w}{3} = \frac{4}{3c} \sigma T^4.$$

6°. С энергетической точки зрения черное излучение эквивалентно излучению системы бесконечно большого числа не взаимодействующих друг с другом гармонических осцилляторов.

Если $\langle \epsilon(\nu) \rangle$ — средняя энергия радиационного осциллятора с собственной частотой ν , то

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \epsilon(\nu) \rangle \quad \text{и} \quad \epsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \epsilon(\nu) \rangle.$$

Согласно классическому закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы, $\langle \epsilon(\nu) \rangle = kT$, где k — постоянная Больцмана, и

$$\epsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Это соотношение называют *формулой Рэлея — Джинса*.

В области больших частот она приводит к резкому расхождению с опытом, называемому «*ультрафиолетовой катастрофой*»: $\epsilon_{\nu,T}$ монотонно возрастает с рос-

том частоты, не имея максимума, а интегральная излучательная способность черного тела обращается в бесконечность.

7°. Причина вышеуказанных трудностей, возникших при отыскании вида функции Кирхгофа $\epsilon_{\nu, T}$, связана с одним из основных положений классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться непрерывно, т. е. может принимать любые сколь угодно близкие значения.

По квантовой теории Планка энергия осциллятора с собственной частотой ν может принимать лишь определенные дискретные (квантованные) значения, отличающиеся на целое число элементарных порций — квантов энергии:

$$\epsilon_0 = h\nu;$$

$h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка (квант действия).

8°. Средняя энергия радиационного осциллятора:

$$\langle \epsilon(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Формула Планка для излучательной способности абсолютно черного тела:

$$\epsilon_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}.$$

Другой вид формулы Планка:

$$\epsilon_{\lambda, T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{h}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}.$$

Формула Планка хорошо согласуется с результатами экспериментов по измерению распределения энергии в спектре черного тела при различных температурах. Как частный случай в ней содержится закон Рэлея—Джинса (при $h\nu \ll kT$). В области больших частот ($h\nu \gg kT$) формула Планка дает

$$\epsilon_{\nu, T} \approx \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Из формулы Планка следует закон смещения Вина и закон Стефана—Больцмана. Постоянная Стефана—Больцмана может быть выражена через постоянную Планка:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}.$$

Числовое значение постоянной Планка можно найти по экспериментальным значениям h , σ и c . Ее можно также выразить через постоянную Вина b .

3. ПОНЯТИЕ ОБ ОПТИЧЕСКОЙ ПИРОМЕТРИИ

1°. *Оптической пирометрией* называют совокупность методов измерения высоких температур, основанных на использовании зависимости между температурой и излучательной способностью (интегральной или спектральной) для исследуемого тела. Применяемые для этой цели приборы называют *пирометрами излучения*. В *радиационных пирометрах* регистрируется интегральное излучение исследуемого нагретого тела, а в *оптических пирометрах* — его излучение на одном или двух участках спектра. Применение пирометров излучения для измерения температуры твердых, жидких или газообразных тел возможно, лишь если с достаточной степенью точности можно считать, что эти тела находятся в состоянии термодинамического равновесия (или в состояниях достаточно близких к равновесному).

2°. *Радиационной температурой* тела называют температуру T_p черного тела, при которой его эго энергетическая светимость равна энергетической светимости рассматриваемого тела: $E_T(T) = \epsilon_T(T_p)$. Истинная температура тела

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{a_T}},$$

где $a_T = \frac{E_T}{\epsilon_T}$ — степень черноты тела при температуре T .

Так как $a_T < 1$, то $T \geq T_p$.

3°. *Цветовой температурой* тела называют температуру T_c черного тела, при которой его излучение имеет ту же цветность, что и рассматриваемое тело. Если тело серое, то его истинная температура $T = T_c$.

Для тел, сильно отличающихся от серых (например, обладающих селективным поглощением и испусканием), понятие цветовой температуры не имеет смысла.

4°. *Яркостной температурой тела* называют температуру $T_{\text{я}}$ черного тела, спектральная плотность энергетической яркости которого для длины волны λ_0 (обычно $\lambda_0 = 660$ нм) равна спектральной плотности энергетической яркости исследуемого тела для той же длины волны и в направлении нормали к его поверхности.

Спектральная плотность энергетической яркости излучающего тела с температурой T :

$$b(\lambda, T) = \frac{dB_{\lambda}}{d\lambda},$$

где dB_{λ} — энергия, излучаемая с единицы площади поверхности тела за единицу времени в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ в единичный телесный угол в заданном направлении. Для излучающего тела, подчиняющегося закону Ламберта,

$$b(\lambda, T) = \frac{1}{\pi} E_{\lambda, T},$$

где $E_{\lambda, T}$ — излучательная способность тела. В частности, для черного тела

$$b_0(\lambda, T) = \frac{1}{\pi} \varepsilon_{\lambda, T}.$$

Если $\lambda_0 T \ll \frac{hc}{k}$, то истинная температура тела связана с его яркостной температурой (при $\lambda = \lambda_0$) соотношением

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{я}}} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln \frac{b(\lambda_0, T)}{b_0(\lambda_0, T)}.$$

В частности, если исследуемое тело подчиняется закону Ламберта, то

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{я}}} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln A_{\lambda_0, T},$$

где $A_{\lambda_0, T}$ — поглощательная способность тела. Для всех тел, кроме черного, $T > T_{\text{я}}$.

Глава 10

ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

1. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

1°. Свет имеет двойственную, *корпускулярно-волновую природу*: с одной стороны, он обладает волновыми свойствами, обуславливающими явления интерференции, дифракции, поляризации, с другой стороны, представляет собой поток частиц — *фотонов*, обладающих нулевой массой и движущихся со скоростью, равной скорости света в вакууме. Энергия W фотона и его импульс p для соответствующей ему электромагнитной волны с частотой ν и длиной волны в вакууме λ равны:

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

где h — постоянная Планка.

Фотоны имеют спин, равный $\hbar$, и подчиняются квантовой статистике Бозе—Эйнштейна. При малых частотах ν преобладающую роль играют волновые свойства, при больших ν — корпускулярные свойства света.

Фотоны возникают (излучаются) в процессах перехода атомов, молекул, ионов и атомных ядер из возбужденных состояний в состояния с меньшей энергией, а также в результате ускорения и торможения заряженных частиц, при распадах и аннигиляции частиц.

2°. *Фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом)* называют процесс взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, в результате которого энергия фотонов передается электронам вещества. Для конденсированных систем (твердых и жидких тел) различают *внешний фотоэффект*, при котором поглощение фотонов сопровождается вылетом электронов за пределы тела, и *внутренний фотоэффект*, при котором электроны, оставаясь в теле, изменяют в нем свое энергетическое состояние. В газах фотоэффект (*фотоэлектронная эмиссия, фотоионизация*) состоит в ионизации атомов или молекул под действием излучения.

3°. Электроны, вылетающие из вещества при внешнем фотоэффекте, называют *фотоэлектронами*. Если между облучаемым телом (*фотокатодом*) и некоторым проводником (*анодом*) создать электрическое поле с разностью потенциалов $\Delta\phi$, ускоряющее фотоэлектроны, то возникает упорядоченное движение этих электронов, называемое *фотоэлектрическим током* (*фототоком*). При некотором значении $\Delta\phi > 0$ фототок I достигает насыщения ($I = I_{\text{н}}$), когда все электроны, покидающие облучаемое тело (катод), достигают анода. Для прекращения фототока между анодом и катодом необходимо создать задерживающее поле с разностью потенциалов $\Delta\phi_1$, равной

$$\Delta\phi_1 = -\frac{W_{\text{к макс}}}{e} < 0,$$

где e — элементарный заряд, $W_{\text{к макс}}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов. Для фотоэффекта, вызываемого видимым светом и ультрафиолетовыми лучами, максимальная начальная скорость фото-

электронов $v_{\text{макс}} \ll c$ и $W_{\text{к макс}} = \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2}$, где m — масса электрона.

4°. Из закона сохранения энергии следует *уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*, вызываемого монохроматическим светом:

$$h\nu = A + W_{\text{к макс}}$$

где $h\nu$ — энергия фотона, A — *работа выхода* электрона из фотокатода.

В соответствии с законами сохранения энергии и импульса, поглощение фотона свободными электронами невозможно, и фотоэффект возможен только на электронах, связанных в атомах, молекулах и ионах, а также на электронах твердых и жидких тел.

5°. Законы внешнего фотоэффекта

а) Для данного фотокатода максимальная начальная скорость фотоэлектронов зависит от частоты света и не зависит от его интенсивности.

б) При постоянном спектральном составе падающего света число фотоэлектронов, вырываемых светом из

фотокаатода за единицу времени, и фототок насыщения пропорциональны энергетической освещенности фотокаатода.

в) Для каждого вещества фотокаатода существует *красная граница фотоэффекта (порог фотоэффекта)* — минимальная частота $\nu_0 = \frac{A}{h}$, при которой еще возможен

внешний фотоэффект. Длина волны $\lambda_0 = \frac{ch}{A}$, соответствующая частоте ν_0 , для большинства металлов находится в ультрафиолетовой части спектра.

Фотоэффект практически безынерционен.

6°. Число фотоэлектронов, приходящееся на один падающий фотон, называют *квантовым выходом фотоэффекта*. Квантовый выход зависит от свойств вещества и длины волны излучения. Зависимость квантового выхода внешнего фотоэффекта в металлах от энергии фотонов называют *спектральной характеристикой фотоэффекта*. Максимум квантового выхода соответствует той области частот, в которой наблюдается минимум коэффициента отражения света от металла.

7°. Явление заметного возрастания квантового выхода (и фототока насыщения) в определенных диапазонах частот падающего излучения называют *селективным (избирательным) фотоэффектом*. В этом случае квантовый выход сильно зависит от угла падения излучения и от его поляризации. В случае излучения, поляризованного в плоскости падения (*p*-волна) селективный фотоэффект максимален и зависит от угла падения i , возрастая при его увеличении от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Если излучение поляризовано в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения (*s*-волна), то селективный фотоэффект отсутствует. Указанные особенности свидетельствуют о влиянии волновых свойств света на внешний фотоэффект.

8°. При очень больших значениях интенсивности света, испускаемого мощными лазерами, фотоэлектрон в процессе выхода из фотокаатода может столкнуться не с одним, а с N фотонами и получить энергию, равную $Nh\nu$. Это явление называют *многофотонным (N -фотонным) фотоэффектом*, или *нелинейным фотоэффектом*.

Уравнение Эйнштейна для N -фотонного внешнего фотоэффекта имеет вид

$$N h \nu = A + W_{\text{к макс.}}$$

Красная граница фотоэффекта в этом случае равна

$$\nu_0^* = \frac{A}{(Nh)} = \frac{\nu_0}{N},$$

т. е. зависит от интенсивности света, убывая при увеличении последней.

9°. Внешний фотоэффект, вызванный фотонами рентгеновского или гамма-излучения, заключается в поглощении энергии фотона атомом и выбрасывании электрона из какой-либо внутренней оболочки атома. При этом атом оказывается возбужденным, и фотоэффект сопровождается испусканием фотона вторичного рентгеновского излучения или добавочного фотоэлектрона в том случае, если энергия возбуждения атома передается одному из его электронов (*эффект Оже*).

10°. В кристаллических полупроводниках и диэлектриках помимо внешнего фотоэффекта наблюдается внутренний фотоэффект (*фотопроводимость*), заключающийся в увеличении электропроводности этих веществ за счет возрастания в них числа свободных носителей тока (электронов проводимости и дырок). При энергии фотона $h\nu_0 \geq W_0$, где W_0 — энергия активации проводимости в беспримесных веществах (разность между энергиями электрона на нижнем уровне зоны проводимости и верхнем уровне валентной зоны), может происходить переброс электрона из заполненной валентной зоны в зону проводимости, частоту ν_0 называют *красной границей фотопроводимости*.

Удельная электрическая проводимость σ полупроводника или диэлектрика, подвергающегося воздействию электромагнитного излучения, равна $\sigma = \sigma_0 + \sigma_{\text{ф}}$, где σ_0 — темновая удельная электрическая проводимость (в отсутствие облучения) и $\sigma_{\text{ф}}$ — удельная фотопроводимость.

Для беспримесного (собственного) полупроводника

$$\sigma_{\text{ф}} = e n_{\text{ф}} (u_n \langle \tau_n \rangle + u_p \langle \tau \rangle),$$

где e — элементарный заряд, $n_{\text{ф}}$ — число пар неравновесных носителей (электронов и дырок), генерируемых

светом в единице объема полупроводника за единицу времени, u_n и u_p — подвижности электронов и дырок, а $\langle \tau_n \rangle$ и $\langle \tau_p \rangle$ — средние времена жизни этих носителей заряда.

Красная граница фотопроводимости $\nu_0 = \frac{\Delta W_0}{h}$, где

ΔW_0 — энергия активации собственной проводимости.

В примесных полупроводниках n - и p -типа красная граница фотопроводимости определяется энергией активации примесной проводимости: для полупроводников

n -типа $\nu_0 = \frac{\Delta W_n}{h}$, а для полупроводников p -типа $\nu_0 = \frac{\Delta W_p}{h}$.

Если частота света $\nu > \frac{\Delta W_0}{h}$, то фотопроводимость при-

месного полупроводника осуществляется за счет неравновесных носителей зарядов обоих знаков, имеющих различные концентрации Δn и Δp : $\sigma_\phi = e(u_n \Delta n + u_p \Delta p)$. Если полупроводник n -типа, а $\Delta W_n < h\nu < \Delta W_0$, то $\Delta p = 0$, и фотопроводимость осуществляется только за счет неравновесных электронов в зоне проводимости. Если полупроводник p -типа, а $\Delta W_p < h\nu < \Delta W_0$, то $\Delta n = 0$, и фотопроводимость осуществляется только за счет неравновесных дырок в валентной зоне.

11°. Вентильный фотоэффект (фотоэффект в запирающем слое) состоит в возникновении электродвижущей силы вследствие внутреннего фотоэффекта вблизи поверхности контакта между металлом и полупроводником, p - n -перехода или *гетероперехода* (контакта двух различных по химическому составу полупроводников). Такой контакт имеет одностороннюю проводимость, связанную с обеднением слоев полупроводников, прилегающих к поверхности контакта, носителями тока (электронами проводимости и дырками). Внутренний фотоэффект в полупроводниках вызывает нарушение равновесного распределения носителей тока в области контакта и приводит к изменению контактной разности потенциалов по сравнению с равновесной, т. е. к возникновению *фотоэлектродвижущей силы* (фото-ЭДС). Фото-ЭДС, возникающая под действием монохроматического света, пропорциональна его интенсивности. Красная граница вентильного фотоэффекта на p - n -переходе определяется величиной W_0 .

Вентильный фотоэффект в *p-n*-переходе представляет непосредственное преобразование энергии электромагнитного излучения в энергию электрического тока. Это явление используют в *фотоэлектрических источниках тока* (кремниевые, германиевые и другие *фотоэлементы*).

2. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

1°. *Эффектом Комптона* называют изменение длины волны электромагнитного излучения при его рассеянии на свободных электронах. Он наблюдается при рассеянии коротковолнового рентгеновского излучения и, подобно внешнему фотоэффекту, не может быть истолкован на основе волновой теории, так как является следствием квантовых свойств излучения. Эффект Комптона — результат рассеяния фотонов на свободных или почти свободных электронах, энергия связи которых в атомах или молекулах рассеивающего вещества пренебрежимо мала по сравнению с энергией рентгеновских фотонов. В отличие от фотоэффекта, при эффекте Комптона рассеиваемый фотон передает электрону не всю, а только часть своей энергии.

2°. Рассеяние фотона на свободном электроне можно рассматривать как процесс их упругого столкновения. Рассмотрение обычно проводится в лабораторной системе координат, в которой электрон вначале предполагается покоящимся, а после столкновения — движущимся со скоростью v , не малой по сравнению со скоростью c налетающего фотона. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где λ и λ' — длины волн, соответствующие первичному и вторичному (рассеянному) фотонам, m_e — масса электрона, и из закона сохранения импульса при столкновении:

$$\frac{m_e^2 v^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta,$$

где θ — угол между направлениями первичного и рассеянного фотона (рис. V.10.1), получается следующая зависимость для изменения длины волны $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

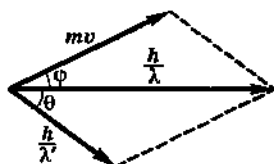


Рис. V.10.1

Величину

$$\lambda_K = \frac{h}{m_e c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

называют *комптоновской длиной волны* для электрона.

Формула Комптона для частоты фотона после рассеяния:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)},$$

где $\epsilon = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{\lambda_K}{\lambda}$ — отношение энергии первичного фотона к энергии покоя электрона.

3°. Изменение (смещение) длины волны в эффекте Комптона зависит от угла рассеяния фотонов θ и имеет наибольшее значение для обратного рассеяния ($\theta = 180^\circ$).

При условии $h\nu \gg m_e c^2$ ($\lambda \ll \lambda_K$), длина волны λ' излучения, рассеянного назад, $\lambda' = 2\lambda_K$ независимо от длины волны λ падающего излучения.

Угловое распределение неполяризованного излучения, испытывающего рассеяние на свободном покоящемся электроне, дается *формулой Клейна—Нишины—Тамма*:

$$\sigma(\theta) = \frac{r_e}{2} \left(\frac{\theta'}{\theta} \right)^2 \left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\theta}{\theta'} - \sin^2 2\theta \right).$$

Здесь $\sigma(\theta)$ — дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния рентгеновского фотона на электроне под углом θ внутри телесного угла $d\Omega$, а

$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_e}$ — классический радиус электрона.

4°. Рассеивающий электрон, движущийся со скоростью v после столкновения с фотоном в эффекте Комптона, называют *электроном отдачи*.

Распределение по углам φ электронов отдачи:

$$\sigma_e(\varphi) = 4r_e^2 \frac{(1+\epsilon)^2 \cos \varphi}{(1+2\epsilon+\epsilon^2 \sin^2 \varphi)^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{2\epsilon^2 \cos^4 \varphi}{(1+2\epsilon+\epsilon^2 \sin^2 \varphi)[1+\epsilon(\epsilon+2)\sin^2 \varphi]} - \right. \\ \left. - \frac{2(1+\epsilon)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{[1+\epsilon(\epsilon+2)\sin^2 \varphi]^2} \right\},$$

где $\sigma_e(\varphi)$ — дифференциальное эффективное поперечное сечение для рассеяния электронов под углом φ внутри элементарного телесного угла $d\Omega_\varphi$, r_e — классический радиус электрона.

Кинетическая энергия электрона отдачи:

$$T = h\nu \frac{2\epsilon}{1+2\epsilon+(1+\epsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2\epsilon \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1+2\epsilon \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

причем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ для всех углов θ . Из законов сохранения энергии и импульса при комптон-эффекте следует, что

$$(1+\epsilon) \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Максимальное значение $T_{\text{макс}}$ достигается при $\theta = 180^\circ$ ($\varphi = 0^\circ$):

$$T_{\text{макс}} = h\nu \frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}.$$

3. ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

1°. *Давлением света* называют механическое действие, производимое электромагнитными волнами при падении на какую-либо поверхность.

2°. Согласно электромагнитной теории света давление света объясняется возникновением механических сил, действующих на электроны, находящиеся на поверхности освещаемого тела, со стороны электрической и магнитной компонент поля световой волны. Электрическое поле световой волны вызывает колебания зарядов в поверхностном слое тела. Магнитное поле действует на эти заряды с силой, направление которой совпадает с направлением вектора Пойнтинга световой волны.

3°. Давление, производимое плоской световой волной, падающей на поверхность тела под углом i к нормали, равно

$$p = \frac{I}{c} (1 + R) \cos^2 i = w (1 + R) \cos^2 i,$$

где I — интенсивность света, w — объемная плотность энергии поля волны, R — коэффициент отражения света от освещаемой поверхности.

Давление, производимое на стенки полости изотропным равновесным излучением, не зависит от материала стенок и определяется только температурой.

4°. В квантовой теории давление света рассматривается как результат передачи фотонами импульса телу, на поверхности которого часть падающих фотонов поглощается, а оставшаяся часть — отражается. Первые передают телу весь свой импульс, а вторые — импульс, равный по модулю и противоположный по направлению изменению импульса отражающихся фотонов. Давление света равно модулю нормальной составляющей импульса, передаваемого всеми фотонами, которые падают за 1 с на единицу площади поверхности тела. Для плоской монохроматической волны света частотой ν давление равно:

$$p = n_0 h \nu (1 + R) \cos^2 i,$$

где n_0 — концентрация фотонов падающего света, а $n_0 h \nu = w$ — объемная плотность энергии.

5°. Световое давление, существование которого было экспериментально доказано опытами П. Н. Лебедева, является одной из причин, обуславливающих появление хвостов у комет при значительном приближении их к Солнцу. Ввиду малых размеров частиц вещества в кометах их отталкивание световым давлением, пропор-

циональное площади поверхности частиц, превышает их притяжение гравитационным полем Солнца, пропорциональное объему частиц.

4. ХИМИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ СВЕТА

1°. Действие света на поглощающие его вещества может вызвать химические превращения веществ, называемые *фотохимическими реакциями*. Различаются первичный фотохимический акт и вторичные реакции. К числу таких фотохимических реакций относят: *фотосинтез* — образование органических веществ в растениях и бактериях под действием света; *фотохимическая диссоциация (фотолиз)* — разложение под действием света сложных молекул, радикалов, многоатомных ионов и др.

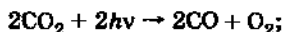
Фотохимическая диссоциация возможна при частоте света ν , удовлетворяющей условию:

$$\nu \geq \nu_0 = \frac{D}{h},$$

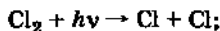
где ν_0 — граничная частота фотодиссоциации, D — энергия фотодиссоциации.

Примеры фотохимических реакций:

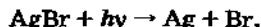
— разложение углекислоты под действием солнечного света:



— диссоциация молекул хлора на свету:



— разложение бромистого серебра в фотографических материалах при их освещении:



2°. Для фотохимических реакций имеет место *закон эквивалентности Эйнштейна*: для каждого акта фотохимического превращения требуется один квант поглощенного света. Число молекул вещества, претерпевших фотохимическое превращение при поглощении единицы энергии света $N \sim \frac{1}{h\nu} = \frac{\lambda}{hc}$. Масса прореагировавшего вещества $M = Nm$, где m — масса молекулы.

3°. Если частота света ν , которым облучается вещество, лежит вне полосы поглощения вещества, то поглощения света и соответственно фотохимической реакции не происходит. Однако она может быть вызвана добавлением к данному веществу другого вещества — *сенсibilизатора*, полоса поглощения которого содержит частоту ν . Фотон поглощается молекулой сенсibilизатора, а полученная энергия передается молекуле исследуемого вещества при межмолекулярном столкновении. Такие фотохимические реакции называют *сенсibilизированными*.

Глава 11

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ И ИХ ПРОТЕКАНИЕ

1°. *Люминесценцией* называют излучение света телами, избыточное над тепловым при той же температуре и имеющее длительность, значительно превышающую периоды в оптическом диапазоне спектра.

Указание на длительность люминесцентного свечения, т. е. свечения после прекращения действия вызывающей его причины, позволяет отличить люминесценцию от других видов неравновесного свечения — рассеяния и отражения света, тормозного излучения заряженных частиц, излучения Вавилова—Черенкова и др.

Люминесцентное излучение испускается *центрами люминесценции (центрами свечения)* при их переходе из возбужденных состояний в нормальные или менее возбужденные. Центрами люминесценции могут быть отдельные атомы, молекулы, ионы, их коллективы, а также дефекты кристаллической структуры (примеси, вакансии и пр.). Люминесцирующие вещества, специально синтезированные для различных практических целей, называются *люминофорами*.

2°. В зависимости от способа возбуждения люминесценции различают следующие виды люминесценции: *фотолюминесценцию*, вызываемую видимым светом и ультрафиолетовым излучением; *радиолюминесценцию*,

вызываемую рентгеновским и гамма-излучением; *катодолюминесценцию* и *анолюминесценцию*, вызываемые бомбардировкой электронами и ионами; *электролюминесценцию*, вызываемую электрическим полем; *хемиллюминесценцию*, вызываемую химическими реакциями и др.

3°. По длительности послесвечения различают *флюоресценцию* — люминесценцию, быстро затухающую после прекращения возбуждения центров люминесценции, и *фосфоресценцию* — люминесценцию, сохраняющуюся длительное время после прекращения действия возбудителя свечения. Фосфоресцентное послесвечение может продолжаться до нескольких часов и даже суток.

Фосфоресценция обусловлена существованием метастабильных возбужденных состояний центров люминесценции, для перехода из которых в нормальное состояние нужно дополнительное возбуждение (например, тепловое). Разделение люминесценции на флюоресценцию и фосфоресценцию достаточно условно, так как нельзя указать четкую границу между ними.

4°. В зависимости от характера элементарных процессов, приводящих к люминесцентному излучению, различают спонтанные, вынужденные и рекомбинационные процессы люминесценции, а также резонансную флюоресценцию. *Резонансная флюоресценция* наблюдается в парах атомов и состоит в спонтанном высвечивании с того же энергетического уровня, на котором оказался излучающий атом при поглощении энергии от источника люминесценции. *Спонтанная люминесценция* состоит в том, что под действием источника люминесценции вначале происходит возбуждение атомов (молекул, ионов) на промежуточные возбужденные энергетические уровни. Далее с этих уровней происходят излучательные, а чаще безизлучательные переходы на уровни, с которых излучается люминесцентное свечение. Такой вид люминесценции наблюдается у сложных молекул в парах и растворах, у примесных центров в твердых телах.

Вынужденная (метастабильная) люминесценция характерна тем, что под действием источника люминесценции происходит переход на метастабильный уровень, а затем, в результате дополнительного возбуждения, следует переход на уровень люминесцентного излучения. Примером является фосфоресценция орга-

нических веществ. *Рекомбинационная люминесценция* представляет собой рекомбинационное излучение, которое возникает при воссоединении тех частиц, которые были разделены при поглощении энергии от источника люминесценции (в газах — радикалы или ионы, в кристаллах — электроны и дырки).

5°. При электронном возбуждении люминесценции энергия бомбардирующих электронов передается электронам атомов (или молекул, ионов) и переводит их в возбужденное состояние. Передача энергии возможна лишь при условии, что кинетическая энергия бомбардирующего электрона

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \geq W_n - W_n',$$

где W_n и W_n' — полная энергия атома (молекулы, иона) соответственно в нормальном и ближайшем к нему возбужденном состояниях. Атом (молекула, ион) возвращается из возбужденного состояния в нормальное, испустив квант света (фотон) частотой ν :

$$h\nu = W_n - W_n'.$$

При достаточных энергиях возбуждения возвращение атома (молекулы, иона) из возбужденного в нормальное состояние может происходить в несколько этапов через все менее возбужденные состояния. Этому соответствует испускание нескольких фотонов различных частот, причем суммарная их энергия равна энергии начального возбуждения.

6°. *Фотолюминесценция* возбуждается светом видимой или ультрафиолетовой области спектра. Для сложных люминесцирующих веществ (сложные молекулы, конденсированные среды) спектральный состав фотолюминесценции не зависит от длины волны света, вызывающего люминесценцию, и подчиняется *правилу Стокса*.

Наблюдают линейчатые, полосатые и сплошные спектры фотолюминесценции. Ее характер существенно зависит от агрегатного состояния вещества. У ряда кристаллофосфоров с увеличением частоты возбуждающего света *квантовый выход* растет при условии $h\nu > 2\Delta W$, где ΔW — *ширина запрещенной зоны* (размножение фотонов при фотолюминесценции).

7°. Электролюминесценция в газах вызывается электрическим разрядом, в котором энергия возбуждения сообщается молекулам газа механизмом электронного или ионного удара. Возбужденное состояние при электролюминесценции всегда вызывается прохождением какого-либо тока и, таким образом, связано с наличием электрического поля. Электролюминесценция в твердых телах наблюдается, в частности, на *p-n*-переходе в полупроводниках.

8°. Хемилюминесценция сопровождает некоторые экзотермические химические реакции. Химические превращения в веществе сопровождаются перестройкой внешних электронных оболочек атомов. Излучение света приводит к образованию химического соединения с более устойчивой в данном окружении и при данных условиях электронной конфигурацией. Хемилюминесценция часто сопровождает процессы окисления с образованием более устойчивых продуктов сгорания.

Свечение при хемилюминесценции вызывается молекулами (атомами, ионами) продуктов реакции в возбужденных электронных, колебательных и вращательных состояниях. Примерами хемилюминесценции являются свечение высокотемпературных и низкотемпературных пламен, свечение при рекомбинации перекисных радикалов в цепном окислении жидких углеводородов.

2. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

1°. Правило Стокса: длина волны фотолюминесценции, как правило, больше, чем длина волны возбуждающего света. В более общей формулировке: максимум спектра люминесценции смещен в длинноволновую сторону от максимума спектра поглощения.

С квантовой точки зрения правило Стокса означает, что энергия кванта возбуждающего света частично расходуется на неоптические процессы:

$$h\nu = h\nu_{\text{люм}} + W, \text{ т. е. } \nu_{\text{люм}} < \nu, \text{ или } \lambda_{\text{люм}} > \lambda,$$

где W — энергия, затраченная на различные процессы, кроме фотолюминесценции.

2°. В некоторых случаях фотолюминесцентное излучение имеет в своем спектре длины волн, меньшие длины волны возбуждающего света (антистоксово излучение). Это явление объясняется тем, что к энергии

возбуждающего фотона добавляется энергия теплового движения частиц люминесцирующего вещества:

$$h\nu_{\text{люм}} = h\nu + akT,$$

где a — коэффициент, зависящий от природы люминофора, k — постоянная Больцмана, T — температура люминофора. Антистоксово излучение проявляется все отчетливее по мере повышения температуры люминофора.

3°. Отношение энергии люминесценции к энергии, поглощенной в стационарных условиях люминофором от источника, возбуждающего люминесценцию, называют *энергетическим выходом люминесценции*.

Квантовым выходом фотолюминесценции называют отношение числа фотонов люминесцентного излучения к числу поглощенных фотонов возбуждающего света.

Для фотолюминесценции справедлив *закон Вавилова*: квантовый выход фотолюминесценции $\eta_{\text{кв}}$ постоянен при изменении длины волны возбуждающего света в стоксовой области ($\lambda < \lambda_{\text{люм}}$) и быстро уменьшается с увеличением λ в антистоксовой области ($\lambda > \lambda_{\text{люм}}$) в пределах спектральной полосы поглощения люминесцирующего вещества.

Из закона Вавилова следует, что энергетический выход фотолюминесценции $\eta_{\text{э}}$ в стоксовой области растет пропорционально λ :

$$\eta_{\text{э}} = \frac{h\nu_{\text{люм}}}{h\nu} \eta_{\text{кв}} = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{люм}}} \eta_{\text{кв}}.$$

В антистоксовой области $\eta_{\text{э}}$ и $\eta_{\text{кв}}$ быстро уменьшаются до нуля, так как энергия падающих фотонов недостаточна для возбуждения люминесценции.

Значения квантового и энергетического выходов сильно зависят от природы люминофора и внешних условий. Это связано с возможностью безызлучательных переходов частиц из возбужденного в нормальное состояние (*тушение люминесценции*). Основную роль в процессах тушения играют столкновения второго рода, в результате которых энергия возбуждения переходит без излучения во внутреннюю энергию теплового движения. Имеет место также резкое уменьшение интенсивности флуоресценции при чрезмерно большой концентрации молекул люминесцирующего вещества

(концентрационное тушение). В этом случае из-за сильной связи между молекулами происходит их ассоциация в нелюминесцирующие димеры (сдвоенные молекулы).

4°. В простейшем случае, когда мала вероятность безызлучательных переходов, зависимость интенсивности спонтанной люминесценции от времени t имеет вид

$$I_t = I_0 e^{-t/\tau},$$

где I_t — интенсивность свечения в момент времени t , I_0 — интенсивность свечения в момент прекращения возбуждения люминесценции, τ — средняя продолжительность возбужденного состояния атомов или молекул люминесцирующего вещества.

° Интенсивность рекомбинационного люминесцентного свечения в простейшем случае изменяется с течением времени по гиперболическому закону:

$$I_t = \frac{I_0}{(1 + at)^2},$$

где $a = \text{const.}$

Раздел VI

ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКУЮ КВАНТОВУЮ МЕХАНИКУ

1. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

1°. *Квантовой механикой (волновой механикой)* называют раздел теоретической физики, в котором устанавливаются способы описания и законы движения микрочастиц (элементарных частиц, атомов, атомных ядер, молекул), а также их систем (например, кристаллов). Квантовая механика лежит в основе современной теории строения вещества. Как и в классической механике, различают нерелятивистскую и релятивистскую квантовую механику.

2°. В начале XX века выяснилось, что электромагнитное излучение обладает как волновыми свойствами (круговой частотой ω и длиной волны в вакууме λ), так и корпускулярными, т. е. может рассматриваться как поток частиц — фотонов, энергия E и импульс p которых равны:

$$E = \hbar\omega \text{ и } p = \hbar k, \quad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda},$$

где k — волновой вектор, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $\hbar = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка (квант действия).

В свою очередь, частицы вещества обладают волновыми свойствами. Свободной частице массой m , кото-

рая движется с импульсом $p = \text{const}$, соответствует плоская монохроматическая волна де Бройля, частота и длина волны которой равны:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

где E — энергия частицы. Если $v \ll c$, то $E = \frac{mv^2}{2}$, $p = mv$, а фазовая (v_ϕ) и групповая (u) скорости волны де Бройля равны:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{2} \quad \text{и} \quad u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v.$$

Волнам де Бройля присуща очень сильная дисперсия. Так, для свободной нерелятивистской частицы зависимость фазовой скорости волны де Бройля от длины волны имеет вид

$$v_\phi = \frac{h}{2m\lambda}.$$

3°. В квантовой механике состояние рассматриваемой системы описывают комплексной функцией, называемой *волновой функцией* системы, или ее *пси-функцией*. Волновая функция свободной частицы имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\right],$$

где A — комплексная амплитуда плоской гармонической (монохроматической) волны де Бройля частицы, $i = \sqrt{-1}$.

4°. Вероятность $d\omega$ обнаружить частицу в момент времени t в пределах малого объема dV вблизи точки с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ определяется квадратом модуля волновой функции частицы:

$$d\omega = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV.$$

Таким образом, $|\psi|^2 = \psi\psi^* = \frac{d\omega}{dV}$ имеет смысл *плотности вероятности* обнаружить частицу в заданной точке пространства в момент времени t (ψ^* — функция, комплексно сопряженная функции ψ).

Нахождение частицы в момент времени t где-либо в пространстве объема V — достоверное событие, вероятность которого равна единице. Поэтому

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1. \quad (1.1)$$

Это условие называют *условием нормировки пси-функции*, а саму пси-функцию, удовлетворяющую ему, называют *нормированной пси-функцией*.

5°. В основе квантовой механики лежит *принцип суперпозиции состояний*. Согласно этому принципу, если квантовая система может находиться в состояниях, характеризующихся волновыми функциями $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots$, то она может также находиться в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \dots + c_i \psi_i + \dots,$$

т. е. являющимся суперпозицией состояний $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots$. Здесь c_i — комплексные коэффициенты, а $|c_i|^2$ — величина, пропорциональная вероятности нахождения частицы в i -м состоянии.

2. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1°. К микрочастицам, обладающим волновыми свойствами, в ограниченной степени можно применять понятия классической механики, например, понятия координаты частицы и ее импульса. Поскольку понятие «координата волны» лишено физического смысла, в квантовой механике лишено также физического смысла понятие траектории частицы. В классической механике каждому определенному значению координаты частицы соответствует точное значение ее импульса. В квантовой механике вследствие волновых свойств частиц в принципе невозможно указать точные значения координат и соответствующих проекций импульса частицы в один и тот же момент времени.

2°. Измерения неопределенностей $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (среднеквадратичных отклонений $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, ...) в коор-

динатах x , y и z частицы связаны с одновременным измерением неопределенностей Δp_x , Δp_y и Δp_z в проекциях p_x , p_y и p_z импульса этой частицы соотношениями неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка.

В квантовых статистиках используются соотношения неопределенностей в форме $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$ и $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$, что соответствует размеру $\hbar^3$ ячейки 6-мерного фазового μ -пространства состояний.

Соотношения неопределенностей имеют место для любой пары канонически сопряженных динамических величин.

3°. Для нестационарных процессов измерения среднеквадратичного отклонения энергии ΔE за промежуток времени Δt выполняется соотношение

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Это соотношение допускает несколько толкований:

а) Δt — время пребывания микрообъекта в состоянии с энергией E (например время жизни атома в возбужденном состоянии), а ΔE — неопределенность в энергии этого состояния;

б) ΔE — неопределенность в энергии микрообъекта в каком-либо процессе (например, в процессе туннелирования частицы сквозь потенциальный барьер), а Δt — длительность этого процесса;

в) за время Δt энергию квантовой системы можно определить с точностью, не превышающей ΔE .

4°. В квантовой механике существенно изменяется (по сравнению с классической физикой) понятие о процессе измерения и измерительном приборе. Процесс измерения в микромире неизбежно связан с существенным влиянием прибора на ход измеряемого явления. Например, для определения положения электрона его необходимо «осветить» квантом малой длины волны. Но с уменьшением длины волны кванта растут его час-

тота и энергия, в результате чего соударение кванта с электроном существенно изменяет импульс последнего, и притом на неопределенную (порядка $\frac{\hbar}{\Delta x}$) величину.

3. ЛИНЕЙНЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1°. *Оператором (преобразованием, отображением)* называют правило, с помощью которого одной функции f сопоставляется другая функция g . Символически обозначают

$$\hat{M}f = g.$$

Например, если $f = \sin x$, а $g = \cos x$, то $\hat{M} = \frac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор.

2°. Оператор $\hat{M}$ называют *линейным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\hat{M}(u_1 + u_2) = \hat{M}u_1 + \hat{M}u_2 \quad \text{и} \quad \hat{M}(cu) = c\hat{M}u,$$

где u_1 и u_2 — две произвольные функции, а c — произвольная постоянная. Например, оператор $\hat{M} = \frac{d}{dx}$ —

линейный, а оператор $\hat{N} = \sqrt{}$ — извлечение квадратного корня — *нелинейный*:

$$\sqrt{u_1 + u_2} \neq \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}.$$

3°. Произведением двух операторов $\hat{M}$ и $\hat{N}$ называют оператор $\hat{K} = \hat{M}\hat{N}$ такой, что $\hat{K}u = \hat{M}(\hat{N}u)$, где u — произвольная функция. Два оператора $\hat{M}$ и $\hat{N}$ называют *коммутирующими*, если $\hat{M}\hat{N} = \hat{N}\hat{M}$, т. е.

$$\hat{M}(\hat{N}u) = \hat{N}(\hat{M}u).$$

Например, операторы $\hat{M} = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{N} = \frac{\partial}{\partial y}$ — коммутирующие, а операторы $\hat{M} = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{N} = x$ — некоммутирующие.

4°. Если в результате применения оператора $\hat{M}$ к функции u , которая при всех значениях ее аргументов однозначна, непрерывна и конечна, получается та же функция u , умноженная на некоторое число λ (в общем случае комплексное):

$$\hat{M} u = \lambda u,$$

то функцию u называют *собственной функцией оператора $\hat{M}$* , а λ — *собственным значением оператора $\hat{M}$* , соответствующим собственной функции u .

5°. Линейный оператор $\hat{M}$ называют *самосопряженным* (или *эрмитовым*) оператором, если для него справедливо следующее условие:

$$\int u_1^* \hat{M} u_2 dt = \int u_2 (\hat{M} u_1)^* dt,$$

где $dt = dx_1 dx_2 \dots$, интегрирование проводится по всей области изменения независимых переменных $x_1, x_2, \dots$, а функции $|u_1|^2$ и $|u_2|^2$ интегрируемы в этой области, знак $*$ означает комплексное сопряжение.

Характерная особенность самосопряженных операторов, обусловившая их применение в квантовой механике, состоит в том, что их собственные значения являются вещественными числами.

Если операторы $\hat{M}$ и $\hat{N}$ самосопряженные, то операторы $\hat{M} + \hat{N}$ самосопряженные и $\hat{M}\hat{N} + \hat{N}\hat{M}$ — также самосопряженные. Если операторы $\hat{M}$ и $\hat{N}$ самосопряженные и коммутирующие, то их произведение $\hat{M}\hat{N}$ — самосопряженный оператор.

6°. Если u_1, u_2 — собственные функции линейного самосопряженного оператора с дискретным спектром собственных значений, и, если этим функциям соответ-

ствуют разные собственные значения, то любые две из этих функций *ортгоналны* друг другу, т. е.

$$\int u_m^* u_n d\tau = 0 \quad (\text{при } m \neq n),$$

где интегрирование проводится по всей области значений независимых переменных.

Возможен также случай, называемый *вырожденным*, когда нескольким разным (т. е. линейно независимым) собственным функциям оператора соответствует одно и то же собственное значение. Число этих функций называют *кратностью вырождения*. Все эти вырожденные функции не ортгоналны друг другу. Однако их можно заменить взаимно ортгоналными собственными функциями, представляющими собой линейные комбинации вырожденных собственных функций. Систему ортгоналных функций обычно нормируют, т. е. путем умножения на соответствующие коэффициенты добиваются выполнения условия:

$$\int u_n^* u_n d\tau = 1.$$

7°. Если $u_1(\tau), u_2(\tau), \dots$ — система нормированных ортгоналных функций, то произвольную функцию $u(\tau)$, квадрат модуля которой интегрируем по всей области изменения аргументов, можно представить в виде линейной комбинации ортгоналных функций:

$$u(\tau) = c_1 u_1(\tau) + c_2 u_2(\tau) + \dots,$$

где $c_k = \int u_k^* u d\tau$.

Такое представление называют *разложением по ортгоналным функциям*.

4. ОПЕРАТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. В классической механике для характеристики состояния и движения системы пользуются различными физическими (динамическими) величинами — координатами, импульсом, моментом импульса, кинетической и потенциальной энергиями, функциями Лагранжа и Гамильтона и др.

В квантовой механике состояние системы характеризуют ее волновой функцией (Ψ -функцией), а каждой динамической переменной M классической механики

сопоставляют линейный самосопряженный оператор $\hat{M}$, который действует на волновую функцию рассматриваемого состояния системы. Если это состояние таково, что Ψ -функция является собственной функцией оператора $\hat{M}$, то система имеет в этом состоянии вполне определенное значение динамической переменной M , равное соответствующему собственному значению оператора $\hat{M}$. Именно такое значение динамической переменной M получается в результате ее измерения у системы, находящейся в рассматриваемом состоянии.

Если Ψ -функция системы не является собственной функцией оператора $\hat{M}$, то в этом состоянии системы динамическая переменная M не имеет определенного значения: результаты измерения величины M , проведенные со множеством тождественных систем, которые находятся в одном и том же рассматриваемом состоянии, будут различными. В этом случае говорят о *среднем значении* $\langle M \rangle$ динамической переменной M :

$$\langle M \rangle = \int \Psi^* \hat{M} \Psi dt,$$

где Ψ — нормированная волновая функция системы в рассматриваемом состоянии.

2°. Два эрмитовых оператора $\hat{M}$ и $\hat{N}$ имеют общие собственные функции, а соответствующие им динамические характеристики M и N системы одновременно имеют точные значения, только при условии, что операторы $\hat{M}$ и $\hat{N}$ — коммутирующие.

Если операторы $\hat{M}$ и $\hat{N}$ не коммутирующие, то величины M и N не могут одновременно иметь точные значения. В этом случае среднеквадратичные отклонения ΔM и ΔN этих величин от их средних значений $\langle M \rangle$ и $\langle N \rangle$ удовлетворяют соотношению:

$$\Delta M \cdot \Delta N \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{M}, \hat{N}] \rangle|,$$

где оператор $\hat{M} \hat{N} - \hat{N} \hat{M} \equiv [\hat{M}, \hat{N}]$ называют *коммутатором операторов* $\hat{M}$ и $\hat{N}$.

3°. В координатном представлении операторы координат равны самим координатам, т. е. их действие на

Ψ -функцию сводится к ее умножению на соответствующую координату: $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$ и $\hat{z} = z$.

Оператор $\hat{F}$ произвольной функции координат $F(x, y, z)$ равен самой этой функции: $\hat{F} = F$.

Операторы проекций импульса на оси декартовых координат:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Оператор вектора импульса:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla,$$

где $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ — набла-оператор.

Операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}_x$ (а также $\hat{y}$ и $\hat{p}_y$, $\hat{z}$ и $\hat{p}_z$) не коммутируют, а их коммутатор $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Поэтому справедливы соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Собственные функции оператора проекции импульса на ось x находят из уравнения

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi,$$

где p_x — собственные значения этого оператора. Собственные функции оператора $\hat{p}_x$ имеют вид: $\Psi(x) = C \exp \frac{i p_x x}{\hbar}$, где $C = \text{const}$.

4°. В квантовой механике классическому моменту импульса частицы $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ соответствует оператор

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}},$$

где $\hat{\mathbf{r}} = i\hat{x} + j\hat{y} + k\hat{z}$, а $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор импульса.

Операторы проекций момента импульса:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \hat{L}_z = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Оператор квадрата модуля момента импульса:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \\ = -\hbar^2 \left[\left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_z$ не коммутируют между собой:

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x,$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y,$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z.$$

но коммутируют с оператором $\hat{L}^2$.

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = [\hat{L}_y, \hat{L}^2] = [\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0$$

Это означает, что одновременно могут иметь определенные значения квадрат модуля момента импульса и какая-нибудь одна проекция момента импульса (например, L_z). Классическая модель этой закономерности — постоянный по модулю вектор L , образующий постоянный угол α с осью z . ($L_z = L \cos \alpha = \text{const}$) и вращающийся (прецессирующий) вокруг этой оси.

Операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$ в сферических координатах:

$$\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{и} \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}.$$

Здесь

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— оператор Лапласа для сферы, его называют также оператором Лежандра и обозначают символом Δ .

5°. Собственные функции и собственные значения оператора $\hat{L}^2$ находят из дифференциального уравнения

$$\hat{L}^2 \Psi = L^2 \Psi,$$

или

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \lambda \Psi = 0,$$

где $\Psi = \Psi(\theta, \varphi)$, так как оператор $\hat{L}^2$ действует только на функции углов θ и φ , а $\lambda = \frac{L^2}{\hbar^2}$.

Однозначные конечные и непрерывные решения во всей области изменения переменных ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) это уравнение имеет лишь при условии $\lambda = l(l+1)$, где l — целое, неотрицательное число.

Следовательно, квадрат модуля момента импульса частицы может принимать только следующие дискретные значения (*квантование квадрата модуля момента импульса*):

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1),$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$.

Каждому значению l соответствует $(2l+1)$ решений — собственных функций оператора $\hat{L}^2$, которые представляют собой *сферические функции*

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)! (2l+1)}{(l+|m|)! 4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \exp[i m \varphi],$$

где m — целое число, принимающее значения: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ [всего $(2l+1)$ значений], $|m|$ — модуль числа m , а

$$P_l^{|m|}(\xi) = (1-\xi)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_l(\xi).$$

Здесь $\xi = \cos \theta$, $P_l(\xi)$ — полиномы Лежандра:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l.$$

Коэффициент перед $P_l^{[m]}$ в формуле для $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ выбран так, что функция Y_{lm} нормирована к 1 на поверхности шара единичного радиуса:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm} Y_{lm}^* \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 1.$$

Функции Y_{lm} являются также собственными функциями оператора $\hat{L}_z$:

$$\hat{L}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm},$$

т. е. проекция момента импульса $\hat{L}_z$ тоже квантуется по закону:

$$L_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l).$$

6°. Кинетическая энергия T частицы в классической механике равна

$$T = \frac{p^2}{2m},$$

где p — импульс частицы, а m — ее масса.

Оператор кинетической энергии в квантовой механике:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Операторы кинетической энергии и проекций импульса коммутируют между собой. Поэтому кинетическая энергия и проекция импульса на какую-либо ось координат могут быть точно измерены одновременно. Собственные функции оператора кинетической энергии находятся из уравнения: $\hat{T}\Psi = T\Psi$. Ему удовлетворяет функция, представляющая собой плоскую волну де Бройля:

$$\Psi(x, y, z) = A \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z) \right],$$

где $A = \text{const}$, $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 2mT$.

7°. Оператор $\hat{U}$ потенциальной энергии, являющейся функцией координат, равен самой этой функции U :

$$\hat{U}\Psi = U\Psi.$$

В классической механике полная механическая энергия консервативной системы $T + U = H$ — функция Гамильтона этой системы. В квантовой механике функции Гамильтона сопоставляют оператор Гамильтона (гамильтониан) $\hat{H}$.

Гамильтониан частицы массой m с электрическим зарядом q , взаимодействующей с электромагнитным полем, имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - qA)^2 + q\phi,$$

где A — векторный потенциал электромагнитного поля, ϕ — скалярный потенциал поля.

5. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

1°. В квантовой механике постулируется, что при движении частицы во внешнем силовом поле Ψ -функция частицы изменяется по следующему закону:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi.$$

Это уравнение называют *общим уравнением Шрёдингера* (или *временным уравнением Шрёдингера*). Оно является *основным уравнением нерелятивистской квантовой механики*, а его справедливость подтверждается совпадением с опытными данными тех следствий, которые из него вытекают. Уравнение Шрёдингера выражает *принцип причинности в квантовой механике*, так как позволяет, если известны Ψ -функция частицы в начальный момент времени $t = 0$ и силовое поле, в котором движется частица, найти Ψ -функцию частицы в последующие моменты времени.

2°. Уравнение Шрёдингера для частицы в потенциальном поле $U(r, t)$ имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(r, t) \Psi.$$

Функция $\Psi(r, t)$ должна удовлетворять следующим трем условиям:

1) должна быть непрерывной и конечной,

2) ее частные производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ долж-

ны быть непрерывны,

3) функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема во всей области определения объема V , т. е. интеграл $\int_V |\Psi|^2 dV$ должен быть конечным (равным 1 для нормированной Ψ -функции).

3°. Если нет переменных внешних полей, то $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, и потенциальная функция $U = U(\mathbf{r})$. В этом случае путем разделения переменных $\Psi(\mathbf{r}, t) = f(t)\psi(\mathbf{r})$ уравнение Шрёдингера приводится к двум уравнениям:

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = E f$$

и

$$\hat{H} \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}),$$

где E — постоянная разделения, имеющая размерность энергии (собственное значение энергии).

Решение первого уравнения имеет вид:

$$f(t) = \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right).$$

Второе уравнение называют *стационарным уравнением Шрёдингера*. Оно представляет собой уравнение для нахождения собственных функций и собственных значений гамильтониана частицы, которое записывается в развернутом виде:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\mathbf{r})] \psi = 0.$$

В зависимости от вида функции $U(\mathbf{r})$ решения стационарного уравнения Шрёдингера, удовлетворяющие математическим требованиям, накладываемым на Ψ -функцию, можно получить:

а) при непрерывных значениях энергии E частицы (*сплошной энергетический спектр*),

б) при определенных (квантованных) значениях $E_1, E_2, \dots$ (*дискретный энергетический спектр*),

в) при непрерывных значениях E в одной области поля и при дискретных — в другой.

При указанном выборе функции $f(t)$ координатная функция $\psi(\mathbf{r})$ должна удовлетворять *условию нормировки* (1.1).

4°. Из общего уравнения Шрёдингера следует, что плотность вероятности $\rho_w = \Psi\Psi^* = |\Psi|^2$ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где $\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)$ — вектор плотности потока вероятности.

5°. Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$, описывающая произвольное состояние микрочастицы, гамильтониан которой не зависит явно от времени, может быть представлена в виде суперпозиции полного набора волновых функций стационарных состояний. В случае дискретных состояний:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \Psi_n(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \Psi_n(\mathbf{r}) \exp\left(-i \frac{E_n t}{\hbar}\right),$$

где c_n — постоянные коэффициенты, $\Psi_n(\mathbf{r})$ — волновые функции стационарных состояний, являющиеся решениями стационарного уравнения Шрёдингера, E_n — собственные значения, образующие энергетический спектр состояния частицы. Суммирование производится по всем стационарным состояниям. Отыскание спектра собственных значений энергии частицы является важнейшей задачей квантовой механики.

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1°. Среднее значение $\langle M \rangle$ в момент времени t какой-либо величины M частицы равно

$$\langle M(t) \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{M} \Psi(\mathbf{r}, t) d\tau,$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — нормированная волновая функция частицы, $d\tau = dx dy dz$, и интегрирование проводится по всей области изменения координат. Найдем производную по времени от среднего значения динамической переменной:

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{M} \Psi d\tau + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} \Psi d\tau + \int \Psi^* \hat{M} \frac{\partial \Psi}{\partial t} d\tau.$$

Из общего уравнения Шрёдингера следует, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \Psi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{H}^* \Psi^*.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\langle M \rangle}{dt} &= -\frac{1}{i\hbar} \int (\hat{H}^* \Psi^*)(\hat{M} \Psi) d\tau + \\ &+ \int \Psi^* \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} \Psi d\tau + \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* \hat{M} \hat{H} \Psi d\tau. \end{aligned}$$

Оператор $\hat{H}$ — самосопряженный, так что

$$\int (\hat{H}^* \Psi^*)(\hat{M} \Psi) d\tau = \int \Psi^* \hat{H} \hat{M} \Psi d\tau$$

и

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \int \Psi^* \left(\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} + \{ \hat{H}, \hat{M} \} \right) \Psi d\tau,$$

где $\{ \hat{H}, \hat{M} \}$ — оператор, называемый *квантовой скобкой Пуассона* и равный

$$\{ \hat{H}, \hat{M} \} = \frac{1}{i\hbar} (\hat{M} \hat{H} - \hat{H} \hat{M}).$$

2°. Дифференцированию по времени динамической переменной M соответствует оператор:

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} + \{ \hat{H}, \hat{M} \}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} \right\rangle + \langle \{ \hat{H}, \hat{M} \} \rangle,$$

т. е. производная по времени от среднего равна среднему от производной по времени. Если переменная M явно от времени не зависит, то $\langle \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} \rangle = 0$ и $\frac{d\hat{M}}{dt} = \{ \hat{H}, \hat{M} \}$,

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \langle \{ \hat{H}, \hat{M} \} \rangle.$$

3°. Координаты и проекции импульса частицы не зависят явно от времени и удовлетворяют следующим квантовым уравнениям движения:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \{\hat{H}, \hat{x}\} = \frac{\hat{p}_x}{m}, \quad \frac{d\hat{y}}{dt} = \{\hat{H}, \hat{y}\} = \frac{\hat{p}_y}{m}, \\ \frac{d\hat{z}}{dt} &= \{\hat{H}, \hat{z}\} = \frac{\hat{p}_z}{m}, \\ \frac{d\hat{p}_x}{dt} &= \{\hat{H}, \hat{p}_x\} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial x}, \quad \frac{d\hat{p}_y}{dt} = \{\hat{H}, \hat{p}_y\} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial y}, \\ \frac{d\hat{p}_z}{dt} &= \{\hat{H}, \hat{p}_z\} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial z},\end{aligned}$$

где m — масса частицы, $\hat{U}$ — оператор потенциальной энергии.

Эти соотношения между операторами соответствуют *теореме Эренфеста*: средние значения механических величин подчиняются законам классической механики. Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}\langle v_x \rangle &= \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p_x \rangle}{m}, \quad \langle v_y \rangle = \frac{d\langle y \rangle}{dt} = \frac{\langle p_y \rangle}{m}, \\ \langle v_z \rangle &= \frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{\langle p_z \rangle}{m}, \\ \frac{d\langle \hat{p}_x \rangle}{dt} &= -\langle \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \rangle = \langle F_x \rangle, \quad \frac{d\langle \hat{p}_y \rangle}{dt} = -\langle \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} \rangle = \langle F_y \rangle, \\ \frac{d\langle \hat{p}_z \rangle}{dt} &= -\langle \frac{\partial \hat{U}}{\partial z} \rangle = \langle F_z \rangle,\end{aligned}$$

где $\langle F_x \rangle$, $\langle F_y \rangle$, $\langle F_z \rangle$ — средние значения проекций силы, действующей на частицу в поле U .

4°. В квантовой механике так же, как и в классической, выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии, но формулируются они несколько иначе. Величина $\hat{M}$ будет интегралом движения, т. е. ее среднее значение $\langle \hat{M} \rangle$ не будет изменяться с течением времени $\left(\frac{d\langle \hat{M} \rangle}{dt} = 0 \right)$, если оператор диф-

ференцирования $\hat{M}$ по времени t равен нулю:

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \frac{\partial \hat{M}}{\partial t} + \{\hat{H}, \hat{M}\} \equiv 0.$$

Таким образом, величина $\hat{M}$, не зависящая явно от времени $\left(\frac{\partial \hat{M}}{\partial t} \equiv 0\right)$, является интегралом движения только в том случае, если ее оператор $\hat{M}$ коммутирует с оператором Гамильтона $\hat{H}$.

5°. Оператор Гамильтона свободной частицы ($\hat{U} = 0$) равен

$$\hat{H} = \hat{T} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2)$$

и

$$\{\hat{H}, \hat{p}_x\} = \{\hat{H}, \hat{p}_y\} = \{\hat{H}, \hat{p}_z\} = 0.$$

Поэтому $\frac{d\hat{p}_x}{dt} = \frac{d\hat{p}_y}{dt} = \frac{d\hat{p}_z}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ и $\langle \mathbf{p} \rangle = \text{const}$, т. е. импульс свободной частицы, как и ее энергия, является интегралом движения.

6°. Оператор Гамильтона частицы, движущейся в поле центральных сил ($U = U(r)$, r — расстояние от центра сил), удобно выражать в сферических координатах:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \Delta_{\theta, \varphi} \right) + U(r) = \hat{T}_r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r),$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа. Так как операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$ зависят только от переменных θ и φ и не действуют на функции от r , то

$$\{\hat{H}, \hat{L}_x\} = \{\hat{H}, \hat{L}_y\} = \{\hat{H}, \hat{L}_z\} = \{\hat{H}, \hat{L}^2\} = 0$$

и

$$\langle \mathbf{L} \rangle = \text{const},$$

т. е. момент импульса частицы в поле центральных сил является интегралом движения.

7°. Условия сохранения полной энергии частицы:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0 \text{ и } \langle H \rangle = \text{const},$$

т. е. полная энергия частицы в поле сил, не зависящих от времени, является интегралом движения.

7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1°. В квантовой механике используют различные способы представления состояния частицы и операторов ее динамических переменных. Описание состояния посредством Ψ -функции, зависящей от координат и времени $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$, называют *координатным представлением* (в дальнейшем, ради простоты, используется обозначение $\Psi(\mathbf{x}, t)$ — $\mathbf{x}$ -представление). В этом случае квадрат модуля нормированной пси-функции частицы равен плотности вероятности обнаружения частицы в момент времени t в рассматриваемой точке пространства с координатами x, y, z .

Если за основу определения состояния частицы взять собственные функции эрмитова оператора $\hat{M}$, соответствующего динамической переменной M (например, энергию E , импульс p и др.), то говорят об M -представлении (например, о E -представлении, p -представлении и др.).

2°. Согласно принципу суперпозиции функцию $\Psi(\mathbf{x}, t)$ можно разложить по собственным функциям $\Psi_M(\mathbf{x})$ оператора $\hat{M}$. В случае непрерывного спектра собственных значений оператора $\hat{M}$:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int a(M, t) \Psi_M(\mathbf{x}) dM,$$

где

$$a(M, t) = \int \Psi_M^*(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Первая формула выражает переход от M -представления к $\mathbf{x}$ -представлению, а вторая — обратный переход от координатного представления к M -представлению.

Плотность вероятности $\rho(M, t)$ найти переменную M в момент времени t , заключенную в пределах от M до $M + dM$, равна

$$\rho_w(M, t) = \frac{dw}{dM} = |a(M, t)|^2.$$

В случае дискретного спектра собственных значений оператора $\hat{M}(M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$ $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n(\mathbf{x})$,

где $a_n(t) = \int \Psi_n^*(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$.

Вероятность того, что величина M , равна M_n в момент времени t ,

$$w(M_n, t) = |a_n(t)|^2.$$

3°. В параграфе VI.1.4.4 приведены выражения операторов $\hat{M}$ механических характеристик частицы, соответствующие координатному представлению (x -представлению):

$$\varphi(x) = \hat{M} \psi(x), \quad (1.2)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции координат.

Выражение оператора $\hat{M}$ в энергетическом представлении (в E -представлении), например, при дискретном спектре значений энергии E_n ($n = 1, 2, \dots$) можно найти следующим образом. Функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ представляют в виде разложения по собственным функциям $\psi_n(x)$ оператора Гамильтона:

$$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \text{ и } \varphi(x) = \sum_n b_n \psi_n(x), \quad (1.3)$$

где совокупность c_n и b_n задают функции ψ и φ в E -представлении. Оператор $\hat{M}$, переводящий функцию $\psi(x)$ в $\varphi(x)$, переводит совокупность c_n в b_n . Оператор $\hat{M}$ в E -представлении должен непосредственно переводить c_n в b_n . Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$\sum_n b_n \psi_n(x) = \sum_n c_n \hat{M} \psi_n(x).$$

Умножая это равенство на $\psi_m^*(x)$ и интегрируя по всему пространству, в силу ортогональности функций $\psi_n(x)$ получим

$$b_m = \sum_n c_n M_{mn},$$

где $M_{mn} = \int \psi_m^*(x) \hat{M} \psi_n(x) dx$ — матричный элемент оператора $\hat{M}$ в E -представлении. Совокупность всех матричных элементов представляет оператор $\hat{M}$ в E -пред-

ставлении. Его можно записать в виде бесконечной квадратной таблицы — *матрицы*:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} M_{12} \dots M_{1n} \dots \\ M_{21} M_{22} \dots M_{2n} \dots \\ \dots \\ M_{m1} M_{m2} \dots M_{mn} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $\hat{M} = (M_{mn}) = [M_{mn}]$.

Обычно строки и столбцы матрицы нумеруют в порядке возрастания энергии: $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \leq \dots$.

4°. В случае импульсного представления (p -представления) функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, связанные оператором $\hat{M}$, разлагают по собственным функциям $\psi_p(x)$ оператора $\hat{p}$, имеющего непрерывный спектр собственных значений:

$$\Psi(x) = \int a(p) \psi_p(x) dp \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \int b(p) \psi_p(x) dp.$$

Так как $\varphi(x) = \hat{M} \Psi(x)$, то

$$\int b(p) \psi_p(x) dp = \int a(p) \hat{M} \psi_p(x) dp.$$

Умножая это уравнение на $\psi_{p'}^*(x)$ и интегрируя по координатам, получаем

$$\int b(p) dp \int \psi_{p'}^*(x) \psi_p(x) dx = \int a(p) dp \int \psi_{p'}^*(x) \hat{M} \psi_p(x) dx,$$

или, вследствие ортогональности функций $\psi_p(x)$,

$$b(p') = \int a(p) M_{p'p} dp,$$

где $M_{p'p} = \int \psi_{p'}^*(x) \hat{M} \psi_p(x) dx$ — матричный элемент оператора $\hat{M}$ в p -представлении.

5°. Матрицу называют *диагональной*, если отличны от нуля только ее диагональные элементы:

а) в случае дискретного спектра $M_{mn} = 0$ при $m \neq n$;

б) в случае непрерывного спектра $M_{p'p} = 0$ при $p' \neq p$.

Диагональную матрицу называют *единичной матрицей* δ_{mn} , если $\delta_{mn} = 1$, при $m = n$, и $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$.

Оператору $\hat{M}$ в его собственном M -представлении соответствует диагональная матрица. При этом имеют диагональные матрицы и все другие операторы, коммутирующие с $\hat{M}$. Например, оператору $\hat{H}$ в E -представлении соответствует диагональная матрица, которая в случае дискретного спектра имеет вид

$$H_{mn} = E_m \delta_{mn} = \begin{cases} E_n & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Матрице $M = \|M_{mn}\|$ соответствует:

а) комплексно сопряженная матрица $M^* = \|M_{mn}^*\|$;

б) транспонированная матрица $\tilde{M} = \|\tilde{M}_{mn}\|$, где $\|\tilde{M}_{mn}\| = M_{nm}$, т. е. в $\tilde{M}$ строками служат столбцы матрицы M , а столбцами — строки матрицы M ;

в) сопряженная матрица $M^+ = \|M_{mn}^+\|$, где $M_{mn}^+ = M_{nm}^*$.

Матрицу M называют *самосопряженной*, или *эрмитовой*, если с ней совпадает ее сопряженная матрица, т. е. $M_{mn}^+ = M_{mn}^* = M_{mn}$. Всем самосопряженным операторам соответствуют самосопряженные матрицы.

6°. Алгебраические операции над матрицами:

а) сумме операторов $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ соответствует матрица $\|C_{mn}\|$, равная сумме матриц операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$: $\|C_{mn}\| = \|A_{mn}\| + \|B_{mn}\|$, причем $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$;

б) произведению операторов $\hat{C} = \hat{B} \hat{A}$ соответствует матрица $\|C_{mn}\|$, равная произведению матриц операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$: $\|C_{mn}\| = \|A_{mn}\| \|B_{mn}\|$, причем $C_{mn} = \sum_k A_{mk} B_{kn}$.

7°. Среднее значение величины M в E -представлении при дискретном спектре энергии выражается в матричной форме следующим образом:

$$\langle M \rangle = \sum_n \sum_m c_m^* M_{mn} c_n,$$

где M_{mn} , c_m^* и c_n имеют тот же смысл, что в п. 3°. Производная по времени от $\langle M \rangle$ равна

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \frac{dM}{dt} = \sum_n \sum_m c_m^* \left[\frac{\partial M_{mn}}{\partial t} + \{\hat{H}, \hat{M}\}_{mn} \right] c_n,$$

где $\{\hat{H}, \hat{M}\}_{mn} = \frac{1}{i\hbar} \sum_k (M_{mk} H_{kn} - H_{mk} M_{kn})$ — матричный элемент квантовой скобки Пуассона. Матричный элемент оператора $\frac{d\hat{M}}{dt}$ равен

$$\left(\frac{d\hat{M}}{dt} \right)_{mn} = \frac{\partial \hat{M}_{mn}}{\partial t} + \{\hat{H}, \hat{M}\}_{mn}.$$

8°. Уравнение Шрёдингера можно записать в матричной форме, пользуясь разложением Ψ -функции по собственным функциям какого-либо оператора $\hat{M}$. В случае дискретного спектра собственных значений этого оператора $\Psi(x, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n(x)$, и уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_n H_{mn} a_n \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где $H_{mn} = \int \Psi_m^*(x) \hat{H} \Psi_n(x) dx$ — матричный элемент оператора Гамильтона в M -представлении. В частности, в E -представлении

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \Psi_n(x), \quad H_{mn} = E_n \delta_{mn},$$

и уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m, \quad \text{откуда } c_m(t) = \exp\left[-\frac{iE_m t}{\hbar}\right].$$

Если оператор $\hat{M}$ не зависит явно от времени, то в E -представлении, согласно п. 7°,

$$\left(\frac{d\hat{M}}{dt} \right)_{mn} = \frac{1}{i\hbar} (E_n - E_m) M_{mn} = i\omega_{mn} M_{mn},$$

где $\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$ — боровская круговая частота.

Глава 2

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

1°. В классической механике потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора — частицы массой m , колеблющейся с циклической частотой ω_0 вдоль оси x под действием квазиупругой силы, равна

$$U(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2.$$

Соответственно, стационарное уравнение Шрёдингера для собственных волновых функций $\psi(x)$ и собственных значений E гамильтониана осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi(x) = 0,$$

или

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\Psi(\xi) = 0,$$

где $\xi = \frac{x}{x_0}$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ и $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$.

Это уравнение имеет непрерывные решения во всей области изменения ξ от $-\infty$ до $+\infty$ только при условии, что безразмерный коэффициент λ принимает значения $\lambda_n = 2n + 1$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

2°. Собственные значения энергий осциллятора равны

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

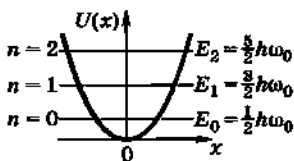


Рис. VI.2.1

Число n , определяющее номер энергетического уровня осциллятора, называют *квантовым числом*. На рис. VI.2.1 изображены график функции $U(x)$ осциллятора и схема дискретных энергетических уровней E_n . Наи-

меньшую энергию, которую может иметь осциллятор, $E_0 = \frac{\hbar\omega_0^2}{2}$ называют *нулевой энергией*. Нулевая энергия — наименьшая энергия осциллятора, совместимая с соотношением неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$. Нулевой энергии соответствуют *нулевые колебания*.

3°. Собственная нормированная функция ψ_n осциллятора, соответствующая состоянию с энергией E_n ,

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

и

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \psi_n(\xi),$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита n -го порядка:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

Четность функций $\psi_n(\xi)$ и $\psi_n(x)$ совпадает с четностью квантового числа n .

Для $n = 0, 1, 2$:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right),$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0} \sqrt{\pi}} \frac{2x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right),$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0} \sqrt{\pi}} \left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2 \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right).$$

Число узлов функции ψ_n , т. е. ее значений, равных нулю, равно квантовому числу n .

4°. В классической механике статистическому ансамблю одинаковых одномерных осцилляторов можно сопоставить

ставить плотность вероятности $\rho_{\text{кл}}(x)$ нахождения осциллятора на расстоянии x от положения равновесия, равную

$$\rho_{\text{кл}}(x) = \begin{cases} \left(\pi \sqrt{a^2 - x^2} \right)^{-1} & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$$

где a — амплитуда колебаний.

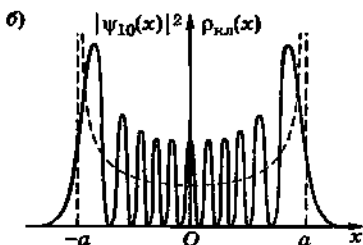
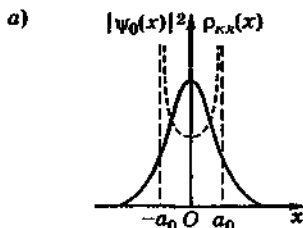


Рис. VI.2.2

В квантовой механике $\rho_{\text{кв}, n}(x) = |\psi_n(x)|^2$. На рис. VI. 2.2, а показаны для сравнения графики $\rho_{\text{кв}}(x) = |\psi_0(x)|^2$ осциллятора, находящегося в состоянии $n = 0$, и $\rho_{\text{кл}}(x)$

при $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. На

рис. VI.2.2, б показаны графики $|\psi_{10}(x)|^2$ и

$\rho_{\text{кл}}(x)$ при $a_{10} = \sqrt{\frac{21\hbar}{m\omega_0}}$.

В квантовой механике отлична от нуля вероятность найти частицу при $|x| > a$, т. е. в области классической недоступности, где потенциальная энергия частицы больше ее полной энергии.

Это не нарушает закона сохранения энергии, ибо кинетическая и потенциальная энергии не могут быть точно измерены одновременно.

5°. Модель линейного гармонического осциллятора широко используется в приложениях. Подходящим выбором координат («нормальные координаты») движение механической системы частиц, совершающих малые колебания, может быть сведено к движению совокупности независимых гармонических осцилляторов.

2. РОТАТОР

1°. *Ротатором* называют частицу массой m , которая совершает плоское движение, оставаясь на одном и том же расстоянии r от неподвижного центра O . В клас-

сической механике частица движется вокруг точки O по окружности радиусом r , плоскость которой перпендикулярна вектору L момента импульса частицы относительно центра O . Энергия ротатора E в отсутствие внешних сил (потенциальная энергия $U = 0$) равна его кинетической энергии: $E = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2J}$, где $J = mr^2$ —

момент инерции ротатора.

2°. При квантовомеханическом рассмотрении гамильтониан ротатора

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2J} = -\frac{\hbar^2}{2J} \Delta_{\theta, \varphi}$$

где $\hat{L}^2$ — оператор квадрата момента импульса, а $\Delta_{\theta, \varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа.

Состояние ротатора характеризуется определенными значениями квадрата момента импульса, $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$, и его проекции $L_z = \hbar m$, где $l = 0, 1, 2, \dots$ и $m = -l, (-l+1), \dots, 0, \dots, (l-1)$, l [всего $(2l+1)$ значений].

3°. Собственные функции оператора $\hat{L}^2$ ротатора — сферические функции:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta),$$

где $P_l^{|m|} \cos \theta$ — полином Лежандра, C_{lm} — нормировочный множитель.

Собственные значения энергии ротатора равны $E_l = -\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2J}$. Значения E_l не зависят от квантового чис-

ла m , так что существует $(2l+1)$ -кратное вырождение по значениям проекции L_z момента импульса.

4°. Ротатор применяют как идеализированную модель при изучении вращательного движения молекул и атомных ядер. Моделью ротатора пользуются при изучении движения двухатомных молекул, у которых расстояния между атомами изменяются мало. Различные состояния вращения молекулы как целого (ротационный спектр молекулы) хорошо описываются собственными функциями и собственными значениями энергии ротатора.

3. ОДНОМЕРНАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА

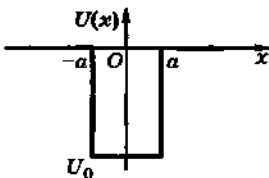


Рис. VI.2.3

1°. Одномерной прямоугольной потенциальной ямой называют область поля, в которой потенциальная энергия частицы в классической механике зависит от одной координаты x следующим образом (рис. VI.2.3):

$$U(x) = \begin{cases} U_0 < 0 & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера для ψ -функции частицы внутри ямы ($\psi_1(x)$) и вне ее ($\psi_2(x)$) имеет вид

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi_1 = 0, \text{ или } \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0,$$

и

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2 = 0, \text{ или } \frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2^2\psi_2 = 0,$$

где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$ и $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE}$.

2°. Если $U_0 < E < 0$, то общие решения имеют вид:

$$\psi_1(x) = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x,$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} C_1 e^{-k_2 x} & \text{при } x > a, \\ C_2 e^{k_2 x} & \text{при } x < -a. \end{cases}$$

Из условия непрерывности $\psi(x)$ и $\frac{d\psi}{dx}$ на границах ямы следует:

$$2A \sin k_1 a = (C_1 - C_2) e^{-k_2 a},$$

$$2B \cos k_1 a = (C_1 + C_2) e^{-k_2 a},$$

$$2k_1 B \sin k_1 a = k_2 (C_1 + C_2) e^{-k_2 a},$$

$$2k_1 A \cos k_1 a = -k_2 (C_1 - C_2) e^{-k_2 a}.$$

3°. Из симметрии поля следует, что $C_1^2 = C_2^2$, т. е. либо $C_2 = C_1$, либо $C_2 = -C_1$. В первом случае функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — четные, т. е. $A = 0$, $B \neq 0$; $\psi_1(x) = B \cos k_1 x$ и

$$k_1 \operatorname{tg} k_1 a = k_2. \quad (2.1)$$

Во втором случае функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — нечетные, т. е. $B = 0$, $A \neq 0$, $\psi_1(x) = A \sin k_1 x$ и

$$k_1 \operatorname{ctg} k_1 a = -k_2. \quad (2.2)$$

Возможные дискретные значения энергии частицы в потенциальной яме находят из трансцендентных уравнений (2.1) и (2.2). Общее число этих энергетических уровней конечно и зависит от «размеров ямы», т. е. от ее «глубины» U_0 и ширины $2a$, причем наимизший уровень лежит выше дна ямы.

Если энергия частицы $E > 0$, то ее движение неограничено (инфинитно), а энергетический спектр непрерывен.

4°. Для частицы, находящийся в одномерной прямоугольной потенциальной яме бесконечной «глубины»,

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < a, \\ +\infty & \text{при } |x| > a; \end{cases}$$

функция $\psi(x)$ отлична от нуля только внутри ямы и равна нулю на ее границах: $\psi(-a) = \psi(a) = 0$.

Стационарное уравнение Шрёдингера для частицы в яме:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0,$$

где $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$.

Общее нормированное решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} & (n = 1, 3, 5, \dots), \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} & (n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases}$$

Энергетические уровни частицы в яме дискретны:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2 \quad (n = (1, 2, 3, \dots)).$$

4. ТРЕХМЕРНАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА

1°. Трехмерная прямоугольная потенциальная яма имеет вид

$$U(x) = \begin{cases} U_0 < 0 & \text{при } |x| < a_1, \quad |y| < a_2, \quad |z| < a_3, \\ 0 & \text{при } |x| > a_1, \quad |y| > a_2, \quad |z| > a_3. \end{cases}$$

Стационарные уравнения Шрёдингера для ψ -функции частицы внутри ямы $\psi_1(x, y, z)$ и вне ее $\psi_2(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + k_1^2 \psi_1 = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k_2^2 \psi_2 = 0,$$

где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$ и $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE}$.

2°. Искомые функции ψ_1 и ψ_2 можно представить в виде произведений трех функций каждой из координат:

$$\psi_1(x, y, z) = X_1(x)Y_1(y)Z_1(z)$$

и

$$\psi_2(x, y, z) = X_2(x)Y_2(y)Z_2(z),$$

причем

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \alpha_1^2 X_1 = 0, \quad \frac{d^2 Y_1}{dy^2} + \beta_1^2 Y_1 = 0, \quad \frac{d^2 Z_1}{dz^2} + \gamma_1^2 Z_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 X_2}{dx^2} - \alpha_2^2 X_2 = 0, \quad \frac{d^2 Y_2}{dy^2} - \beta_2^2 Y_2 = 0, \quad \frac{d^2 Z_2}{dz^2} - \gamma_2^2 Z_2 = 0,$$

где $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = k_1^2$ и $\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = k_2^2$.

Таким образом, задача сводится к задаче о движении частицы в одномерной потенциальной яме конечной глубины.

3°. Если частица находится в трехмерной потенциальной яме бесконечной «глубины»,

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < a_1, |y| < a_2, |z| < a_3, \\ +\infty & \text{при } |x| > a_1, |y| > a_2, |z| > a_3, \end{cases}$$

то энергия частицы может принимать только следующие дискретные (квантовые значения):

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m} \left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right),$$

где n_1, n_2, n_3 — квантовые числа.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

1°. На рис. VI.2.4 изображен одномерный прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 :

$$U(x) = 0 \quad (\text{при } x < 0) \\ \text{и } U(x) = U_0 \quad (\text{при } x > 0).$$

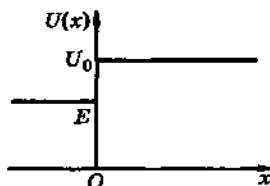


Рис. VI.2.4

Согласно классической механике, частица массой m , движущаяся в области $x < 0$ вдоль положительного направления оси x с постоянной скоростью $v = \sqrt{2mE}$, может проникнуть в область $x > 0$ лишь при условии, что энергия частицы E больше высоты барьера U_0 . Если $E < U_0$, то частица упруго отражается «от барьера», изменяя направление своей скорости на противоположное. Вероятность отражения частицы равна 1 при $E < U_0$ и нулю при $E > U_0$. Вероятность проникновения частицы «внутри барьера» (в область $x > 0$), соответственно, равна нулю при $E < U_0$ и равна 1 при $E > U_0$.

2°. В квантовой механике есть отличная от нуля вероятность захода частицы внутрь барьера при $E < U_0$ и отражения от барьера при $E > U_0$.

Стационарные уравнения Шрёдингера для волновых функций частицы $\psi_1(x)$ (в области $x < 0$) и $\psi_2(x)$ (в области $x > 0$):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0,$$

где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ и $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}$.

3°. Если $E > U_0$, то k_2 — действительное число, и

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{-ik_1 x}, \quad \psi_2(x) = B_1 e^{ik_2 x}.$$

Первый член в выражении для ψ_1 соответствует волне де Бройля частицы, движущейся к барьеру, а второй — частице, отраженной от барьера. Из граничных условий:

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$ и $\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$ следует, что вероятность

R отражения частицы от барьера и вероятность D ее перехода в область $x > 0$ равны:

$$R = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

и

$$D = 1 - R = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2},$$

так что $R < 1$, а $D > 0$.

4°. Если $E < U_0$, то k_2 — величина мнимая: $k_2 = ik$, где $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$. Соответственно, волновые функции имеют вид

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{-ik_1 x} \quad \text{и} \quad \psi_2(x) = B_1 e^{-kx}.$$

Из граничных условий следует, что вероятность отражения частицы от барьера

$$R = \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = 1,$$

т.е. полное отражение. Отсутствует поток частиц в классически запрещенной области $x > 0$, но есть отличная от нуля вероятность обнаружить частицу. Эта вероятность пропорциональна $|\psi_2(x)|^2$ и экспоненциально убывает по мере проникновения частицы под барьер. Аналогичное явление наблюдается в оптике при полном внутреннем отражении света.

5°. На рис. VI.2.5 изображен прямоугольный потенциальный барьер «высотой» U_0 , ширина которого равна d :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 & (\text{область 1}), \\ U_0 & 0 < x < d & (\text{область 2}), \\ 0 & x > d & (\text{область 3}). \end{cases}$$

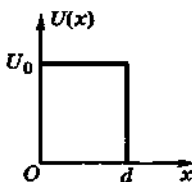


Рис. VI.2.5

Согласно классической механике, частица с энергией $E < U_0$ не может перейти из области 1 не только в область 3, но и внутрь барьера (область 2).

Иначе обстоит дело в квантовой механике. Стационарные уравнения Шрёдингера для волновой функции ψ -частицы массой m в областях 1 (ψ_1), 2 (ψ_2) и 3 (ψ_3):

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - k_2^2 \psi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_3 = 0,$$

где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ и $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} = ik$.

Решения этих трех уравнений:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{-ik_1 x},$$

$$\psi_2(x) = B_1 e^{-kx} + B_2 e^{kx},$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x}.$$

Из граничных условий при $x = 0$ и $x = d$ следует, что отлична от нуля вероятность D перехода в область 3 частицы, подлетающей к барьеру в области 1 и имеющей энергию $E < U_0$:

$$D = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 + k^2)^2 \operatorname{sh}^2 kd + 4k_1^2 k^2}.$$

Это явление «просачивания частицы сквозь потенциальный барьер» называют *туннельным эффектом*, а коэффициент D — *коэффициентом прозрачности потенциального барьера*.

6°. Если k_1 и k — одного порядка, а величина kd такова, что $\operatorname{sh}^2 kd \sim \frac{e^{2kd}}{4}$, то для коэффициента прозрачности D прямоугольного потенциального барьера пользуются приближенной формулой:

$$D \approx C e^{-2kd},$$

где коэффициент C порядка 1.

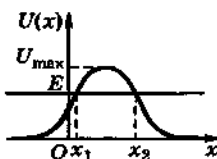


Рис. VI.2.6

В этом же приближении коэффициент прозрачности потенциального барьера произвольной формы $U(x)$ (рис. VI.2.6) равен

$$D \approx C \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right),$$

где x_1 и x_2 — координаты точек, в которых $U(x) = E$, $(x_2 - x_1)$ — ширина барьера для частицы с энергией E , а $(U_{\max} - E)$ — высота барьера.

7°. Туннельный эффект — чисто квантовомеханическое явление. В нем, как и в соотношении неопределенностей, проявляется корпускулярно-волновой дуализм свойств микрочастиц. В связи с неопределенностью координаты x туннелирующей частицы внутри барьера, равной его ширине, неопределенность в проекции им-

пульса p_x частицы и ее кинетической энергии $T = \frac{p_x^2}{2m}$ таковы, что $\Delta T > (U_{\max} - E)$. Поэтому туннельный эффект не противоречит закону сохранения энергии.

6. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ЦЕНТРАЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ЯДРА АТОМА (ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ ИОНЫ)

1°. Водородоподобный ион содержит один электрон, движущийся в центральном кулоновском поле ядра. Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия электрона и ядра равна

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где r — расстояние электрона от ядра, Z — зарядовое число ядра, ϵ_0 — электрическая постоянная.

Оператор Гамильтона электрона в поле неподвижного ядра в сферической системе координат имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2m_e r^2} + U(r),$$

где m_e — масса электрона, $\hat{L}^2$ — оператор квадрата момента импульса.

2°. *Стационарное уравнение Шрёдингера* для собственных волновых функций и значений энергии E электрона: $\hat{H}\psi = E\psi$. Оператор $\hat{L}^2$ коммутирует с гамильтонианом $\hat{H}$. Поэтому у них общие собственные функции

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \text{ и } \hat{L}^2 \psi = \hbar^2 l(l+1) \psi,$$

где Y_{lm} — сферическая функция, $R(r)$ — радиальная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - U(r)) R(r) = 0.$$

3°. При $E < 0$, т. е. для электрона, находящегося в связанном состоянии, непрерывные, конечные и однозначные решения уравнения Шрёдингера существуют лишь при следующих дискретных значениях E_n энергии, образующих энергетический спектр водородоподобного иона:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{R_\infty \hbar Z^2}{n^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — целое положительное число, называемое *главным квантовым числом*, $\hbar = 2\pi\hbar$ — постоянная Планка, R_∞ — постоянная Ридберга:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \approx 3,28 \cdot 10^{15} \text{ Гц},$$

$$R_\infty \hbar = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2,$$

где $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ — постоянная электромагнитного взаимодействия (*постоянная тонкой структуры*).

Энергетические уровни сгущаются по мере увеличения n . Состояние $E_\infty = 0$ ($n = \infty$) соответствует переходу электрона в свободное состояние, т. е. ионизации иона. Состояние $n = 1$ называют *основным состоянием*, а состояния с $n > 1$ называют *возбужденными состояниями*. Энергия основного состояния атома водорода ($Z = 1$)

$$E_1 = -\frac{R_\infty \hbar}{e} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Примечание. С учетом того, что и электрон, и атомное ядро движутся относительно центра масс иона, в написанные выше выражения для постоянной Ридберга нужно подставлять вместо массы m_e электрона приведенную массу системы электрон-атомное ядро:

$$m_{\text{пр.}} = \frac{m_e}{1 + m_e/M},$$

где M — масса ядра.

4°. Одновременно с энергией электрона в водородоподобном ионе принимают дискретные (квантованные) значения квадрат модуля момента импульса электрона L^2 и его проекция L_z :

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$$

и

$$L_z = m\hbar.$$

Число l , называемое *орбитальным квантовым числом*, может принимать при заданном главном квантовом числе n значения: $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Соответ-

ственно число m , называемое *магнитным квантовым числом*, принимает значения: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

В табл. VI.1 приведена принятая система обозначений состояний электрона в зависимости от значения его орбитального квантового числа l . Например, состояния ($n = 4, l = 3$) и ($n = 3, l = 2$) обозначают соответственно как $4f$ и $3d$.

Таблица VI.1

Орбитальное квантовое число	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Состояние	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>

5°. Энергия водородоподобного иона и атома водорода ($Z = 1$) не зависит от орбитального и магнитного чисел. Поэтому состояние с энергией E_n при $n > 1$ вырождено. *Кратность вырождения* равна числу различных возможных квантовых чисел l и m :

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Релятивистские эффекты и спин-орбитальное взаимодействие частично снимают вырождение энергетических уровней атома водорода и водородоподобных ионов, вызывая их расщепление на близко расположенные подуровни, энергия которых зависит не только от главного квантового числа n , но и от орбитального l (*тонкая структура уровней*):

$$E_{nl} = -\frac{R\hbar Z^2}{n^2} \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j+0,5} - \frac{3}{4} \right) \right),$$

где $j = l \pm \frac{1}{2}$ — внутреннее квантовое число, $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \approx$

$\approx \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры.

6°. Собственные радиальные функции:

$$R_{nl}(\xi) = N_{nl} e^{-\xi/2} \xi^l L_{n+l}^{2l+1}(\xi),$$

где $\xi = \frac{2Zr}{na_0}$, $a_0 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ — боровский радиус, N_{nl} — множитель, определяемый из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} R_{nl}^2(\xi) r^2 dr = 1.$$

Обобщенный полином Лагерра $L_n^m(\xi)$ выражается через производные от полиномов Лагерра

$$L_n(\xi) = e^{\xi} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi} \xi^n),$$

так что

$$L_n^m(\xi) = \frac{d^m}{d\xi^m} L_n(\xi).$$

7°. Нормированные волновые функции электрона в водородоподобном ионе и в атоме водорода (при $Z = 1$) для некоторых значений квантовых чисел n , l и m имеют вид:

$$n = 1, \quad l = 0, \quad m = 0 \quad (1s\text{-подгруппа})$$

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right);$$

$$n = 2, \quad l = 0, \quad m = 0 \quad (2s\text{-подгруппа})$$

$$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Zr}{a_0} \right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right);$$

$$n = 2, \quad l = 1, \quad m = 0 \quad (2p\text{-подгруппа})$$

$$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{5}{2}} r \cdot \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \cos \theta;$$

$$n = 2, \quad l = 1, \quad m = \pm 1 \quad (2p\text{-подгруппа})$$

$$\psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{5}{2}} r \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \sin \theta \cdot \exp(\pm i\varphi).$$

8°. Вероятность нахождения электрона в атоме водорода в основном состоянии ($n = 1, l = m = 0$) на расстоянии от ядра в пределах от r до $r + dr$:

$$dw = |\psi_{100}|^2 \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Радиальная плотность вероятности

$$\rho_w = \frac{dw}{dr} = \frac{4r^2}{a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

имеет максимум при $r = a_0$.

7. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

1°. *Рассеянием в силовом поле*, обладающем центральной симметрией, называют отклонение частиц от первоначального направления их движения в результате взаимодействия с *рассеивающим центром*. В частности, этим центром может быть атом или ион.

Число частиц, рассеянных в единицу времени под углом θ относительно направления z их первоначального движения внутри телесного угла $d\Omega$, равно

$$dN = \sigma(\theta)n \, d\Omega,$$

где n — число частиц, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения в первоначальном пучке частиц (*интенсивность пучка*).

Величину $d\sigma = \sigma(\theta)d\Omega$, имеющую размерность площади и характеризующую вероятность рассеяния частиц пучка в телесный угол $d\Omega$, называют *дифференциальным сечением* (дифференциальным эффективным сечением) *рассеяния*. Величину

$$\sigma = \int_0^{4\pi} \sigma(\theta) \, d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta \, d\theta,$$

характеризующую вероятность рассеяния частиц пучка по всевозможным направлениям, называют *полным сечением рассеяния*. Оно равно числу частиц из пучка единичной интенсивности, рассеиваемых центром за 1 с по всевозможным направлениям.

Различают *упругое и неупругое рассеяния*. В первом случае изменяются только импульсы частиц, а во вто-

ром — кроме того изменяются внутренние состояния частиц и даже рождаются другие частицы.

2°. Если рассеивающий центр неподвижен, то столкновение рассматривается в одной из двух систем отсчета: лабораторной (*л-системе*), относительно которой учитываются движения и рассеивающей и рассеиваемой частиц, или в *системе центра масс (центра инерции)* сталкивающихся частиц (*с-система*).

Если в *л-системе* рассеивающий центр с массой M до столкновения покоится, и на него налетает частица с массой m и скоростью v_0 , то кинетическая энергия обеих частиц

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

а скорость движения центра масс частиц относительно *л-системы* равна

$$v_c = \frac{\sqrt{2mT_0}}{M+m}.$$

В *с-системе* кинетическая энергия относительного движения обеих частиц

$$T = T_0 \frac{M}{M+m}; \quad T = \frac{1}{2} T_0 \text{ при } M = m.$$

Энергия частицы в *л-системе* после рассеяния связана с ее энергией до рассеяния:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{M^2 + m^2 + 2Mm \cos \theta}{(M+m)^2};$$

$T_{1 \text{ мин}} = \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2} T_0$, при $\theta = 180^\circ$, т. е. при центральном ударе (θ — угол рассеяния). Соотношения между углами рассеяния частицы m в *с-системе* (θ) и в *л-системе* (ϑ):

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{M \sin \theta}{m + M \cos \theta}, \quad \cos \vartheta = \frac{m + M \cos \theta}{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM \cos \theta}}.$$

3°. Если потенциал U рассеивающего центра имеет сферическую симметрию, то поток рассеянных частиц представляется в виде *расходящейся сферической волны*:

$$\psi = a(\theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

где $a(\theta)$ называют *амплитудой рассеяния*; $|a(\theta)|^2 = \sigma(\theta)$.

4°. Уравнение Шрёдингера для рассеяния в поле силового центра с массой m имеет вид, указанный в VI.6.2.

Рассматриваются решения при $E > 0$, соответствующие свободному движению частиц. Потенциал сил при этом считается достаточно быстро убывающим с r (не менее быстро, чем $\frac{1}{r}$).

5°. Амплитуда рассеяния для упругих столкновений:

$$a(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\eta_l} - 1)P_l(\cos \theta),$$

$a(\theta)$ — комплексная функция.

Полное эффективное сечение:

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} |a(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l,$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ — квадрат волнового числа налетающей

частицы, l — квантовые числа, определяющие момент импульса частиц, $P_l(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, η_l — так называемые фазы рассеяния, зависящие от свойств рассеивающего поля и энергии налетающих частиц. Отдельные члены ряда называют *парциальными эффективными сечениями* рассеяния σ_l для частиц с заданным орбитальным моментом

импульса $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$. Максимальное парциальное сечение:

$$\sigma_{l \text{ макс}} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1).$$

Рассеяние при $l = 0$ сферически симметрично, при $l = 1$ имеет симметрию диполя, при $l = 2$ — симметрию квадруполя и т. д.

Эффективные сечения для неупругого рассеяния имеют сложный вид, зависящий от структуры частиц, проявляющейся при их столкновении, а также от их энергии.

6°. Если U можно рассматривать как слабое возмущение, мало изменяющее первоначальное движение частиц (этому случаю соответствует малость всех фаз

рассеяния, $\eta_l \ll \frac{\pi}{2}$), то для $\sigma(\theta)$ при упругих столкновениях применяют формулу Борна:

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2}{\hbar^4} \left| \int_0^\infty U(r) \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 dr \right|^2,$$

где $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ — модуль вектора, связывающего импульсы рассеянных и падающих на центр частиц.

Борновское приближение теории столкновений справедливо при любых скоростях v рассеиваемой силовым центр частицы при условии

$$|U(a)| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2},$$

где a — линейные размеры области, где сказывается действие центра на частицу. Если предыдущее условие не выполняется, то формула Борна справедлива только для быстрых частиц, удовлетворяющих условию $\frac{\hbar v}{a} \gg |U(a)|$.

Для быстрых частиц, таких, что $v \gg \frac{\hbar}{ma}$, полное эффективное сечение обратно пропорционально энергии налетающей частицы.

7°. Для упругого рассеяния достаточно быстрых частиц (с массой m , скоростью v и зарядом q) атомом с зарядом ядра Ze и объемной плотностью $-\rho(r)$ электрического заряда электронной оболочки атома

$$\sigma(\theta) = \frac{q^2 e^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4} [Z - F(\theta)]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2},$$

где $F(\theta) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{Kr} \rho(r) r^2 dr$ — так называемый атомный фактор рассеяния, θ — угол рассеяния в с-системе. Если ρ экспоненциально спадает с увеличением расстояния от центра атома:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r}{a}},$$

где a имеет смысл «радиуса» атома, то

$$F(\theta) = \frac{Z}{\left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

и

$$\sigma(\theta) = \frac{q^2 e^2 Z^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + 4k^2 a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}\right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

Для быстрых частиц ($ka \gg 1$) и не слишком малых углов рассеяния справедлива *формула Резерфорда*:

$$\sigma(\theta) = \frac{Z^2 q^2 e^2}{64\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

8. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

1°. *Квазиклассическим приближением, или методом ВКБ (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна)* называют приближенный метод решения задач квантовой механики в тех случаях, когда квантовое и классическое описания движения частиц дают близкие результаты. Он применим, если длина волны де Бройля частицы мала по сравнению с пространственными размерами неоднородности поля, действующего на частицу. Соответственно, потенциальная энергия $U(r, t)$ и длина волны де Бройля λ должны медленно изменяться с изменением координат. Например, в одномерной задаче должно выполняться условие

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 2\pi.$$

Состояния дискретного спектра при больших значениях квантового числа n имеют квазиклассический характер (волновые эффекты выступают как малые поправки). Аналогичная закономерность наблюдается в оптике: волновая оптика переходит в геометрическую при неограниченном уменьшении длины волны, т. е. при увеличении импульса и энергии фотонов.

2°. Квазиклассическое приближение сводится к отысканию функции действия S в виде ее разложения в ряд по степеням $\frac{\hbar}{i}$:

$$S = S_0 + \left(\frac{\hbar}{i}\right) S_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2 + \dots$$

Дифференциальное уравнение для функции S частицы получают путем подстановки в общее уравнение Шрёдингера волновой функции частицы в виде $\psi_{\text{к.л.}} = \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)$:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \Delta S + U.$$

3°. Подстановка разложения S в это уравнение приводит, с точностью до членов, не содержащих $\hbar$ и пропорциональных первой степени $\hbar$, к двум уравнениям:

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + U,$$

$$-\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{m} \nabla S_0 \cdot \nabla S_1 + \frac{1}{2m} \Delta S_0.$$

Первое уравнение совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби классической механики для функции S_0 . Следовательно, в нулевом приближении движение частицы происходит по классической траектории. Второе уравнение с помощью выражения для плотности вероятности частицы $\rho_w = |\psi|^2 = e^{2S_1}$ приводят к уравнению неразрывности. Оно показывает, что плотность вероятности переносится в пространстве с такой же скоростью и по той же траектории, по которой перемещается частица в классической механике. В квазиклассическом приближении поверхности $S = \text{const}$ называют *поверхностями равной фазы волновой функции*.

4°. В частном случае движения частицы в ограниченной области пространства (например, внутри потенциальной ямы бесконечной глубины) квазиклассическое приближение не всегда применимо. Так, подлетая к стенке ямы, частица тормозится, ее импульс стремится к нулю, а длина волны $\lambda \rightarrow \infty$, что противоречит ус-

ловию применимости квазиклассического метода. Вблизи таких точек поворота нужно искать точное решение ψ уравнения Шрёдингера, а затем потребовать, чтобы между ψ и приближенным решением $\psi_{\text{к.п.}}$ осуществлялся плавный переход.

9. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1°. В кристалле массивные атомные ядра движутся во много раз медленнее электронов. Поэтому в первом приближении можно считать, что ядра атомов неподвижны (*адиабатическое приближение*), а их электрическое поле обладает трехмерной периодичностью. Электроны движутся в этом поле и взаимодействуют между собой. Точное решение такой многоэлектронной задачи невозможно. Его заменяют решением приближенной задачи (*приближение Хартри—Фока*) о движении одного электрона в стационарном потенциальном поле $U(\mathbf{r})$ атомных ядер и всех остальных электронов. Это поле называют *самосогласованным полем*, оно является периодическим:

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, проведенный из какой-либо точки одной элементарной ячейки кристалла в соответствующую точку другой ячейки.

2°. Особенности движения электронов в периодическом поле кристалла можно выяснить на примере одномерного поля $U(x)$, удовлетворяющего условию $U(x + a) = U(x)$, где a — период поля. Для отыскания возможных значений энергии E электрона и соответствующих собственных функций $\psi(x)$ нужно решить стационарное уравнение Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi.$$

Волновую функцию электрона выбирают в форме пакета плоских волн (*Фурье-разложение*):

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx} dk,$$

где $k = \frac{p}{\hbar}$ — волновое число, p — импульс электрона.

Потенциальную энергию разлагают в ряд Фурье:

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{a}\right),$$

где $U_{-n}^* = U_n$.

Отбрасывают коэффициенты Фурье-разложения $c(k)$ и собственные значения энергии электрона E .

3°. Уровни энергии электрона в периодическом поле образуют отдельные полосы — *зоны разрешенных значений энергии (разрешенные зоны)*, в каждой из которых энергия зависит от волнового числа k (квазинепрерывный энергетический спектр в зоне: $E = E_j(k)$, где $j = 1, 2, \dots$ — номер зоны).

Разрешенные зоны отделены друг от друга *запрещенными зонами* — интервалами запрещенных значений энергии электрона. В пределах каждой разрешенной зоны энергия электрона является четной периодической функцией волнового числа:

$$E_j\left(k_j \pm \frac{2\pi}{a}\right) = E_j(k_j) = E_{jk}.$$

Собственная волновая функция оператора энергии электрона, соответствующая собственному значению E_{jk} энергии электрона, имеет вид модулированной плоской волны:

$$\psi_{jk}(x) = u_{jk}(x)e^{ikx},$$

где $u_{jk}(x)$ — периодическая функция x с периодом a , конкретное выражение которой зависит от вида функции $U(x)$, характеризующей периодическое поле.

4°. На рис. VI.2.7 показана зависимость E_j от волнового числа для первых трех разрешенных зон. При этом, в силу периодичности функции $E_j(k)$, область изменения k ограничена пределами от $-\frac{\pi}{a}$ до $+\frac{\pi}{a}$ (*первая зона Бриллюэна* для одномерной решетки). На границах разрешенных зон энергии (т. е. при $k = 0$ и $k = \pm \frac{\pi}{a}$) $\frac{dE_j}{dk} = 0$. Соответственно, вблизи от этих значе-

ний k зависимость $E_j(k)$ можно представить в форме:

$$E_j = b_{1j} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 E_j}{dk^2} \bigg|_{k=0} \quad (\text{вблизи } k=0),$$

$$E_j = b_{2j} + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2 E_j}{dk^2} \bigg|_{k=\pm \frac{\pi}{a}} \quad \left(\text{вблизи } k = \pm \frac{\pi}{a} \right),$$

где b_{1j} и b_{2j} — постоянные, а $\xi = \frac{\pi}{a} - |k|$.

Из сравнения с энергией свободного электрона $E = \text{const} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ видно, что отличие движения электрона в периодическом поле от его свободного движения можно учесть, заменив обычную массу m на *эффективную массу* m^* :

$$\frac{1}{m^*} = \frac{d^2 E}{\hbar^2 dk^2}.$$

Из рис. VI.2.7 видно, что у «дна» разрешенной зоны эффективная масса электрона $m^* > 0$, а у «потолка» той же зоны $m^* < 0$. Поэтому электрон, находящийся вблизи «потолка» разрешенной зоны, движется под действием приложенного к кристаллу электрического поля так, как если бы он имел положительную массу m и положительный эффективный заряд $q = -e \left(\frac{m}{m^*} \right) > 0$.

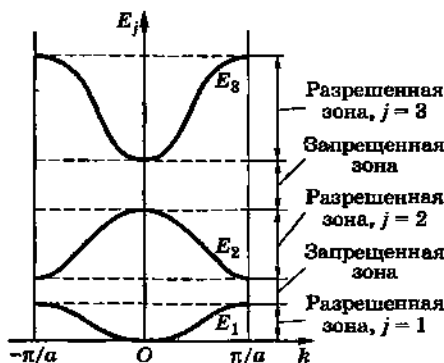


Рис. VI.2.7

5°. Согласно так называемому *приближению сильной связи*, образование зонного энергетического спектра в кристалле вытекает из соотношения неопределенностей для энергии и времени. В изолированном атоме, ввиду конечности жизни электрона в возбужденном состоянии, $\tau \approx 10^{-8}$ с, естественная ширина энергетического уровня $\Delta E \sim \frac{\hbar}{2\tau} \approx 10^{-7}$ эВ.

В кристалле валентные электроны атомов, слабее связанные с ядром, чем внутренние, могут переходить от одного атома к другому с помощью туннельного эффекта просачивания сквозь потенциальный барьер, разделяющий атомы в кристалле. Это приводит к тому, что τ существенно уменьшается, и энергетические уровни таких *коллективизированных электронов* расширяются в зоны (полосы) дозволённых значений энергии.

Частота ν просачивания электрона сквозь барьер прямоугольной формы, равная

$$\nu = \frac{v}{d} D,$$

где v — скорость электрона в атоме, d — линейный размер атома, D — прозрачность барьера, соответствует среднему времени жизни электрона у данного атома $\tau \approx 10^{-15}$ с, откуда по соотношению неопределенностей $\Delta E \approx 1$ эВ. Таким образом, в кристалле вместо узкого энергетического уровня $E(n, l)$ валентного электрона изолированного атома образуется зона разрешённых значений энергии шириной ≈ 1 эВ.

Вероятности туннельных переходов в кристалле для электронов внутренних оболочек атомов ничтожно малы. Эти электроны остаются в кристалле прочно связанными со своими атомами, а их энергетические уровни — столь же узкими, как и в изолированном атоме.

В реальном кристалле, имеющем конечные размеры, спектр возможных энергетических состояний коллективизированных электронов в разрешённой зоне не сплошной, а дискретный. Общее число Z энергетических уровней электронов в пределах зоны конечно. Если кристалл состоит из N одинаковых атомов, то $Z = N(2l + 1)$, где l — орбитальное квантовое число электрона, находящегося на исходном энергетическом уровне в изолированном атоме. Согласно принципу Паули, на каждом таком уровне может находиться не бо-

лее двух электронов, отличающихся ориентацией спина. Соответственно, в разрешенной энергетической зоне не может быть больше, чем $2N(2l + 1)$ коллективизированных электронов.

6°. Приведенные выше закономерности движения электронов в кристаллах лежат в основе зонной теории твердых тел, позволившей объяснить многие особенности свойств металлических и неметаллических (полупроводниковых и диэлектрических) кристаллических тел.

Возможны два случая заполнения коллективизированными электронами разрешенных зон в кристаллах при $T = 0$ К и отсутствии других источников возбуждения:

1) зона заполнена электронами полностью; самую верхнюю (по энергии) из этих зон называют валентной зоной (ВЗ);

2) зона заполнена электронами частично или пуста; такую зону называют зоной проводимости (ЗП).

Если в ЗП есть электроны, то они под действием приложенного к кристаллу внешнего электрического поля могут увеличивать свою энергию, переходя на имеющиеся в той же зоне свободные уровни и образуя электрический ток. Этот случай реализуется у металлов, обладающих электронной проводимостью.

Если ЗП пуста, а ВЗ заполнена электронами, то в таком состоянии кристалл не может проводить электрический ток, так как электрическое поле обычной напряженности не может сообщить электрону на длине его свободного пробега энергию, необходимую для переброса электрона из ВЗ в ЗП. В зависимости от минимального значения этой энергии, равной ширине ΔW_0 запрещенной зоны, условно различают полупроводники ($\Delta W_0 < 2$ эВ) и диэлектрики ($\Delta W_0 > 2$ эВ). Чем меньше ΔW_0 , тем больше вероятность переброса небольшой части электронов из ВЗ в ЗП, например, за счет теплового возбуждения в полупроводниках, удельная электрическая проводимость которых очень быстро увеличивается с ростом температуры.

10. КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

1°. Изменение состояния микрочастицы или системы микрочастиц под действием каких-либо внутренних или внешних причин называют квантовым пере-

ходом частицы или системы из начального состояния A (в момент времени $t = 0$) в конечное состояние B (в момент времени $t = T$). Квантовый переход обычно связан с изменением энергии частицы (или системы частиц).

2°. Изменение состояния системы характеризуется величиной P_{AB} , называемой *вероятностью перехода* из состояния A в состояние B .

Вычисление вероятностей квантовых переходов может быть проведено в случае, когда причина, вызывающая изменение состояния системы, действует в течение конечного промежутка времени. Решение уравнения Шрёдингера, определяющего $\psi(x, t)$ по волновой функции в начальный момент времени $t = 0$, $\psi(x, 0)$, представляет значительные трудности. Можно получить приближенные решения в тех случаях, когда переход системы вызывается внешними взаимодействиями, слабыми по сравнению с взаимодействиями, действующими в системе. В этих случаях слабые воздействия на систему рассматриваются как *малые возмущения*.

3°. В теории возмущений гамильтониан возмущенной системы представляют в виде суммы гамильтониана невозмущенной системы $\hat{H}_0(x)$ и гамильтониана, возмущающего взаимодействия $\hat{W}(x, t)$.

Задачу решают последовательными приближениями. Сначала отыскивают решения уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k^0}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi_k^0,$$

а затем в его решение вносят поправки, соответствующие первому и последующим приближениям.

4°. Решение уравнения Шрёдингера возмущенной системы

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{W})\psi$$

ищут с помощью разложения по волновым функциям стационарных состояний невозмущенной системы:

$$\psi = \sum_k c_k(t) \psi_k^0(x).$$

Для зависящих от времени коэффициентов разложения $c_k(t)$ получают уравнения

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_m W_{km}(t) c_m,$$

где

$$W_{km}(t) = \int \Psi_k^{(0)*} \widehat{W} \Psi_m^{(0)} d\eta = V_{km}(t) e^{i\omega_{km}t}$$

— матричный элемент гамильтониана возмущения,

а $\omega_{km} = \frac{E_k^{(0)} - E_m^{(0)}}{\hbar}$ — боровская частота перехода $E_m^{(0)} \rightarrow E_k^{(0)}$.

В первом приближении теории возмущений коэффициенты $c_m(t) = c_m^{(1)}(t)$ находят из уравнения

$$i\hbar \frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) e^{i\omega_{mk}t} c_k(0),$$

где $c_k(0) = c_k^{(0)}$ — коэффициенты при $t = 0$ (нулевое приближение).

Если при $t = 0$ система находится в состоянии n , то $c_k(0) = \delta_{kn}$, где δ_{kn} — символ Кронекера ($\delta_{kn} = 1$ при $k = n$ и $\delta_{kn} = 0$ при $k \neq n$), тогда

$$i\hbar \frac{dc_m^{(1)}(t)}{dt} = V_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}$$

и

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{mn}(t') e^{i\omega_{mn}t'} dt'.$$

5°. Вероятность перехода системы из состояния E_n в состояние E_m к моменту времени $t = T$ под влиянием малого возмущения равна

$$P_{nm} = |c_m^{(1)}(T)|^2 = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |V_{nm}(\omega_{nm})|^2.$$

где $V_{nm}(\omega) = \int \Psi_m^*(x) W(x, \omega) \Psi_n(x) dx$ — матричный элемент компоненты Фурье частоты ω в разложении возмущения в интеграл Фурье:

$$W(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, переход возможен, если возмущение содержит в своем спектре частоту ω_{nm} , так как при $W(x, \omega_{nm}) = 0$ матричный элемент $W_{nm}(\omega_{nm}) = 0$, и вероятность перехода $P_{nm} = 0$.

6°. Примером квантовых переходов системы под влиянием слабых возмущений могут служить переходы атомных электронов между дискретными уровнями энергии E_n и E_m , происходящие под влиянием переменного электромагнитного поля (например, света). Если длина волны излучения, падающего на атом, намного больше размера атома, то напряженность электрического поля плоской линейно поляризованной волны $\mathcal{E}$ в пределах атома одинакова и зависит от времени по закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ — единичный постоянный вектор. Энергия возмущения равна $W(\mathbf{r}, t) = -\mathcal{E}(t)\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ — дипольный момент атомного электрона, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона, проведенный из ядра атома. Матричный элемент энергии возмущения

$$W_{nm}(t) = -\mathcal{E}(t)\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}_{nm} \quad \text{и} \quad W_{nm}(\omega_{nm}) = -\mathcal{E}(\omega_{nm})\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}_{nm},$$

где $\mathbf{p}_{nm} = \int \psi_m^* \mathbf{p} \psi_n dV$ — матричный элемент вектора электрического дипольного момента электрона.

Вероятность перехода $E_n \rightarrow E_m$ равна

$$P_{nm} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \mathcal{E}^2(\omega_{nm}) |\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}_{nm}|^2.$$

7°. Атом (молекула или др. квантовая система), переходя из возбужденного состояния с энергией E_m в нормальное или менее возбужденное состояние с энергией $E_n < E_m$, испускает квант электромагнитного излучения частотой $\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}$. Различают *спонтанное* (самопроизвольное) *излучение*, осуществляющееся независимо от того действует на излучающую систему внешнее излучение или нет, и *вынужденное* (индуцированное) *излучение*, вызываемое внешним излучением той же частоты ν_{mn} .

Вероятность осуществления возбужденными атомами квантового перехода $E_m \rightarrow E_n$ за малое время dt равна

$$dP_{mn} = A_{mn} dt + B_{mn} \rho(\nu_{mn}) dt,$$

где первый член соответствует спонтанному излучению, а второй — вынужденному, $\rho(\nu_{mn})$ — спектральная плотность энергии вынуждающего излучения, A_{mn} — коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения, а B_{mn} — коэффициент Эйнштейна для вынужденного излучения. Коэффициенты A_{mn} и B_{mn} зависят от свойств излучающей системы и не изменяются с течением времени. Они могут быть рассчитаны методами квантовой механики. В случае вырожденных состояний E_m и E_n

$$A_{mn} = \frac{16\pi^3 \nu_{mn}^3}{3\hbar\epsilon_0 c^3} \sum |\rho_{mn}|^2,$$

где суммирование проводится по всем различным переходам из E_m в E_n . Коэффициенты Эйнштейна A_{mn} и B_{mn} связаны соотношением

$$A_{mn} = \frac{8\pi h \nu_{mn}^3}{c^3} B_{mn}.$$

8°. Под влиянием внешнего излучения с частотой ν_{mn} может также происходить процесс, обратный вынужденному излучению, — *поглощение излучения*. При этом атом (молекула) совершает квантовый переход $E_n \rightarrow E_m$, поглощая квант электромагнитного излучения $h\nu_{mn}$. Вероятность осуществления этого перехода за малое время dt равна

$$dP_{mn} = B_{nm}\rho(\nu_{mn}) dt,$$

где B_{nm} — коэффициент Эйнштейна для поглощения.

Коэффициенты Эйнштейна для поглощения и вынужденного излучения связаны соотношением:

$$g_n B_{nm} = g_m B_{mn},$$

где g_n и g_m — статистические веса (кратность вырождения) состояний n и m , т. е. число различных квантовых состояний с энергиями E_n и E_m . В случае невырожденных состояний $B_{nm} = B_{mn}$.

9°. Коэффициент Эйнштейна A_{mn} определяет среднее время жизни τ_{mn} системы в состоянии m по отношению к спонтанному переходу в состояние n : $\tau_{mn} = \frac{1}{A_{mn}}$.

В силу конечности величины τ_{mn} есть неопределенность в значении энергии в состоянии m : $\Delta E_m \geq \frac{\hbar}{2\tau_{mn}} = \frac{\hbar}{4\pi\tau_{mn}}$.

Величину $\Gamma_m = \Delta E_m$ называют *шириной энергетического уровня* E_m . Она определяет *естественную ширину спектральной линии* $\Delta\nu_{mn} = \frac{\Gamma_m}{h} \sim \frac{1}{4\pi\tau_{mn}}$. Обычно

среднее время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau_{mn} \approx 10^{-8}$ с. Если же $\tau_{mn} \gg 10^{-8}$ с, то состояние с энергией E_m называют *метастабильным состоянием*.

10°. Метастабильным состояниям системы соответствуют переходы, запрещенные в той или иной степени. Этот запрет связан с тем, что из числа мыслимых переходов из состояния E_n в состояние E_m и обратно могут реализоваться лишь те, для которых матричный элемент $|W_{nm}(\omega_{mn})| \neq 0$. Это условие приводит к так называемым *правилам отбора*, которые формулируются в виде соотношений между квантовыми числами, характеризующими начальное и конечное состояние системы при переходе под действием данного возмущения.

11°. Существование правил отбора связано с тем, что матричный элемент дипольного момента (или момента иной мультипольности) и вероятность перехода P_{nm} имеют наибольшее значение, когда волновые функции ψ_n, ψ_m начального и конечного состояний системы при переходе существенно перекрываются в какой-либо области пространства. Переходы между состояниями, для которых матричный элемент пренебрежимо мал, называют *запрещенными* для данного вида матричного элемента (данного вида возмущения). Этот запрет, однако, не абсолютен, а говорит лишь о том, что запрещенные переходы имеют матричный элемент и вероятность, весьма малые по сравнению с переходами, разрешенными правилами отбора.

12°. Интенсивности линий, разрешенных правилами отбора, будут наибольшими в том случае, когда внешние причины не изменяют заметным образом состояния системы в момент перехода (*адиабатическое приближение*). В применении к электронным переходам в молекулах, ядра которых совершают колебательное движение, это положение называют *принципом Франка—Кондона*.

13°. Взаимодействие электромагнитного поля с атомами лежит в основе теории спектров излучения и поглощения света атомными системами. Вид спектра (положение спектральных линий) определяется схемой уровней энергии квантовой системы.

Интенсивности спектральных линий связаны с общим числом атомов в излучающей системе, их статическим распределением по состояниям и с вероятностями соответствующих переходов.

Отыскание значений E_n квантовой системы (*схемы уровней энергии*) по виду спектра путем комбинирования различных наблюдаемых значений ν_{mn} называют *комбинационным принципом Ритца*.

14°. В отсутствие внешних воздействий квантовая система (например, атом) находится в стационарном состоянии с наименьшей энергией E_n . При воздействии на систему (например, электромагнитным излучением) она переходит на более высокий уровень с энергией E_m , поглощая кванты излучения с вероятностью, определяемой коэффициентом Эйнштейна B_{nm} .

С этого более высокого уровня система может вернуться на исходный уровень либо *спонтанно*, с вероятностью, определяемой коэффициентом A_{nm} , либо *вынужденно* (индуцированно), с вероятностью, зависящей от коэффициента вынужденного излучения B_{mn} . В состоянии равновесия числа актов поглощения и излучения атомами за 1 с квантов $h\nu_{mn}$ равны друг другу (условие детального равновесия):

$$N_n B_{nm} \rho(\nu_{mn}) = N_m [B_{mn} \rho(\nu_{mn}) + A_{mn}],$$

где N_n и $N_m < N_n$ — числа атомов, находящихся в состояниях с энергией E_n и $E_m > E_n$.

С помощью специальных методов можно перевести систему в неравновесное состояние с $N_m > N_n$. Такое *инверсное распределение атомов* системы по энергетическим уровням можно условно описывать формулой *равновесного распределения Больцмана* как состояние с *отрицательной термодинамической температурой*:

$$T = \frac{E_n - E_m}{k \ln \frac{N_m}{N_n}} < 0.$$

При воздействии на такую систему либо внешним электромагнитным полем с частотой ν_{mn} , либо спонтанным излучением соседних атомов можно получить индуцированное излучение большого числа атомов системы за малый промежуток времени, которое обладает высокой когерентностью, мощностью и узкой направленностью.

Соответствующие устройства, работающие в диапазоне ультракоротких радиоволн, называют *мазерами*, работающие в оптическом диапазоне — *лазерами*.

Глава 3

АТОМ

1. АТОМЫ И ИОНЫ С ОДНИМ ВАЛЕНТНЫМ ЭЛЕКТРОНОМ

1°. *Атомом* называют наименьшую частицу химического элемента, обладающую его химическими свойствами. Атом состоит из положительно заряженного ядра и электронной оболочки. В атоме заряд ядра равен по модулю суммарному заряду всех его электронов. *Ионом* данного атома называют электрически заряженную частицу, образующуюся при потере или приобретении электронов атомом.

2°. Простейшей атомной системой является атом водорода, состоящий из одного электрона и одного протона. *Водородоподобными* (изoeлектронными водороду), т. е. имеющими также по одному электрону, являются ионы He^+ , Li^{2+} , Be^{3+} , B^{4+} , C^{5+} и т. д.

3°. Спектр излучения атомов водорода — линейчатый. Частоты линий этого спектра описываются *формулой Бальмера—Ридберга*:

$$\nu_{mn} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m_e/M} \approx R_\infty,$$

где $R_\infty = 3,29 \cdot 10^{15}$ Гц — *постоянная Ридберга*, m_e — масса электрона, M — масса ядра, m и n — главные квантовые числа, характеризующие энергетические

уровни атома, между которыми осуществляется переход при излучении света частотой ν_{mn} ($n = 1, 2, \dots, m = n + 1, n + 2, \dots$). Соответственно длины излучения в вакууме определяют из формулы

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где $R' = R/c = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ также называют *постоянной Ридберга* (в м^{-1}).

4°. Группу спектральных линий с одинаковыми n называют *серией*. При $n = 1$ получается *серия Лаймана*, при $n = 2$ — *серия Бальмера*, при $n = 3$ — *серия Пашена*, при $n = 4$ — *серия Бреккетта*, при $n = 5$ — *серия Pfунда*, при $n = 6$ — *серия Хэмфри*. Первая из них лежит в далекой ультрафиолетовой области, вторая охватывает видимую область, остальные спектральные серии водорода лежат в инфракрасной области. Для изоэлектронных водороду ионов справедлива сериальная формула Бальмера—Ридберга:

$$\nu_{mn} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где Z — порядковый номер элемента в Периодической таблице Д. И. Менделеева.

Наибольшей частоте для каждого n в формуле Бальмера (при $m = \infty$) соответствует *граница серии*. Частоту, соответствующую границе серии, называют *термом* и обозначают T_n :

$$T_n = \frac{R}{n^2} \text{ (для водорода).}$$

Терм для изоэлектронного водороду иона:

$$T_n = \frac{Z^2 R}{n^2}.$$

Соответствующая терму энергия водородоподобного иона:

$$E_n = -\frac{h R Z^2}{n^2}; \quad T_n = \frac{|E_n|}{h},$$

где h — постоянная Планка.

Модуль величины $|E_n|$ называют *энергией связи электрона в атоме*, находящегося в состоянии с данным n . Наименьшее из E_n :

$$E_{\text{мин}} = E_1 = -h R Z^2$$

отвечает основному, или нормальному, состоянию системы; наибольшее

$$E_{\text{макс}} = E_{\infty} = 0$$

соответствует ионизации атома или иона, т. е. отрыву от него электрона. Энергия ионизации равна по модулю энергии связи электрона в атоме или ионе. Потенциал ионизации $\phi = \frac{hRZ^2}{en^2}$, где e — элементарный заряд.

5°. Спектр атома водорода впервые был теоретически обоснован Н. Бором (1913) на основе следующих трех постулатов.

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний): существуют некоторые стационарные состояния атома, находясь в которых он не излучает энергию. Стационарным состоянием атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны.

Второй постулат Бора (правило квантования орбит): в стационарном состоянии атома электрон должен иметь квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию:

$$m_e v_n r_n = \frac{n\hbar}{2\pi},$$

где r_n — радиус n -й орбиты, $m_e v_n r_n$ — момент импульса электрона на этой орбите, n — целое положительное число ($n \geq 1$).

Третий постулат Бора (условие частот Бора): атом излучает (поглощает) квант электромагнитной энергии, когда электрон переходит с орбиты с большим (меньшим) на орбиту с меньшим (большим) n . Энергия кванта равна модулю разности энергий электрона на орбитах до и после перехода:

$$h\nu_{mn} = |E_m - E_n|,$$

частота кванта (фотона), возникающего или поглощаемого при переходе, равна

$$\nu_{mn} = \frac{|E_m - E_n|}{h}.$$

6°. Постулаты Бора не следуют ни из каких положений классической физики и получают объяснение на

основе квантовой механики. Стационарные состояния электронов, вводимые первым постулатом Бора, представляют собой стационарные состояния электронов в кулоновском поле, даваемые решением соответствующего уравнения Шрёдингера. Возможность излучения и поглощения квантов является результатом квантовых переходов электрона из одного стационарного состояния атома в другое. Вероятность этих переходов дается формулой, приведенной в VI.2.10.6°, а частота — условием частот, совпадающим с требованием третьего постулата Бора. Волновая механика позволила рассчитать интенсивности спектральных линий, чего не смогла сделать теория Бора.

7°. Понятие *электронной орбиты* в атоме, вводимое теорией Бора, является условным вследствие волновой природы электрона и соотношения Гейзенберга, как и вообще понятие траектории микрочастицы, обладающей волновыми свойствами. Электрон в атоме водорода можно представить, основываясь на статистическом смысле волновой функции ψ , в виде заряженного «облака» вокруг ядра атома. Форма этого «облака» и зависимость объемной плотности его заряда $\rho = -e|\psi|^2$ от сферических координат r, θ, φ определяются состоянием электрона в атоме, т. е. значениями квантовых чисел, n, l и m . Для s -состояний ($l = m = 0$) при разных значениях n «облака» различны, но во всех случаях сферически симметричны.

Боровским стационарным круговым орбитам радиусом $r_n = n^2 a_0$ соответствуют состояния, в которых для каждого n квантовое число l принимает максимальное значение, равное $(n - 1)$. Это состояния $1s, 2p, 3d, 4f, \dots$. Боровские радиусы r_n соответствуют максимумам радиальной плотности вероятности для электрона в указанных состояниях атома водорода.

8°. В атомах щелочных металлов и сходных с ними ионов один внешний (валентный) электрон взаимодействует с полем *атомного остатка (остова)*, состоящего не только из атомного ядра (как в случае атома водорода и водородоподобных ионов), но также из заполненных электронных оболочек. Вследствие взаимодействия внешнего электрона с электронами атомного остатка возможные значения энергии этого электрона зависят не только от главного квантового числа, но также от орби-

тального числа l . Значения энергии и соответствующие термы вычисляют по приближенным формулам:

$$E_{n,l} = -\frac{R\hbar Z_a^2}{(n - \Delta_l)^2} \quad \text{и} \quad T_{n,l} = \frac{RZ_a^2}{(n - \Delta_l)^2},$$

где Z_a — заряд атомного остатка, R — постоянная Ридберга, Δ_l — *квантовый дефект*, зависящий для атомов (ионов) одного и того же элемента только от l , причем $\Delta_l \sim 0$, и уменьшается с ростом l . Для атомов всех щелочных металлов от Li до Cs можно считать $\Delta_l = 0$ при $l > 3$.

Вследствие спин-орбитального взаимодействия все энергетические уровни внешнего электрона (кроме s -уровней) становятся двойными.

9°. Обозначения термов, которым соответствуют различные l :

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Терм	s	p	d	f	g	h	i	k	l	m	n

Буквы s, p, d, f соответствуют английским наименованиям спектральных серий атомов с одним внешним электроном; s — sharp (*резкая*), p — principal (*главная*), d — diffuse (*диффузная*), f — fundamental (*фундаментальная*).

Правила отбора для орбитального квантового числа при электрических дипольных переходах:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Переходы возможны лишь между термами $T_{n,l}$ и $T_{m,l \pm 1}$, причем на числа m и n правила отбора не накладывают никаких ограничений. Комбинироваться поэтому могут только s - и p -термы, p - и d -термы и т. д.

2. МНОГОЭЛЕКТРОННЫЕ АТОМЫ

1°. Многоэлектронными атомами называют атомы с двумя и более электронами. Уравнение Шрёдингера для многоэлектронных атомов и ионов:

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E + \sum_{i=1}^N k \frac{Ze^2}{r_i} - U \right] \psi = 0,$$

где Δ_i — оператор Лапласа i -го электрона, r_i — расстояние i -го электрона от ядра, $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{ke^2}{r_{ik}}$ — потенциальная энергия взаимодействия между всеми N электронами ионизованного атома (для нейтрального атома $N = Z$); r_{ik} — расстояние между i -м и k -м электронами; $\frac{kZe^2}{r_i}$ — потенциальная энергия взаимодействия i -го электрона с ядром, E — полная энергия атома; $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

2°. Уравнение Шрёдингера для многоэлектронного атома может быть решено только приближенными методами, прежде всего методами теории возмущений. В основе решения лежит представление энергии взаимодействия между электронами U как малого возмущения по сравнению с энергией взаимодействия электронов с ядром. В качестве нулевого приближения получаются соответствующие значения E_n и собственные функции ψ_n , соответствующие решению с $U = 0$:

$$E_n = \sum_{i=1}^N E_{ni}, \quad \psi_n = \prod_{i=1}^N \psi_{ni};$$

знак $\prod_{i=1}^N$ означает произведение N волновых функций ψ_{ni} . Решение уравнения Шрёдингера методами теории возмущений практически возможно только при малых значениях N .

3°. С увеличением N даже приближенное решение уравнения Шрёдингера методом теории возмущений становится затруднительным. В приближении центрального поля в атоме для отыскания решения используются в основном два метода: *метод Хартри—Фока* и *метод Томаса—Ферми*.

Метод Хартри—Фока основан на замене электрического поля ядра и всех электронов атома, кроме одного выделенного, некоторым постоянным по времени *самосогласованным полем*, в котором движется выделенный электрон. Внесение потенциала этого поля в

уравнение Шрёдингера позволяет найти для каждого выделенного электрона значения квантовых чисел n и l и тем самым энергетические состояния электронов.

Метод Томаса—Ферми основан на так называемой *статистической модели атома*, в которой предполагается непрерывное распределение электронных зарядов в атоме с плотностью, удовлетворяющей уравнению Пуассона для потенциала электрического поля $\varphi(r)$. Плотность электронных зарядов вычисляется независимо с помощью *квантовой статистики и принципа Паули*.

Метод Томаса—Ферми применим как к атому, так и к иону, но при этом по-разному задается потенциал на границе (атома или иона).

В случае нейтрального атома, полагая на границе атома $\varphi = 0$, для потенциала поля получаем *уравнение Томаса—Ферми*

$$\Delta\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \varphi^{\frac{3}{2}},$$

где Δ — оператор Лапласа.

4°. Уравнение Шрёдингера для атома гелия и ионов, содержащих $N = 2$ электрона (Li^+ , Be^{2+} , B^{3+} и т. д.) имеет вид:

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{kZe^2}{r_1} + \frac{kZe^2}{r_2} - \frac{ke^2}{r_{12}} \right) \psi = 0,$$

где Δ_1 и Δ_2 — операторы Лапласа, E — полная энергия атома, $-\frac{kZe^2}{r_1}$ и $-\frac{kZe^2}{r_2}$ — потенциальные энергии взаимодействия каждого из электронов с ядром, r_{12} — расстояние между электронами, $\frac{ke^2}{r_{12}}$ — энергия взаимодействия между электронами.

Уровни энергии и собственные функции в нулевом приближении, в котором пренебрегается взаимодействием электронов:

$$E = E_{n1} + E_{n2}, \quad \Psi_n = \psi_{n1}\psi_{n2},$$

где $E_n = -\frac{RZ^2}{n^2}$ (R — постоянная Ридберга) и ψ_n — водородоподобная волновая функция электрона.

В первом приближении теории возмущений нормальное состояние атома гелия вычисляется с учетом энергии взаимного отталкивания электронов, описываемых волновыми функциями нормального состояния водородоподобного типа. Полная энергия основного состояния двухэлектронной системы в нулевом приближении:

$$E_0 = 2Z^2 E_H = -2RZ^2.$$

В первом приближении:

$$E_1 = \left(2Z^2 - \frac{5}{4}Z \right) E_H,$$

где $E_H = -R$ — энергия атома водорода в нормальном состоянии.

5°. При решении задачи о произвольном состоянии электронов в атоме гелия необходимо учитывать неразличимость электронов. Вследствие того, что оба электрона атома гелия неотличимы друг от друга, *собственные функции* могут быть двух видов:

$$\Psi = \psi_{n1}(1)\psi_{n2}(2) \text{ и } \Psi = \psi_{n1}(2)\psi_{n2}(1),$$

где цифры в скобках означают «номер» электрона. Поскольку энергия E_n , соответствующая этим двум случаям, одна и та же, то Ψ описывает дважды вырожденное состояние. Вырождение уровней энергии, связанное с неразличимостью атомных электронов (и вообще любых одинаковых микрочастиц), называют *обменным*. Оно типично для квантовых систем.

6°. Общее нормированное решение уравнения Шрёдингера для атома гелия может быть представлено в виде линейной комбинации (суммы или разности) его частных решений:

$$\Psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n1}(1)\psi_{n2}(2) - \psi_{n1}(2)\psi_{n2}(1)],$$

либо

$$\Psi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n1}(1)\psi_{n2}(2) + \psi_{n1}(2)\psi_{n2}(1)].$$

Волновая функция Ψ_a изменяет знак при перестановке местами цифр (электронов) 1 и 2, ее называют *антисимметричной*. Волновую функцию Ψ_c при этом не изменяющую знака, называют *симметричной*.

7°. При учете возмущения $\frac{ke^2}{r_{12}}$, т. е. взаимного от-

талкивания электронов, обменное вырождение снимается и двукратно вырожденное состояние расщепляется на два с энергиями E_c и E_a . Средняя энергия возмущения ΔE , вызванная взаимодействием двух электронов в атоме гелия:

$$\Delta E = \iint |\Psi|^2 \frac{ke^2}{r_{12}} dV_1 dV_2.$$

Для состояний, описываемых функциями ψ_c и ψ_a ,

$$\Delta E_c = C + A \text{ и } \Delta E_a = C - A \quad (3.1)$$

Здесь $C > 0$ и $A > 0$, причем

$$C = \iint |\psi_{n_1}(1)|^2 |\psi_{n_2}(2)|^2 \frac{ke^2}{r_{12}} dV_1 dV_2$$

— кулоновский интеграл, соответствующий кулоновскому взаимному отталкиванию электронов. Второе слагаемое в (3.1)

$$A = \frac{1}{2} \iint [\psi_{n_1}(1) \psi_{n_2}(2) \psi_{n_1}^*(2) \psi_{n_2}^*(1) + \\ + \psi_{n_1}(2) \psi_{n_2}(1) \psi_{n_1}^*(1) \psi_{n_2}^*(2)] \frac{e^2}{r_{12}} dV_1 dV_2$$

не имеет аналога в классической физике, его называют *интегралом обменного взаимодействия*, так как он связан с особым квантовомеханическим эффектом, обусловленным неразличимостью тождественных частиц (в данном случае электронов).

8°. Для полного описания состояния системы электронов атома гелия недостаточно знать Ψ -функцию, зависящую от координат обоих электронов, т. е. $\Psi_c(r_1, r_2)$ или $\Psi_a(r_1, r_2)$. Нужно еще указать, как ориентированы спины электронов. Состояние электронов описывают полной волновой функцией

$$\Psi = \Psi(r_1, r_2) \chi(m_{s1}, m_{s2}),$$

где χ — *спиновая волновая функция*, зависящая от ориентаций спинов электронов, т. е. от значений магнитного спинового числа m_s обоих электронов. Так как m_s при-

нимает только два значения $\pm 1/2$, то возможны следующие 4 спинорные функции и соответствующие им значения $m_s = m_{s1} + m_{s2}$:

$$\chi_1 = \alpha(1)\alpha(2), \quad m_s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\chi_2 = \beta(1)\beta(2), \quad m_s = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1,$$

$$\chi_3 = \alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1), \quad m_s = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\chi_4 = \alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1), \quad m_s = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

где функции α и β соответствуют значениям числа m_s электрона, равным $+1/2$ и $-1/2$, а числа в скобках обозначают номера электронов. Первые три функции являются симметричными и относятся к трехкратно вырожденному ортосостоянию атома, характеризующемуся суммарным спином $S = 1$ (в единицах $\hbar$; последняя функция является антисимметричной и относится к парасостоянию с суммарным спином $S = 0$ (в единицах $\hbar$).

В соответствии с принципом Паули полные волновые функции, отвечающие состояниям двухэлектронной системы, должны быть антисимметричными:

$$\Psi = \psi_s \chi_a \text{ или } \Psi = \psi_a \chi_s.$$

3. ВЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА

1°. Для целей систематики сложных спектров многоэлектронных атомов и изучения тонкой структуры спектров применяют векторную модель атома. В этой модели момент импульса, соответствующий орбитальному движению каждого электрона, представляют вектором $\mathbf{l}$, момент импульса, соответствующий спину электрона, — вектором $\mathbf{s}$.

Проекции векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ на некоторое направление (совпадающее с направлением внешнего магнитного поля) квантованы и принимают значения, кратные $\hbar$. Это называют пространственным квантованием орбитального и спинового моментов импульса электрона в атоме.

Проекция вектора $\mathbf{l}$ принимает значения (в единицах $\hbar$) $l, l-1, \dots, 0, \dots, -l$, т. е. всего $2l+1$ значение; проекция вектора $\mathbf{s}$ принимает значения $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ (в единицах $\hbar$). Модули векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ равны

$$|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad \text{и} \quad |\mathbf{s}| = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar.$$

Сумму $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, где $|\mathbf{j}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar$, называют *полным вектором момента импульса электрона*; j называют *внутренним квантовым числом*, величины l и s называют соответственно *орбитальным и спиновым квантовыми числами*.

2°. При расчете энергетических уровней и соответствующих им термов атомов, содержащих два и более электронов, необходимо учитывать релятивистский эффект, зависящий от векторов основного и орбитального моментов импульса и называемый *спин-орбитальным взаимодействием*.

Орбитальные и спиновые моменты импульса всех N электронов атома можно сложить двумя способами. Первый способ осуществляется, когда взаимодействие орбитальных моментов импульса $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{l}_k$ электронов и их спиновых моментов импульса $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{s}_k$, сильнее, чем взаимодействие моментов $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$. Связь орбитального и спинового моментов импульса в этом случае называют *нормальной (рассел-саундеровской, LS-) связью*. Она является наиболее распространенной в легких атомах. Векторы орбитального и спинового моментов импульса электронов складывают в этом случае порознь, образуя вектор *суммарного орбитального момента импульса атома* (рис. VI.3.1):

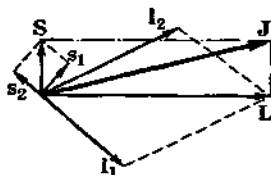


Рис. VI.3.1

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i, \quad |\mathbf{L}| = \sqrt{L(L+1)} \hbar,$$

и вектор *суммарного спинового момента импульса атома*:

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i, \quad |\mathbf{S}| = \sqrt{S(S+1)} \hbar,$$

где N — число электронов в атоме. Оба суммарных момента импульса образуют *суммарный полный момент импульса атома*:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar,$$

Число J называют *суммарным внутренним квантовым числом атома*, L и S — соответственно *суммарным орбитальным и спиновым квантовыми числами атома*. Ввиду различной возможной ориентации векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$, квантовое число J принимает следующие значения:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|,$$

т. е. J имеет $2S + 1$ значение, при $L \geq S$, и $2L + 1$ значение при $L \leq S$. Геометрическому сложению векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ соответствует алгебраическое сложение L и S .

Возможные значения проекции на выбранную ось z вектора $\mathbf{J}$ полного момента импульса атома равны

$$J_z = m\hbar,$$

где m — *магнитное квантовое число атома*, которое может принимать $(2J + 1)$ значений, равных

$$-J, (-J + 1), \dots, (J - 1), J.$$

Если $L \geq S$, то $2J + 1 = 2S + 1$, а если $L \leq S$, то $2J + 1 = 2L + 1$.

Различной взаимной ориентации векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ соответствуют несколько значений энергии атома, общее число которых, равное $2J + 1$, называют *мультиплетностью энергетического уровня*.

3°. Второй способ сложения орбитальных и спиновых моментов импульса атомных электронов осуществляется, когда взаимодействие $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ для каждого из электронов сильнее, чем взаимодействие порознь орбитальных и спиновых моментов различных электронов между собой. Связь моментов импульса атомных электронов в этом случае называют *сильной связью* или *jj-связью*. Эта связь существует преимущественно в тяжелых атомах. Векторы орбитального и спинового

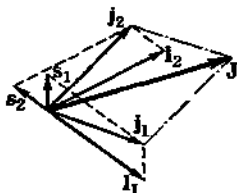


Рис. VI.3.2

моментов импульса каждого электрона атома складываются, давая вектор полного момента импульса электрона (рис. VI. 3.2):

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i.$$

Суммарный полный момент импульса атома образуется сложением полных моментов импульса каждого из электронов:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar.$$

4°. Для атома с двумя внешними электронами при слабой связи суммарный орбитальный момент импульса

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2, \text{ т. е. } L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|;$$

максимальное значение L отвечает параллельной, а минимальное — антипараллельной ориентации орбитальных моментов импульса обоих внешних электронов в векторной модели. Суммарный спиновый момент импульса

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \text{ т. е. } S = s_1 \pm s_2 = 1 \text{ или } 0,$$

соответственно, при параллельной и антипараллельной ориентациях спиновых моментов.

5°. В случае LS -связи и при $L \gg S$ мультиплетность энергетического уровня и спектрального термина равна числу $2S + 1$ возможных ориентаций в пространстве суммарного спина S атома. Мультиплетность показывает, на какое число близких компонент расщепляется энергетический уровень и спектральный терм вследствие спин-орбитального взаимодействия. Это расщепление проявляется в тонкой структуре спектральных линий. В зависимости от значения мультиплетности энергетические уровни и термы называют: синглетными

($S = 0$), дублетными ($S = \frac{1}{2}$), триплетными ($S = 1$),

квартетными ($S = \frac{3}{2}$) и т. д. Мультиплетность тер-

мов атомов и ионов с заполненными электронами внутренними оболочками определяется состоянием только внешних электронов. Например, у атома гелия и гелиевоподобных ионов, содержащих два электрона,

имеются два типа уровней — синглетные и триплетные. Аналогичные термы имеются у атомов второй группы Периодической системы элементов Менделеева, имеющих два внешних электрона.

6°. Для оптических (электрических дипольных) квантовых переходов в атомах действуют следующие правила отбора: разрешены переходы только между состояниями 1 и 2, для которых

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 0, \pm 1,$$

$$\Delta J = J_2 - J_1 = 0, \pm 1,$$

$$\Delta m = 0, \pm 1,$$

где L , J и m — орбитальное, внутреннее и магнитное квантовые числа атома. Кроме того, существует *интеркомбинационный запрет*, согласно которому при оптических переходах не может изменяться спиновое квантовое число атома: $\Delta S = S_2 - S_1 = 0$. Этот запрет жестко выполняется только у легких атомов, для которых справедливо приближение LS -связи. Запрет снимается магнитными взаимодействиями (главным образом за счет спин-орбитального взаимодействия).

7°. В спектроскопии принято следующее обозначение термов многоэлектронных атомов: $^{2S+1}L_J$, где $2S+1$ — мультиплетность терма, J — суммарное внутреннее квантовое число, а L — обозначение терма с помощью заглавной буквы латинского алфавита, выбираемой в зависимости от значения суммарного орбитального квантового числа L атома в рассматриваемом состоянии по правилу:

Значение L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обозначение терма атома	S	P	D	F	G	H	I	K	L	M	N

В случае необходимости перед обозначением терма может быть также показана соответствующая *электронная конфигурация*, т. е. распределение электронов по состояниям с разными значениями главного и орбитального квантовых чисел n_i, l_i :

$$(n_1 l_1)^{k_1} (n_2 l_2)^{k_2} \dots ^{2S+1} L_J,$$

где k_i — число электронов в состоянии n_i, l_i . Например, терм основного состояния атома кислорода имеет вид: $(1s)^2 (2s)^2 (2p)^4 {}^3P_2$.

8°. Взаимодействие магнитных моментов электронов и атомного ядра вызывает возникновение *сверхтонкой структуры* спектральных термов. Магнитный момент ядра, складывающийся из магнитных моментов составляющих его нуклонов, имеет порядок величины *ядерного магнетона*, $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$, где m_p — масса

протона. В соответствии с малостью ядерного магнетона по сравнению с магнетоном Бора сверхтонкая структура спектральных линий характеризуется расщеплениями линий, в тысячи раз меньшими, чем в тонкой структуре.

Магнитное взаимодействие электронов и ядра, подобно взаимодействию самих электронов, в векторной модели атома выражается с помощью вектора ядерного момента $\mathbf{I}$ (спина):

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}, \quad |\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)} \hbar,$$

где $\mathbf{J}$ — вектор суммарного полного момента импульса электронов атома, $\mathbf{F}$ — вектор полного момента импульса атома (включая его ядро). Соответствующее вектору $\mathbf{F}$ квантовое число F может принимать значения (при фиксированном J)

$$F = J + I, J + I - 1, \dots, |J - I|.$$

Систематика спектральных линий при сверхтонкой структуре не отличается от принятой для тонкой структуры в случае слабой связи.

4. ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА И ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА

1°. *Эффектом Зеемана* называют расщепление энергетических уровней и спектральных линий атомов, молекул и кристаллов в магнитном поле. Различают эффекты Зеемана: *простой (нормальный)* и *сложный (аномальный)*, а также *продольный* и *поперечный*. Продольный эффект наблюдается вдоль направления магнитного поля, поперечный — в направлениях, перпендикулярных к направлению магнитного поля.

2°. При продольном эффекте Зеемана каждая спектральная линия расщепляется на две компоненты (*нормальный зеемановский дублет*) с частотами $\nu \pm \Delta\nu$, где ν — частота линии в отсутствие магнитного поля.

При простом поперечном эффекте Зеемана наряду с указанным дублетом наблюдается несмещенная линия, т. е. всего три линии (*нормальный зеемановский триплет*) с частотами ν , $\nu \pm \Delta\nu$.

В поперечном эффекте Зеемана все три монохроматические компоненты плоско поляризованы: несмещенная компонента с частотой ν (π -компонента) — в плоскости, параллельной вектору $\mathbf{H}$ напряженности внешнего магнитного поля (вектор $\mathbf{E}$ поля π -волны параллелен $\mathbf{H}$), а две смещенные компоненты с частотами $\nu \pm \Delta\nu$ (σ -компоненты) — в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{H}$ (вектор $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$). В продольном эффекте Зеемана наблюдаются только две σ -компоненты, циркулярно поляризованные во взаимно противоположных направлениях; компонента с частотой $\nu - \Delta\nu$ имеет (при наблюдении вдоль вектора $\mathbf{H}$) левую круговую поляризацию, а компонента с частотой $\nu + \Delta\nu$ — правую. Компоненту с частотой $\nu - \Delta\nu$ называют *красной*, а с частотой $\nu + \Delta\nu$ — *фиолетовой* (рис. VI.3.3). В случае поперечного эффекта интенсивность π -компоненты влвое больше интенсивности каждой из σ -компонент. При продольном эффекте интенсивность каждой из двух циркулярно поляризованных компонент равна интенсивности π -компоненты в поперечном эффекте.

3°. Эффект Зеемана, наблюдаемый в спектрах поглощения вещества в магнитном поле, часто называют *обратным эффектом Зеемана*.

В классической теории нормального эффекта Зеемана движение электрона в атоме рассматривают как гармоническое колебание линейного гармонического осциллятора.

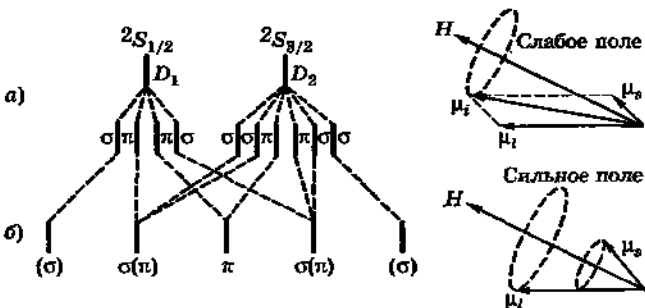


Рис. VI.3.3

Произвольное линейно поляризованное колебание электрона может быть разложено на два колебания: одно, происходящее вдоль магнитного поля, а другое — в плоскости, перпендикулярной направлению поля.

Это последнее можно разложить на два колебания, поляризованных по кругу с противоположными направлениями вращения. Для кругового колебания с направлением вращения, совпадающим с направлением прецессии, частота колебаний излучаемого электрона будет $\nu + \Delta\nu$ (фиолетовая линия), а для колебания с противоположным направлением вращения получится частота $\nu - \Delta\nu$ (красная линия). Вдоль магнитного поля линейно поляризованное колебание электрона, совпадающее с направлением поля, не дает излучения, ибо гармонический осциллятор вдоль своей оси не излучает. Таким образом, в продольном эффекте Зеемана наблюдается лишь два колебания, поляризованных по кругу, смещенных относительно первоначальной частоты на $\pm\Delta\nu$. В поперечном эффекте Зеемана все три колебания дают линейно поляризованные излучения с частотами ν и $\nu \pm \Delta\nu$.

Значение $\Delta\nu$ в нормальном эффекте Зеемана совпадает с ларморовой частотой:

$$\Delta\nu = \nu_L = \frac{\mu_0 e H}{4\pi m},$$

где e и m — заряд и масса электрона, H — напряженность магнитного поля. Величина $\Delta\nu$ обычно весьма мала; при $H \approx 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}}$, $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-5}$. Эффект Зеемана можно наблюдать лишь с помощью приборов с высокой разрешающей способностью.

4°. В слабых магнитных полях простой эффект Зеемана наблюдают очень редко. Он характерен для синглетных спектральных линий. Громадное большинство спектральных линий имеет тонкую структуру, т. е. состоит из нескольких линий, близких по частоте. В слабом внешнем магнитном поле каждая из этих линий расщепляется на несколько очень близких по частотам компонент, имеющих в поперечном эффекте Зеемана линейную поляризацию π - и σ -типа. Эти π - и σ -компоненты образуют сложный зеемановский мультиплет. Число линий, входящих в мультиплет, может значительно превосходить три линии, наблюдающиеся при

простом эффекте Зеемана. Например, желтой линии спектра натрия, имеющей дублетную структуру и состоящей из двух близких линий D_1 ($\lambda_1 = 589,6$ нм) и D_2 ($\lambda_2 = 589,0$ нм), соответствует зеемановский мультиплет, состоящий из 10 линий (рис. VI.3.3, а): линия D_1 расщепляется на четыре компоненты (две π -типа и две σ -типа), а линия D_2 — на шесть компонент (две π -типа и четыре σ -типа). Такой эффект Зеемана называют *сложным*.

5°. Классическая теория не дает объяснения аномальному эффекту Зеемана. Квантовая теория эффекта Зеемана (нормального и аномального) рассматривает его как результат изменения энергетических уровней атома вследствие взаимодействия его спинового и орбитального моментов между собой и с внешним магнитным полем. Для описания этого взаимодействия привлекают векторную модель атома. Различают случаи *слабого* и *сильного* магнитных полей.

6°. Магнитное поле напряженностью H считают *слабым*, если вызываемое им расщепление атомного энергетического уровня, имеющего тонкую структуру, мало по сравнению с расстоянием $E_i - E_{i-1}$ между соседними уровнями тонкой структуры:

$$H \ll \frac{E_i - E_{i-1}}{\mu_0 \mu_B},$$

где μ_B — магнетон Бора, μ_0 — магнитная постоянная.

Магнитное поле считают *сильным*, если $H \gg \frac{E_i - E_{i-1}}{\mu_0 \mu_B}$.

7°. В слабом магнитном поле взаимодействие орбитального магнитного момента атома со спиновым во много раз сильнее, чем взаимодействие каждого из них с магнитным полем. Поэтому взаимодействие с магнитным полем можно рассматривать как малое возмущение, вызывающее для атома с LS -связью изменение энергии атома на $\Delta E = g \mu_B \mu_0 H$. Здесь t — магнитное квантовое число атома, а g — *множитель Ланде*, равный

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

где L , S и J — орбитальное, спиновое и внутреннее квантовые числа атома в рассматриваемом состоянии. В частности, если $S = 0$, то $J = L$ и $g = 1$, а если $L = 0$, то $J = S$ и $g = 2$.

8°. Каждый уровень энергии атома расщепляется в магнитном поле на $2J + 1$ подуровень так, что расстояния между всеми соседними подуровнями одинаковы и равны $g\mu_B\mu_0 H$. Поэтому в магнитном поле происходит расщепление спектральных линий. Вместо линии с частотой ν , наблюдающейся в отсутствие магнитного поля и соответствующей переходу атома из состояния 1 (J_1, g_1) в состояние 2 (J_2, g_2), в магнитном поле наблюдается система спектральных линий (зеемановский мультиплет), частоты которых равны:

$$\nu + (m_{1i} g_1 - m_{2j} g_2) \nu_L,$$

где ν_L — ларморова частота, а из всех возможных комбинаций значений магнитных квантовых чисел атома в состоянии 1 (m_{1i} — всего $2J_1 + 1$ значений) и в состоянии 2 (m_{2j} — всего $2J_2 + 1$ значений) подходят только те, которые удовлетворяют правилу отбора:

$$m_{2j} - m_{1i} = 0, \pm 1.$$

Переходам $m_{2j} = m_{1i}$ соответствует π -компоненты излучения, а переходам $m_{2j} = m_{1i} \pm 1$ — σ -компоненты излучения.

9°. По мере увеличения напряженности H магнитного поля расщепление $\Delta\nu$ растет (одновременно с ν_L) пропорционально H до тех пор, пока отдельные компоненты расщепления соседних линий тонкой структуры не начинают перекрываться, что соответствует переходу от слабого магнитного поля к сильному. При дальнейшем увеличении H некоторые линии зеемановского расщепления сливаются (рис. VI.3.3, б), а интенсивности других уменьшаются. В сильном магнитном поле взаимодействие с полем как орбитального магнитного момента атома, так и его спинового магнитного момента во много раз сильнее, чем их взаимодействие друг с другом. В этом случае последнее играет роль слабого возмущения. При этом в эффекте Зеемана наблюдают только три линии с частотами ν и $\nu \pm \Delta\nu$, которые соответствуют простому эффекту Зеемана и имеют тонкую структуру. Переход сложного эффекта Зеемана в простой в сильном магнитном поле называют *эффектом Пашена—Бака*.

10°. *Магнитным резонансом* называют избирательное поглощение энергии электромагнитных волн определенной частоты ν_p веществом, находящимся в по-

стоянном магнитном поле, напряженность H которого направлена перпендикулярно напряженности переменного магнитного поля волны. Это явление связано с вынужденными переходами между уровнями одного и того же зеемановского мультиплета, возникшими в результате действия постоянного магнитного поля. Если ΔE — разность энергий двух соседних уровней, между которыми совершается переход, то резонансная частота $\nu_p = \frac{\Delta E}{h}$, где h — постоянная Планка.

11°. Различают электронный и ядерный магнитные резонансы. *Электронным парамагнитным резонансом (ЭПР)* называют магнитный резонанс в парамагнитном веществе, содержащем частицы, которые обладают постоянным магнитным моментом, — атомы, молекулы, ионы и квазисвободные электроны (например, электроны проводимости в металлах). Для переходов, подчиняющихся правилу отбора по магнитному квантовому числу, резонансная частота равна

$$\nu_{\text{ЭПР}} = \frac{g\mu_B H}{h},$$

где H — напряженность постоянного внешнего магнитного поля, g — множитель Ланде (для квазисвободных электронов $g = 2$). При $H \approx 10^5 - 10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ частота $\nu_{\text{ЭПР}} \approx 10^9 - 10^{10}$ Гц.

12°. Форма и интенсивность линий, наблюдаемых в электронном парамагнитном резонансе, зависят от взаимодействия спинов атомных электронов друг с другом и с решеткой твердого вещества.

Спин-спиновое взаимодействие атомов обусловлено наличием не равного нулю полного спинового магнитного момента атома. В общем случае оно добавляется к взаимодействию атомов с внешним магнитным полем, приводя к уширению резонансных линий. Это взаимодействие быстро убывает с ростом расстояния между атомами и может быть сделано пренебрежимо малым при разведении парамагнитного вещества в немагнитных растворителях.

13°. *Спин-решеточное взаимодействие* обусловлено тем, что орбитальный магнитный момент атома, связанный LS -связью со спиновым моментом атома, свя-

зан вместе с тем электрическими силами с внутрикристаллическим полем (спин непосредственно с решеткой не взаимодействует). Это взаимодействие обуславливает то, что спины атомов ориентируются по направлению внешнего магнитного поля не мгновенно, а постепенно. Это явление называют *спин-решеточной* релаксацией и характеризуют периодом τ , связанным с энергией атомного перехода соотношением неопределенностей Гейзенберга. Переход атома на более высокий (поглощение) или на более низкий (излучение) уровень зеемановского расщепления происходит не раньше, чем соседние атомы в решетке смогут отдать или воспринять квант энергии $\hbar\nu_{ЭПР} = \Delta E$.

14°. *Ферромагнитным резонансом (ЭФР)* называют электронный магнитный резонанс, наблюдающийся в ферромагнитных образцах. Резонансное поглощение энергии в ферромагнетиках на несколько порядков больше, чем в парамагнетиках. Расчет ферромагнитного резонанса нельзя основывать на рассмотрении квантовых переходов между зеемановскими уровнями отдельных атомов, как в случае ЭПР. В ферромагнитном образце электроны образуют связанный коллектив. Поэтому поглощение энергии переменного электромагнитного поля происходит в результате взаимодействия этого поля с магнитными моментами макроскопических объемов образца.

Из-за влияния спонтанной намагниченности и размагничивающих полей напряженность $H_{эф}$ результирующего (эффективного) магнитного поля в образце может сильно отличаться от напряженности H_0 постоянного однородного внешнего магнитного поля. Соответственно резонансные частоты зависят не только от H_0 , но и от формы образца и его ориентации в магнитном поле H_0 . В простейшем случае однородно намагниченного изотропного образца сферической формы, радиус которого мал по сравнению с длиной волны переменного СВЧ поля, резонансная частота равна

$$\nu_{ЭФР} = \frac{g\mu_0\mu_B H}{h},$$

где множитель Ланде для электронов $g = 2$. Если образец имеет доменную структуру, то картина ферромагнитного резонанса усложняется и возможно появление нескольких резонансных частот.

5. ЭФФЕКТ ШТАРКА В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМАХ

1°. *Эффектом Штарка* называют расщепление спектральных линий под действием на излучающее вещество внешнего электрического поля. Поскольку даже очень сильные внешние электрические поля слабы по сравнению с внутриатомными, их действие на движение атомных электронов можно рассматривать как небольшое возмущение. Соответственно штарковское расщепление линий очень мало и для наблюдения требует приборов с высокой разрешающей способностью. Линии расщепляются на ряд компонент (*селитов*).

2°. В водороде и в водородоподобных системах в первом приближении теории возмущений имеет место *линейный эффект Штарка*, частично снимающий вырождение между уровнями единственного атомного электрона. Расщепление:

$$\Delta v_1 = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) \frac{e E a_0}{h},$$

где E — напряженность однородного электрического поля, a_0 — боровский радиус, n_1 и n_2 — так называемые *параболические квантовые числа*: $n_1 = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$; $n_2 = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$, n — *главное квантовое число*, причем $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$, m — *магнитное квантовое число*, так что $(n_1 + n_2) \leq n - 1$.

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что система обладает средним дипольным моментом

$$p_e = \frac{3}{2} n(n_1 - n_2) e a_0,$$

вызванным поляризацией ее в электрическом поле.

3°. После частичного снятия вырождения в линейном эффекте Штарка остается вырождение состояний, отличающихся значениями магнитного квантового числа m . Дальнейшее снятие вырождения происходит в эффекте второго приближения — *квадратичном эффекте Штарка*. В достаточно сильных электрических

полях с напряженностью E , превосходящей $10^7 \frac{B}{m}$, наблюдается расщепление:

$$\Delta v_2 = -\frac{n^4}{16} [17n^2 - 3(n_1 - n_2)^2 - 9m^2 + 19] \frac{E^2 a_0^3}{h},$$

зависящее, помимо прочих квантовых чисел, также от магнитного квантового числа m . Квадратичный эффект Штарка всегда отрицателен и смещает энергетические уровни в сторону меньших энергий.

6. ПРИНЦИП ПАУЛИ. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ

1°. В квантовой механике различают два типа частиц — *бозоны* и *фермионы*. Систему одинаковых бозонов описывают симметричной полной волновой функцией, не изменяющейся при перестановке «местами» (состояниями) любых двух частиц в системе. Систему одинаковых фермионов описывают антисимметричной полной волновой функцией Ψ_a , которая изменяет знак при перестановке «местами» (состояниями) любых двух частиц в системе.

2°. Принадлежность частицы к бозонам или фермионам зависит от значения квантового числа, определяющего квадрат модуля спина:

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1).$$

Если s — целое неотрицательное число ($s = 0, 1, 2, \dots$), то частица является бозоном (*частица с целым спином*). Если s — полуцелое положительное число ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$), то частица — фермион (*частица с полуцелым спином*).

Примечание. Под спином частицы часто понимают $\hbar s$, т. е. максимальное значение проекции спина S на избранное направление (например, направление внешнего поля).

3°. В применении к атому, в котором электронное состояние однозначно определяется набором четырех квантовых чисел: главного n , орбитального l , магнитного орбитального m и магнитного спинового m_s , прин-

цип Паули гласит: в атоме каждый электрон обладает своим набором квантовых чисел n , l , m и m_s , отличным от набора этих чисел для любого другого электрона.

4°. Принцип Паули лежит в основе систематики заполнения электронных состояний в атомах и дает объяснение периодичности свойств химических элементов — *Периодической системе элементов Д. И. Менделеева*.

Общее число электронных состояний в многоэлектронном атоме при данном главном квантовом числе n равно

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2.$$

Электроны, занимающие совокупность состояний с одинаковым значением числа n , образуют *электронный слой*.

5°. В каждом из слоев электроны распределяются по оболочкам, соответствующим данному значению l ($l \leq n-1$). Максимальное число электронных состояний в подоболочке с данным l равно $2(2l+1)$.

6°. Порядок заполнения электронных состояний в слоях, а в пределах одного слоя — в оболочках следует порядку расположения энергетических уровней с данными n и l . Сначала заполняются состояния с наименьшей возможной энергией, затем состояния со все более высокой энергией. Для легких атомов этот порядок соответствует тому, что сначала заполняется слой с меньшим n и лишь затем начинается заполнение электронами следующего слоя. В пределах одного слоя сначала заполняются состояния с $l=0$, а затем состояния с большими l , до $l=n-1$.

7°. Начиная с калия ($Z=19$) указанный порядок заполнения электронных слоев часто нарушается, так как оказывается, что некоторым состояниям электронов с большим значением n соответствует меньшая энергия, чем в еще не занятых состояниях с меньшим n . Это относится к состояниям $(n+1)s$ и $(n+1)p$ (сравните с состояниями nd и nf). Элементы, у которых происходит достройка предыдущих слоев (подоболочки $3d$, $4d$, $4f$, $5d$ и $5f$) при уже частично заполненных последующих слоях, называются *переходными*.

8°. В табл. VI.2 указано распределение электронов по состояниям (слоям и оболочкам) в атомах различных химических элементов, а также основные термы соответствующих атомов.

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1			$2S_{1/2}$
38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2			$1S_0$
39	Y	2	2 6	2 6 10	2 6 1	2			$2D_{3/2}$
40	Zr	2	2 6	2 6 10	2 6 2	2			$3F_2$
41	Nb	2	2 6	2 6 10	2 6 4	1			$6D_{1/2}$
42	Mo	2	2 6	2 6 10	2 6 5	1			$7S_3$
43	Tc	2	2 6	2 6 10	2 6 5	2			$6S_{5/2}$
44	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 7	1			$5F_5$
45	Rh	2	2 6	2 6 10	2 6 8	1			$4F_{9/2}$
46	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10				$1S_0$
47	Ag	2	2 6	2 6 10	2 6 10	1			$2S_{1/2}$
48	Cd	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2			$1S_0$
49	In	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 1			$2P_{1/2}^0$
50	Sn	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 2			$3P_0$
51	Sb	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 3			$4S_{1/2}^0$
52	Te	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 4			$3P_2$
53	I	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 5			$2P_{3/2}^0$
54	Xe	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6			$1S_0$

Продолжение табл.

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
55	Cs	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	1		$2S_{1/2}$
56	Ba	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	2		$1S_0$
57	La	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6 1	2		$2D_{3/2}$
58	Ce	2	2 6	2 6 10	2 6 10 2	2 6	2		$2H_4$
59	Pr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 3	2 6	2		$4I_{9/2}^0$
60	Nd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 4	2 6	2		$5I_4$
61	Pm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 5	2 6	2		$6H_{5/2}^0$
62	Sm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 6	2 6	2		$7F_0$
63	Eu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6	2		$8S_{7/2}^0$
64	Gd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 1	2		$9D^0_2$
65	Tb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 8	2 6 1	2		$8H_{17/2}$
66	Dy	2	2 6	2 6 10	2 6 10 10	2 6	2		$5I_8^0$
67	Ho	2	2 6	2 6 10	2 6 10 11	2 6	2		$4I_{15/2}^0$
68	Er	2	2 6	2 6 10	2 6 10 12	2 6	2		$3H_6$
69	Tm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 13	2 6	2		$2F_{7/2}^0$
70	Yb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6	2		$1S_0$

Продолжение табл.

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
71	Lu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 1	2		$2D_{3/2}$
72	Hf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 2	2		$3F_2$
73	Ta	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 3	2		$4F_{3/2}$
74	W	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 4	2		$5D_0$
75	Re	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 5	2		$6S_{5/2}$
76	Os	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 6	2		$5D_4$
77	Ir	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 7	2		$4F_{9/2}$
78	Pt	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9	1		$3D_3$
79	Au	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	1		$2S_{1/2}$
80	Hg	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2		$1S_0$
81	Tl	*	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 1		$2P_{1/2}^0$
82	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 2		$3P_0$
83	Bi	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 3		$4S_{3/2}^0$
84	Po	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 4		$3P_2$
85	At	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 5		$2P_{3/2}^0$
86	Rn	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6		$1S_0$
87	Fr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	1	$2S_{1/2}$
88	Ra	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	2	$1S_0$

Продолжение табл.

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q	Нормальное состояние
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
89	Ac	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 1	2	$3D_{3/2}$
90	Th	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 2	2	$3F_2$
91	Pa	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 2	2 6 1	2	$4K_{11/2}$
92	U	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 3	2 6 1	2	$5L_6^0$
93	Np	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 4	2 6 1	2	$6L_{11/2}$
94	Pu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 6	2 6	2	$7F_6$
95	Am	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6	2	$8S_{7/2}^0$
96	Cm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 1	2	$9P_2^0$
97	Bk	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 8	2 6 1	2	$8H_{17/2}$
98	Cf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 10	2 6	2	$6I_8$
99	Es	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 11	2 6	2	$4I_{15/2}$
100	Fm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 12	2 6	2	$3H_6$
101	Md	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 13	2 6	2	$2F_{7/2}$
102	No	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6	2	$1S_0$
103	Lw	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 1	2	
104		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 2	2	

9°. Внешними (валентными) электронами атома называют электроны, входящие в состав s- и p-оболочек слоя с наибольшим числом n для данного атома. Этими электронами определяются химические и оптические свойства атомов.

10°. В заполненной s -оболочке компенсированы магнитные спиновые моменты электронов; в заполненных p -, d -, f -, ... оболочках компенсированы также магнитные орбитальные моменты электронов. Поэтому магнитный момент атома с заполненными оболочками равен нулю, и соответствующий элемент обладает диамагнитными свойствами. В атомах с незаполненными оболочками некомпенсированный (не равный нулю) магнитный момент обуславливает парамагнетизм, а в ряде случаев — ферромагнетизм или антиферромагнетизм.

11°. Заполнение nd -оболочки и nf -оболочки в атомах происходит при почти неизменной электронной конфигурации $(n + 1)s$ - и $(n + 1)p$ -оболочек и поэтому почти не влияет на химические свойства переходных элементов, которые в пределах данной группы элементов являются сходными. Заполнение nd - и nf -оболочек, однако, существенно сказывается на рентгеновских спектрах атомов, связанных с электронными переходами во внутренних слоях атома.

12°. Суммарное число электронов в $s + p$ -подгруппе равно 8. Механизм отдачи или присоединения валентных (внешних) электронов лежит в основе большинства химических реакций. Энергетически оказываются выгодными отдача электронов атомами с менее чем наполовину занятой $s + p$ -подгруппой и присоединение электронов атомами с более чем наполовину занятой $s + p$ -подгруппой. Атомы с наполовину занятой $s + p$ -подгруппой могут в зависимости от ряда условий либо отдавать, либо приобретать электроны.

7. РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

1°. В зависимости от вида спектра различают два типа рентгеновского излучения — *характеристическое излучение*, имеющее линейчатый спектр, и *белое излучение*, имеющее сплошной спектр. Белое излучение является *тормозным*, так как возникает при торможении быстрых электронов в веществе. Характеристическое рентгеновское излучение связано с электронными переходами в средних и тяжелых атомах, возникающими в результате удаления (например, путем ударной ионизации) электрона из какого-либо внутреннего электронного слоя атома (например, из K - или L -слоя). Набор возможных частот характеристического излучения различен для атомов разных химических элементов, чем и объясняется название этого рентгеновского излучения.

2°. Если атомный электрон удален из K -слоя атома ($n = 1$), то становится возможным квантовый переход в освободившееся состояние электрона, например, из L -слоя ($n = 2$), M -слоя ($n = 3$) и т. д. с последующими электронными переходами на освобождающиеся места в этих слоях, пока этот процесс не закончится полным перераспределением электронов по состояниям в атоме. Возникающие при этих переходах фотоны и образуют характеристическое рентгеновское излучение. На рис. VI.3.3 показана общая схема этих переходов, удовлетворяющих следующим правилам отбора: $|\Delta l| = 1$, $|\Delta j| = 0, 1$ для дипольного излучения, $|\Delta l| = 0, 2$, $|\Delta j| = 0, 1, 2$ для значительно более слабого квадрупольного излучения. Здесь n , l и j — главное, орбитальное и внутреннее квантовые числа, характеризующие состояние в атоме удаляемого из него электрона. В рентгеновской спектроскопии приняты показанные на рис. VI.3.4 обозначения уровней энергии однократно ионизованного атома в зависимости от состояния удаляемого атома.

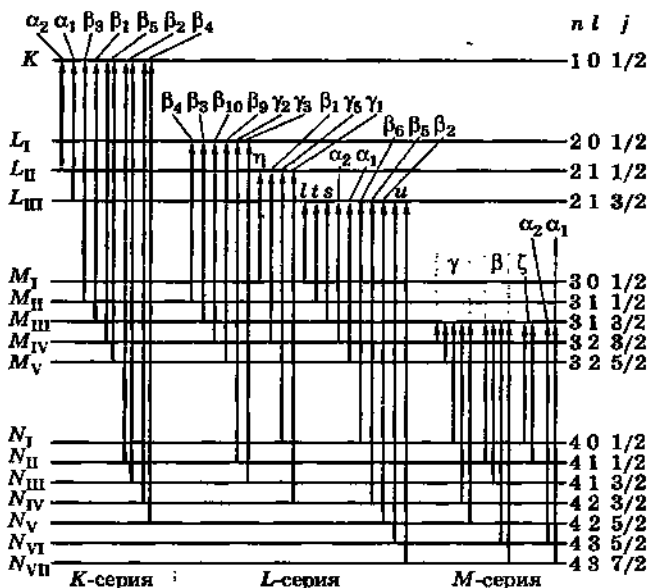


Рис. VI.3.4

Спектральные линии, обусловленные переходами электронов в K -, L - и т. д. слои атома, образуют K -, L - и т. д. *серии характеристического спектра*. Линии каждой серии обычно обозначают греческими буквами с подстрочными индексами (например, K_{α_1} , K_{β_2} , L_{α_2} и т. п.).

3°. Частоты сходственных линий характеристического рентгеновского излучения атомов различных химических элементов удовлетворяют *закону Мозли*:

$$\sqrt{\frac{\nu}{R}} = a(Z - \sigma),$$

где R — *постоянная Ридберга*, Z — атомный номер химического элемента, σ — *постоянная экранирования*, которая учитывает влияние на электрон, переходящий из одного слоя в другой, остальных атомных электронов, a — постоянная, зависящая от выбора рассматриваемой спектральной линии: для линии K_{α} постоянная экранирования $\sigma \approx 1$ и $a \approx \frac{3}{4}$, для линии L_{α} $\sigma \approx 5,5$ и $a \approx \frac{5}{36}$.

4°. Непрерывный рентгеновский спектр тормозного излучения ограничен со стороны малых длин волн некоторой наименьшей длиной волны $\lambda_{\min}$, называемой *границей сплошного спектра*. Появление границы связано с тем, что максимальная энергия $h\nu_{\max}$ рентгеновского кванта, возникшего за счет кинетической энергии тормозящегося электрона W_K , не может превышать этой энергии:

$$W_K = e\varphi_0 = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}},$$

где φ_0 — разность потенциалов, за счет которой электрону сообщена энергия W_K ,

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{e\varphi_0} = \frac{ch}{W_K}.$$

5°. Рентгеновские спектры поглощения, в отличие от оптических, не содержат отдельных линий поглощения. Коэффициент поглощения рентгеновских лучей веществом убывает с увеличением их частоты. Эта монотонная зависимость скачкообразно нарушается (*скачки поглощения*) в областях частот, при которых энергия рентгеновских квантов становится достаточной для освобождения электрона с K -, L -, M -, ... слоя атома.

6°. При поглощении атомом рентгеновского кванта может происходить автоионизация возбужденного ато-

ма — эффект Оже, вызванный внутренним перераспределением энергии возбуждения. Эффект Оже является двухстадийным. Вначале при поглощении рентгеновского кванта происходит возбуждение атома, при котором освобождается электрон с одного из глубоких слоев (обычно из *K*). Далее на освободившееся место переходит электрон из менее глубокого слоя (*L*, *M*- или *N*-слоя). Однако выделяющаяся при этом переходе энергия не излучается в виде нового рентгеновского фотона, а передается еще одному (третьему) из атомных электронов, который в результате вылетает из атома. Эффект Оже, не сопровождающийся излучением, является примером безрадиационного или безызлучательного перехода.

Глава 4

МОЛЕКУЛА

1. ИОННЫЕ МОЛЕКУЛЫ

1°. Молекулой называют наименьшую устойчивую частицу данного вещества, обладающуюся его основными химическими свойствами и состоящую из одинаковых или различных атомов, соединенных в одно целое химическими связями (химическими силами). Химические силы имеют в своей основе различные взаимодействия внешних электронов атомов.

2°. Способность атома образовывать химические связи с другими атомами или группами называют валентностью. Различают два основных типа валентности: ковалентность, равную числу ковалентных связей, образованных атомом в молекуле, и ионную валентность (гетеро-, или электровалентность), равную числу электронов, отданных или полученных атомом при образовании ионной молекулы.

Иногда пользуются также понятиями валентности по отношению к водороду или кислороду, равными числу присоединяемых (или замещаемых) в молекуле атомов, соответственно, водорода и кислорода.

3°. Большой класс молекул образуют ионные молекулы, состоящие из ионов химических элементов, входящих в молекулу. Общая сумма положительных и отрицательных зарядов ионов в молекуле равна нулю, вследствие чего ионные молекулы электрически нейт-

ральны. Силы, обеспечивающие устойчивость молекул, имеют в основном электрическую природу.

Примерами типичных ионных молекул могут служить молекулы щелочно-галогидных солей, образованные ионами атомов элементов I и VII групп Периодической системы: NaCl (Na^+Cl^-), RbBr , CsI и т. п. Поскольку ионные молекулы могут быть образованы лишь из ионов атомов различных химических элементов, связь ионов в таких молекулах называют также *гетерополярной* (от греческого «гетеро» — «разный»).

4°. Образование ионных молекул определяется повышенной устойчивостью внешней восьмизлектронной $s + p$ -подгруппы в атомах. Атомы, внешняя оболочка которых насчитывает более четырех электронов, стремятся приобрести электроны, необходимые для дополнения их внешней $s + p$ -подгруппы до восьмизлектронной (обладают так называемой *электроотрицательностью*). Особая устойчивость восьмизлектронной конфигурации объясняется тем, что при заполнении всех восьми состояний в $s + p$ -подгруппе она становится мало восприимчивой к внешним воздействиям ввиду полной компенсации орбитальных и спиновых моментов электронов.

При сближении атомов осуществляется переход внешних электронов от электроположительных к электроотрицательным атомам с образованием соответственно положительных и отрицательных ионов этих атомов и их объединением в ионную молекулу.

5°. Потенциальная энергия двухатомной ионной молекулы типа NaCl , образованной однозарядными ионами Cl^- и Na^+ , равна

$$U = k \left(-\frac{e^2}{r} + \frac{be^2}{r^9} - \frac{ep_{e1}}{r^2} - \frac{ep_{e2}}{r^2} - \frac{2p_{e1}p_{e2}}{r^3} + \frac{p_{e1}^2}{2\alpha_1} + \frac{p_{e2}^2}{2\alpha_2} \right),$$

где r — расстояние между центрами ионов, p_{e1} и p_{e2} — дипольные моменты каждого из ионов, α_1 и α_2 — поляризуемости ионов, b — постоянная, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. При дис-

социации молекулы на ионы ($r \rightarrow \infty$) $U = 0$. Первый член справа учитывает энергию кулоновского притяжения разноименно заряженных ионов, второй член — энергию взаимного отталкивания ионов, третий и четвертый члены — энергию притяжения свободных зарядов ионов диполями с дипольными моментами p_{e1} и p_{e2} , образовавшимися вследствие взаимной поляризации

электронных оболочек ионов, пятый член — взаимодействие самих индуцированных дипольных моментов, шестой и седьмой члены — энергию деформации квазиупругих диполей (квазиупругую энергию).

6°. Потенциальная энергия ионной молекулы U имеет минимум $U_{\text{мин}}$ при $r = r_e$, соответствующем *равновесному расстоянию* между ионами (рис. VI.4.1).

$$U_{\text{мин}} = -\frac{\hbar e^2}{r_e} \left(\frac{8}{9} + \frac{5(\alpha_1 + \alpha_2)}{18r_e^3} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{9r_e^6} \right).$$

Величину r_e находят из условия $\left(\frac{dU}{dr}\right)_{r=r_e} = 0$, означающего условие минимума по-

тенциальной энергии молекулы. Приближенное уравнение для r_e имеет вид (если в разложении p_{e1} и p_{e2} по степеням $1/r$ отбросить члены с r выше r^9):

$$1 + \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{r_e^3} + \frac{14\alpha_1\alpha_2}{r_e^6} = \frac{9b}{r_e^8}.$$

7°. Распад молекулы на составляющие ее ионы называют *диссоциацией молекулы*. Величина $U_{\text{мин}}$ и энергия $D_{\text{и}}$ диссоциации молекулы на два иона связаны соотношением

$$D_{\text{и}} = -U_{\text{мин}}.$$

С энергией диссоциации D молекулы на нейтральные атомы величина $D_{\text{и}}$ связана соотношением

$$D_{\text{и}} = D + e\phi - E,$$

где ϕ — потенциал ионизации электроположительного атома, E — энергия сродства к электрону электроотрицательного атома.

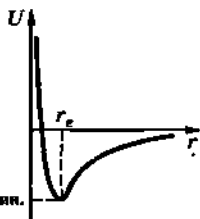


Рис. VI.4.1

2. АТОМНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

1°. *Атомными молекулами* называют молекулы, в которых основное состояние соответствует нормальным состояниям нейтральных атомов. Силы, обеспечивающие устойчивость атомных молекул, являются

обменными и имеют специфический квантовый характер. Они действуют между внешними электронами атомов в молекуле.

Атомные молекулы в ряде случаев образованы одинаковыми атомами. Поэтому связь атомов в таких молекулах называют также *гомеополярной* (от греческого слова «гомео» — «одинаковый») или *ковалентной*.

2°. В простейшем случае молекулы водорода, образованной из двух одинаковых атомов, уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где

$$U = \frac{\hbar^2 k^2}{r_{12}} + \frac{\hbar^2 k^2}{r_{I, II}} - \hbar^2 k^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{r_{1i}} + \frac{1}{r_{2i}} \right).$$

Первый член в U соответствует кулоновскому взаимодействию между электронами атомов I и II, второй — кулоновскому взаимодействию между ядрами атомов I и II (приблизительно полагают $r_{I, II} = \text{const}$, т. е. считают ядра I и II закрепленными), третий член учитывает кулоновское взаимодействие электрона атома I с ядрами атомов I и II и электрона II с ядрами атомов I и II.

3°. В нулевом приближении при решении задачи о молекуле водорода считают $r_{I, II} = \infty$, т. е. пренебрегают возмущением в атоме I, вызванным присутствием атома II, и наоборот. Уравнение Шрёдингера при этом распадается на два уравнения для изолированных атомов водорода. Решением их в этом приближении служит волновая функция вида

$$\psi_0 = \psi_I(1)\psi_{II}(2),$$

отвечающая связи каждого из электронов со своим ядром. При сближении атомов I и II становится возможной, вследствие неразличимости обоих электронов, волновая функция вида $\psi' = \psi_I(2)\psi_{II}(1)$, отвечающая связи каждого из электронов с чужим ядром. Полная волновая функция имеет вид

$$\psi_{a, c} = N_{a, c} [\psi_I(1)\psi_{II}(2) \pm \psi_I(2)\psi_{II}(1)],$$

где индекс a и знак минус отвечают антисимметричной волновой функции, индекс c и знак плюс — симметричной.

Нормирующий множитель $N_{a,c} = (2(1 \pm S))^{-1/2}$, где

$$S = \int \psi_I(1)\psi_{II}(1)\psi_I(2)\psi_{II}(2)dV_1dV_2.$$

Волновая функция $\Psi_{a,c}$, являющаяся точным решением уравнения Шрёдингера для молекулы водорода при больших расстояниях между атомами, считается приближенным решением при малых расстояниях $r_{I,II}$:

$$|\Psi_{a,c}|^2 = N_{a,c}^2 [|\psi_I(1)|^2|\psi_{II}(2)|^2 + |\psi_I(2)|^2|\psi_{II}(1)|^2 \pm \\ \pm 2\psi_I(1)\psi_{II}(2)\psi_I(2)\psi_{II}(1)],$$

и дает распределение электронной плотности в молекуле. Первые два члена соответствуют электронам, находящимся в соответствующих атомах. Этим членам соответствует электростатическая (кулоновская) часть энергии взаимодействия атомов. Третьему члену соответствует обменная энергия.

Обменное взаимодействие электронов в молекуле водорода можно понимать в том смысле, что электрон каждого из ее атомов проводит некоторую долю времени у ядра другого атома, осуществляя тем самым связь обоих атомов в молекулу.

Энергия взаимодействия атомов в молекуле водорода:

$$\Delta E = E - 2E_0 = \frac{C \pm A}{1 \pm S},$$

где E_0 — энергия атома водорода в основном состоянии, а C и A — кулоновский и обменный интегралы, равные:

$$C = ke^2 \int \left[-\frac{1}{r_{II1}} - \frac{1}{r_{I2}} + \frac{1}{r_{I2}} + \frac{1}{r_{I1}} \right] \times \\ \times |\psi_I(1)|^2 |\psi_{II}(2)|^2 dV_1 dV_2, \\ A = ke^2 \int \left[-\frac{1}{r_{II1}} - \frac{1}{r_{I2}} + \frac{1}{r_{I2}} + \frac{1}{r_{I1}} \right] \times \\ \times \psi_I(1)\psi_{II}(2)\psi_I(2)\psi_{II}(1) dV_1 dV_2.$$

4°. Интегралы C и A отрицательны, причем $|A| < |C|$; интеграл $S < 1$. Для двух знаков в выражении для ΔE :

$$\Delta E_+ = \frac{C+A}{1+S} < 0, \quad \Delta E_- = \frac{C-A}{1-S} > 0.$$

Величина ΔE_+ соответствует устойчивому состоянию молекулы водорода, а величина ΔE_- — неустой-

чивому состоянию. Зависимость ΔE_+ и ΔE_- от расстояния между ядрами атомов в молекуле изображена на рис. VI.4.2. Кривая $\Delta E_+(r)$ сходна с потенциальной кривой для ионных молекул. Соответствующие устойчивому и неустойчивому состояниям молекулы водорода распределения электронной плотности (величины $e|\psi|^2$) показаны на рис. VI.4.3, а, б.

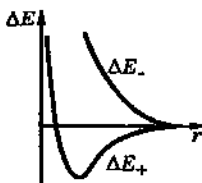


Рис. VI.4.2

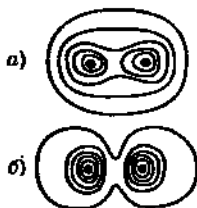


Рис. VI.4.3

Согласно принципу Паули, полная волновая функция молекулы водорода $\Psi\chi$, где χ — спиновая функция, должна быть антисимметричной. Поэтому в устойчивом состоянии молекулы водорода (ΔE_+ и Ψ_0) спиновая функция антисимметрична, т. е. спины электронов направлены во взаимно противоположные стороны, и суммарное спиновое число молекулы $S = 0$ (синглетное состояние). Соответственно, в неустойчивом состоянии молекулы водорода (ΔE_- , Ψ_a , χ_c) — спины электронов сонаправлены, и $S = 1$ (триплетное состояние).

5°. В общем случае в образовании молекул участвуют и ионная, и атомная связи. В случае ионных молекул типа NaCl, CsJ и т. п. на первый план выступает кулоновское взаимодействие ионов; в случае молекул типа H_2 , N_2 , O_2 и т. п. основную роль играет обменное взаимодействие атомов.

6°. Химические связи в молекулах осуществляются электронами s- и p-подгрупп оболочки с наибольшим значением главного квантового числа n . В молекулах отсутствует индивидуализация описания состояний валентных электронов, т. е. невозможно описать состояние каждого валентного электрона в молекуле волновой функцией, свойственной исключительно этому состоянию и отличной от волновых функций для других валентных электронов. Валентные электроны молекулы находятся не в s- или p-состояниях, а в смешан-

ном s — p -состоянии, которое описывается волновой функцией, представляющей собой линейную комбинацию функций, отвечающих s - и p -состояниям. Такое смешанное состояние называют *гибридным*.

7°. В случае простой химической связи между атомами, называемой также *сигма*(σ)-*связью*, электронная плотность валентных электронов распределена симметрично вокруг линии, соединяющей ядра атомов в молекуле. Сигма-связь может осуществляться как s -, так и p -электронами атомов. Она имеет место во всех молекулах с насыщенными валентностями. Вследствие симметрии сигма-связи возможно вращение одной части молекулы относительно другой с осью вращения, совпадающей с осью симметрии связи. В непредельных и ароматических соединениях с ненасыщенными валентностями имеют место *пи*(π)-*связи*, образуемые p -электронами и не обладающие осевой симметрией.

В результате взаимного перекрывания электронных облаков двух π -электронов по обе стороны от линии, соединяющей ядра, образуются две «перемычки», сообщающие π -связи жесткость. Двойная связь (например, связь атомов углерода в молекуле этилена $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$) состоит из

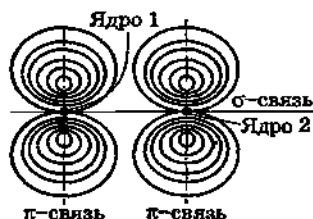


Рис. VI.4.4

одной σ - и одной π -связи (рис. VI.4.4). Электронное облако π -связи имеет две плоскости симметрии, проходящие через линию, соединяющую ядра. В силу асимметрии электронной плотности при этом виде связей вращение частей молекулы друг относительно друга невозможно. Это проявляется, например, в *цис-транс-изомерии*, т. е. в существовании веществ одинакового состава, но различной геометрической структуры, связанной с различным относительным расположением частей молекулы. Это приводит к различию физико-химических свойств *изомеров*.

Свойства симметрии электронных плотностей, соответствующих электронам, осуществляющим π -связи, определяют *направленность валентностей*, которая лежит в основе *стереохимии* — учения о пространственном строении химических соединений. Установлено, что по своей геометрической форме молекулы раз-

личаются: прямолинейные и плоские, треугольные и пирамидальные, молекулы тетраэдрической формы, зигзагообразные, цепочечные, молекулы кольчатой формы и др. Пространственное строение молекул, обусловленное направленностью валентностей, выявляется в случае молекул с числом атомов, большим двух. Например, молекула воды имеет форму равнобедренного треугольника с углом H—O—H , равным 105° .

3. ЭЛЕКТРОННЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. В соответствии с возможными типами движений в молекуле волновая функция молекулы может быть приближенно представлена в виде произведения трех волновых функций, отвечающих электронным движениям, колебаниям и вращениям молекулы, при условии взаимной независимости этих движений:

$$\Psi = \psi_a \psi_k \psi_v.$$

При подстановке Ψ в соответствующее уравнение Шрёдингера оно может распадаться на три уравнения, решение каждого из которых дает энергетический спектр соответствующего движения: E_a , E_k , E_v . Полная энергия молекулы приближенно равна

$$E = E_a + E_k + E_v.$$

По порядку величины $E_a \gg E_k \gg E_v$.

2°. *Электронные термы молекул* не отличаются по своему происхождению от электронных термов изолированных атомов. Число электронных термов значительно превышает число этих термов в атомах. Любой атом в молекуле находится в электрическом поле остальных ее атомов (*внутримолекулярное электрическое поле*). Оно вызывает расщепление электронных уровней атомов в молекуле, аналогичное тому, которое происходит в атомах, находящихся в электрическом поле.

3°. Энергетические электронные уровни молекулы определяются ее электронной конфигурацией, т. е. совокупностью квантовых чисел, соответствующих состояниям всех электронов молекулы. В основу систематики этих уровней и спектров молекул кладется *векторная модель молекулы*, являющаяся обобщением векторной модели атома.

4°. Электрическое поле двух или большего числа атомных ядер, входящих в состав молекулы, не облада-

ет центральной симметрией. Поэтому полный момент импульса электронов в молекуле не сохраняется. Однако в случае двухатомных, а также прямолинейных многоатомных молекул это поле симметрично относительно оси молекулы Oz , проходящей через ядра атомов. В этом случае можно считать, пренебрегая слабым спин-орбитальным взаимодействием, что сохраняются:

а) проекция на ось z суммарного орбитального момента импульса всех электронов молекулы, абсолютная величина которой равна (в единицах $\hbar$) орбитальному квантовому числу молекулы Λ , принимающему значения $0, 1, 2, \dots$;

б) суммарный спин всех электронов молекулы, характеризуемый спиновым квантовым числом S , которое, как и в случае атомных термов, определяет мультиплетность электронного терма молекулы, равную $2S + 1$.

В большинстве случаев классификацию электронных термов двухатомных молекул проводят по значениям квантового числа Λ подобно тому, как это делается при классификации атомных термов по орбитальному квантовому числу L . Принято следующее обозначение электронных термов молекулы: $2S + 1\Lambda_\Omega$, где, в зависимости от числового значения $\Lambda = 0, 1, 2, \dots$, используют заглавные буквы греческого алфавита, $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi, \dots$, соответствующие заглавным латинским буквам, обозначающим аналогичные атомные термы ($S, P, D, F, \dots$). Квантовое число

$$\Omega = \Lambda + \Sigma,$$

где квантовое число Σ характеризует проекцию спина молекулы на ее ось и пробегает $(2S + 1)$ значений: $S, S - 1, \dots, -S$ (не путать число Σ с Σ -состоянием молекулы при $\Lambda = 0$).

5°. Симметрия двухатомной молекулы допускает не только поворот вокруг оси z молекулы, но и отражение в плоскости, проходящей через эту ось (например, в плоскости yOz , т. е. замену координат x_i на $-x_i$). При этом энергия молекулы не изменяется, а новое состояние не тождественно исходному, так как изменяется знак проекции орбитального момента импульса молекулы на ось z . Поэтому все состояния молекулы с $\Lambda \neq 0$ двукратно вырождены.

В случае $\Lambda = 0$ (Σ -терм) при отражении в плоскости yOz состояние молекулы не изменяется, так что Σ -терм не вырожден. При отражении волновая функция Σ -терма

может только умножаться на $+1$ или на -1 (в результате двух последовательных отражений волновая функция не изменяется). Соответственно различают Σ^+ и Σ^- -термы.

Двухатомная молекула с одинаковыми атомными ядрами обладают центром симметрии, лежащим между ядрами. Если этот центр принять за начало координат, то при изменении знака координат всех электронов и сохранении координат ядер энергия системы не изменяется, а у волновой функции знак либо не изменяется (четная функция), либо изменяется (нечетная функция). Электронные термы делят соответственно на *четные термы*, обозначаемые индексом g справа внизу у символа терма (Σ_g , Π_g и т. д.), и *нечетные термы*, обозначаемые индексом u (Σ_u , Π_u и т. д.). В подавляющем большинстве двухатомных молекул основным термом является терм $^1\Sigma^+$, а в случае молекулы, состоящей из одинаковых атомов, — терм $^1\Sigma_g^+$.

6°. Если молекула образована из двух разных атомов, исходные состояния которых характеризуются квантовыми числами L_1, S_1 и L_2, S_2 , где $L_2 \leq L_1$, то проекции орбитальных моментов импульса атомов на ось z молекулы могут принимать следующие значения (в единицах $\hbar$):

$$M_1 = -L_1, -L_1 + 1, \dots, L_1 - 1, L_1$$

и

$$M_2 = -L_2, -L_2 + 1, \dots, L_2 - 1, L_2.$$

Проекция на ту же ось орбитального момента импульса молекулы равна $M_1 + M_2$, а их модули $\Lambda = |M_1 + M_2|$. Число различных термов молекулы, соответствующих каждому из возможных значений Λ , равно: 1 терм с $\Lambda = L_1 + L_2$, 2 терма с $\Lambda = L_1 + L_2 - 1$ и т. д. до $(2L_2 + 1)$ терма с $\Lambda = 0$ (все термы с $\Lambda \neq 0$ двукратно вырождены).

Спин молекулы равен сумме спинов обоих атомов. Спиновое квантовое число молекулы может принимать следующие значения: $S = S_1 + S_2, S_1 + S_2 - 1, \dots, |S_1 - S_2|$. Полный набор электронных термов молекулы можно получить, комбинируя эти значения S , определяющие мультипольность терма, со всеми термами, соответствующими набору всевозможных значений Λ .

Из общего числа $2L_2 + 1$ Σ -термов (каждой из возможных мультипольностей) будет $L_2 + 1$ Σ^+ -термов и

L_2 Σ^- -термов, если $(-1)^{L_1+L_2} l_1 l_2 = +1$, или наоборот, если $(-1)^{L_1+L_2} l_1 l_2 = -1$. Здесь l_1 и l_2 — коэффициенты, равные ± 1 и характеризующие четность ($l = +1$) или нечетность ($l = -1$) волновых функций исходных состояний 1-го и 2-го атомов, образующих молекулу.

7°. В случае молекул, состоящих из двух одинаковых атомов, правила сложения орбитальных моментов импульса и спинов атомов в молекуле те же, что для молекул, состоящих из разных атомов (или разных изотопов) одного и того же химического элемента. Однако, если атомы находятся в разных состояниях, то число термов молекулы нужно удвоить в соответствии с появлением при перестановке местами атомных ядер равно-го числа четных и нечетных термов.

Если оба одинаковых атома в одном и том же состоянии, то число термов не удваивается, так как состояние молекулы не изменяется при перестановке местами ядер. Соотношение между числами четных (N_g) и нечетных (N_u) термов с данными значениями Λ и S имеет вид:

- 1) $N_g = N_u$, если Λ нечетно;
- 2) $N_g = N_u + 1$ если Λ четно и S четно ($S = 0, 2, 4, \dots$);
- 3) $N_g = N_u - 1$ если Λ четно, а S нечетно ($S = 1, 3, \dots$).

Для Σ^+ и Σ^- термов ($\Lambda = L_1 - L_2 = 0$; $L_1 = L_2 = L$):

$N_g^+ = N_u^- + 1 = L + 1$, если S четно и $N_u^+ = N_g^- + 1$, если S нечетно.

8°. Для электронных спектров молекул существуют правила отбора, аналогичные правилам отбора для атомных спектров: $\Delta\Lambda = 0, \pm 1$, $\Delta\Sigma = 0$ и $\Delta\Omega = 0, \pm 1$. Таким образом, разрешены переходы $\Sigma \leftrightarrow \Sigma$, $\Pi \leftrightarrow \Pi$, ...; $\Sigma \leftrightarrow \Pi$, $\Pi \leftrightarrow \Delta$, ... и запрещены переходы $\Sigma \leftrightarrow \Delta$, $\Pi \leftrightarrow \Phi$ и т. д. Правило интеркомбинационного запрета $\Delta S = 0$ выполняется строго только для молекул с малым суммарным зарядом ядер. Действуют правила отбора, связанные с характером симметрии молекулярных термов: положительные термы комбинируют только с отрицательными, а четные термы — только с нечетными.

9°. Рассмотренная классификация термов двухатомных молекул неполная. Во-первых, в ней предполагается, что электрическое поле молекулы достаточно сильно для того, чтобы нарушить связь между векторами L и S в образующих ее атомах. Однако это условие

не всегда выполняется. Во-вторых, необходимо учитывать влияние вращения молекулы и связанного с ним магнитного поля, напряженность которого направлена перпендикулярно оси молекулы.

Обобщение систематики молекулярных термов приводит к трем типам *хундовских термов* двухатомной молекулы.

Тип А. Взаимодействие спиновых моментов атомов в молекуле (S_i, S_k) и взаимодействие различных L_i с полем (L_i, E) велики по сравнению с взаимодействиями (L_i, S_i), где E — напряженность электрического внутримолекулярного поля, которое велико. Комбинации векторов

$$\Omega = \Lambda + S$$

соответствует систематика молекулярных термов, указанная в п. 4°—6°. Вектор Ω складывается с вектором момента импульса ядер Y (вращение молекулы без учета ядерных спинов), давая суммарный вектор

$$J = \Omega + Y.$$

Отвечающее вектору J квантовое число принимает целые значения, когда Ω и Y целые.

Тип Б. Взаимодействие (L_i, Y) велико по сравнению с (L_i, S_i), а также (S_i, S_k). Квантовое число Σ , а с ним Ω утрачивают смысл. Вместо них систематику ведут по числу K , соответствующему вектору

$$K = \Lambda + Y.$$

Этот вектор вместе с вектором спинов S дает вектор полного момента молекулы

$$J = K + S.$$

При достаточно больших K вводят квантовое число $\Xi = \pm S, \pm(S - 1), \dots$, соответствующее проекции спина атомов на ось вращения молекулы. При усилении вращения ядер (возрастание K) возможен переход от типа А к Б.

Тип В. Спин-орбитальное взаимодействие для отдельных атомов (L_i, S_i) велико по сравнению с остальными взаимодействиями. Этот случай имеет место в слабом электрическом поле и соответствует случаю сильной связи в атоме. Получают смысл вектор J_A атомного полного момента и число Ω , определяющее проекцию J_A на ось молекулы, числа же Λ и Σ перестают быть применимыми. Комбинация векторов Ω и Y дает полный вектор

$$J = \Omega + Y.$$

Векторные диаграммы, соответствующие трем типам гундовских термов молекулы, приведены на рис. VI.4.5.

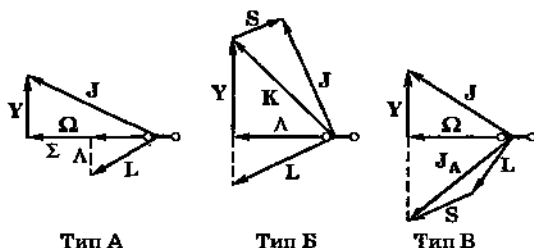


Рис. VI.4.5

4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. При смещении из равновесных положений атомов в молекуле могут возникать их колебания около положений равновесия (*внутримолекулярные колебания*). Колебания атомов в молекуле могут быть рассмотрены в рамках аналитической механики. В квантовой теории внутримолекулярные колебания рассматривают как причину возникновения колебательных спектров молекул. Колеблющиеся атомы в молекуле рассматривают во многих случаях как ангармонические осцилляторы.

2°. В простейшем случае двухатомной молекулы ее потенциальную энергию записывают с помощью *потенциала Леннарда—Джонса*:

$$U(r) = \left(\frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^{12}} \right),$$

где a и b — постоянные, или с помощью *потенциала Морзе*:

$$U(\rho) = D(1 - e^{-a\rho})^2,$$

где $\rho = \frac{r - r_e}{r_e}$, a — постоянная, r_e — равновесное рас-

стояние между атомами, соответствующее минимуму $U(r)$; ρ — относительное смещение атомов из их равновесных положений. Величина D имеет смысл энергии диссоциации молекулы на атомы, $D = U(\infty) - U(0)$. Уравнение Шрёдингера для колебаний молекулы:

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{8\pi^2 I_e}{h^2} [E_k - U(\rho)] \psi = 0,$$

где I_e — момент инерции молекулы в равновесном состоянии, E_k — колебательная энергия молекулы.

3°. При малых колебаниях молекулы $U(\rho) \approx Da^2\rho^2$, и уравнение Шрёдингера сводится к уравнению для гармонического осциллятора. Колебательный энергетический спектр:

$$E_v = h\nu \left(v + \frac{1}{2} \right),$$

где

$$\nu = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{2D}{I_e}};$$

ν — частота собственных колебаний осциллятора, а $v = 0, 1, 2, 3, \dots$ — колебательное квантовое число, для которого имеет место правило отбора

$$\Delta v = \pm 1.$$

Величину

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu$$

называют *нулевой колебательной энергией*. Колебательные энергетические уровни рассматриваемых молекул находятся на одинаковом расстоянии друг от друга.

4°. В случае ангармонических колебаний двухатомной молекулы ее энергетический колебательный спектр

$$E_v = h\nu \left(v + \frac{1}{2} \right) - hxv \left(v + \frac{1}{2} \right)^2,$$

где

$$x = \frac{h\nu}{4D} \ll 1,$$

называют *постоянной ангармоничности*. Колебательный энергетический спектр двухатомной молекулы показан на рис. VI.4.6. Расстояние между двумя соседними энергетическими уровнями

$$\Delta E = h\nu - 2(v+1)xh\nu$$

убывает с ростом v . В этом случае правил отбора для v не существует. Интенсивность линий спектра быстро убывает с ростом Δv . Энергетические уровни сходятся к границе $\Delta E = 0$, для которой

$$v_{\text{max}} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$$

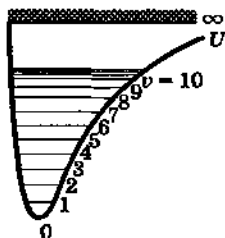


Рис. VI.4.6

и

$$E_{\text{макс}} = \frac{h\nu}{4x} (1 - x^2) = D(1 - x^2).$$

Ввиду того, что $x^2 \ll 1$, $E_{\text{макс}}$ переходит в выражение

$$E_{\text{макс}} = \frac{h\nu}{4x} = D,$$

т. е. максимальная колебательная энергия молекулы равна ее энергии диссоциации D .

5. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. Возможны два основных вида вращения молекул: вращение молекулы как целого вокруг некоторого направления или точки и вращение одних частей молекулы относительно других — *внутреннее вращение*. Существование внутреннего вращения следует из поворотной изомерии и ряда других физико-химических свойств молекул с σ -связями.

2°. Внутреннее вращение молекулы обычно затруднено наличием потенциального барьера между различными положениями равновесия при вращении, соответствующими определенной симметрии молекулы. В тех случаях, когда это вращение практически невозможно, допустимо лишь кручение молекулы, сопровождаемое крутильными колебаниями. Если энергия крутильных колебаний достаточно велика, то молекула может, преодолев потенциальный барьер, перейти в соседнее равновесное состояние.

3°. Характер вращения молекулы как целого определяется пространственным расположением атомов в молекуле, т. е. формой молекулы, которая может быть охарактеризована подобно твердому телу тремя главными центральными моментами инерции:

$$I_i = \sum_k m_k r_{ki}^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где m_k — масса k -го атома в молекуле, а r_{ki} — его расстояние от соответствующей главной центральной оси.

Молекулу называют *сферическим волчком*, если $J_1 = J_2 = J_3$, *симметричным волчком*, если $J_1 = J_2 \neq J_3$ (ось 3 является осью молекулы), и *асимметричным волчком*, если все три момента инерции молекулы различны. К первому типу относятся молекулы P_4 , CH_4 , CCl_4 и т. н., ко второму типу — NH_3 , PCl_3 , BCl_3 и т. п., к третьему — H_2O и т. п.

4°. Энергетический спектр вращения двухатомной молекулы как целого при предположении, что расстояние между ядрами ее атомов неизменно и равно равновесному r_e , находят путем решения уравнения Шрёдингера для жесткого ротатора:

$$E_v = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I_e} J(J+1) = \hbar B J(J+1),$$

где $I_e = M r_e^2$ — момент инерции молекулы, M — приведенная масса молекулы, B — *вращательная постоянная молекулы*, J — *вращательное квантовое число*. Такой же вид имеет энергетический спектр вращения молекул типа сферического волчка. Проекция вектора полного момента J на заданное направление вращения молекулы определяется квантовым числом

$$M_J = \pm J, \pm(J-1), \dots, 0,$$

принимая при $(2J+1)$ значение. Если J проектируется на направление магнитного поля, то M_J имеет смысл магнитного квантового числа. В отсутствие внешнего поля всем $2J+1$ состояниям вращения молекулы соответствует энергия $E_v = \hbar B J(J+1)$. Следовательно, $2J+1$ — статистический вес (кратность вырождения) состояния вращения с энергией E_v . Число J подчиняется правилу отбора:

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0, \pm 1 & \text{при } \Lambda \neq 0, \\ \Delta J &= \pm 1 & \text{при } \Lambda = 0. \end{aligned}$$

Учет растяжения молекулы (нежесткости ротатора) при ее вращении видоизменяет энергетический вращательный спектр молекулы:

$$E_v = \hbar B J(J+1) + \hbar D_e J^2(J+1)^2,$$

где $D_e = \text{const} \ll B$ — постоянная, характеризующая нежесткость ротатора.

5°. Вектор J полного момента импульса молекулы равен сумме моментов импульса Y , характеризующего вращение молекулы, и векторов, характеризующих движение электронов в молекуле. Сумма этих векторов у трех типов двухатомных молекул имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= Y + \Omega & (\text{тип А}), \\ J + \Lambda + S &= K + S & (\text{тип Б}), \\ J &= Y + \Omega & (\text{тип В}). \end{aligned}$$

Вращательная энергия молекулы $E_v = \frac{Y^2}{2I_e}$ в этих трех случаях принимает соответственно значения:

$$E_v = hB[J(J+1) - \Omega^2] \quad (\text{тип А}),$$

$$E_v = hB[K(K+1) - \Lambda^2] \quad (\text{тип Б}),$$

$$E_v = hB[J(J+1) - \Omega^2] \quad (\text{тип В}).$$

Квантовые числа J и K удовлетворяют условиям $J \geq \Omega$ и $K \geq \Lambda$.

6°. При вращении молекулы возникают внутримолекулярное магнитное поле, в котором вырожденные термы, отвечающие значениям $\pm\Lambda$, расщепляются на два — положительный и отрицательный. Снятие вырождения имеет место только при $\Lambda > 0$ (при $\Lambda = 0$ вырождения нет) и называется Λ -раздвоением.

7°. Волновые функции, характеризующие вращательные состояния, соответствующие данному электронному состоянию в молекуле, представляются в виде $\Psi = \Psi_e \Psi_v$, где Ψ_e — электронная волновая функция, а Ψ_v — вращательная волновая функция. Каждая из функций Ψ_e и Ψ_v может быть отрицательной или положительной в зависимости от того, изменяется или нет знак функции Ψ_e при перемене знака координат всех электронов и ядер и знак функции Ψ_v при перемене знака координат одних ядер. Функции Ψ_v , отвечающие четным значениям J , являются положительными, а нечетным — отрицательными. В случае положительной электронной функции Ψ_{e+} все вращательные термы с четными J положительны:

$$\Psi_+ = \Psi_{e+} \Psi_0, \Psi_{e+} \Psi_2, \Psi_{e+} \Psi_4, \dots, \Psi_{e+} \Psi_{2n}.$$

Термы, отвечающие нечетным J , являются отрицательными:

$$\Psi_- = \Psi_{e+} \Psi_1, \Psi_{e+} \Psi_3, \Psi_{e+} \Psi_5, \dots, \Psi_{e+} \Psi_{2n+1}.$$

Для отрицательной электронной функции Ψ_{e-} четным J соответствуют отрицательные вращательные термы:

$$\Psi_- = \Psi_{e-} \Psi_0, \Psi_{e-} \Psi_2, \dots, \Psi_{e-} \Psi_{2n},$$

а нечетным J — положительные вращательные термы

$$\Psi_+ = \Psi_{e-} \Psi_1, \Psi_{e-} \Psi_3, \Psi_{e-} \Psi_5, \dots, \Psi_{e-} \Psi_{2n+1}.$$

Таким образом, из двух соседних вращательных термов, соответствующих одному и тому же электрон-

ному состоянию молекулы (Σ , P , Δ и т. д.), один — положительный, а другой — отрицательный.

8°. В случае двухатомных молекул, состоящих из одинаковых атомов, электронные волновые функции ψ_s и соответствующие им электронные термы могут быть не только положительными или отрицательными, но и четными или нечетными ψ_{sg} и ψ_{su} . Для таких молекул различают *симметричные (s) термы*, к которым относятся все положительные и четные, а также отрицательные и нечетные термы, и *антисимметричные (a) термы*, к которым относят все отрицательные и четные, а также положительные и нечетные термы. При излучении и поглощении света комбинировать могут только положительные термы с отрицательными, а также только симметричные или только антисимметричные термы. Ввиду невозможности комбинации вращательных термов в молекулах с одинаковыми ядрами вращательные спектры у одноизотопных молекул вида X_2 отсутствуют.

В силу запрета комбинаций симметричных термов с антисимметричными, вращательные термы молекул с одинаковыми ядрами разбиваются на две взаимно некомбинирующие группы. Учет ядерного спина и свойств симметрии полной волновой функции молекулы приводит к образованию двух систем термов.

Термы, имеющие большой статистический вес, называют *ортотермами*, а термы, имеющие меньший статистический вес, — *паратермами*. Например, в случае молекулы водорода H_2 ортотермами являются антисимметричные вращательные термы молекулы с нечетными J , а паратермами — симметричные вращательные термы с четными J . В первом случае суммарный спин двух ядер (двух протонов) равен 1, а во втором — 0. Статистический вес ортосостояния в 3 раза больше статистического веса парасостояния. Это различие проявляется, в частности, в соотношении интенсивностей спектральных линий комбинационного рассеяния света, при котором разрешены переходы $\Delta J = \pm 2$, т. е. между соседними орто- или паратермами. Две модификации водорода, состоящие из молекул в орто- и парасостояниях называют *ортоводородом* и *параводородом*.

9°. Энергетический спектр молекулы типа симметричного волчка:

$$E_J = hBJ(J+1) + h(A-B)K^2,$$

где $A = \frac{h}{4\pi I_0}$, $B = \frac{h}{4\pi I_1}$, а I_0 и I_1 — моменты инерции

молекулы относительно ее оси и относительно осей, перпендикулярных оси молекулы, а вращательные квантовые числа J и K принимают значения: $K = 0, 1, 2, \dots$ и $J = K, K + 1, \dots$.

6. ЭЛЕКТРОННО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. Изменение электронной энергии E_e молекулы, как правило, сопровождается одновременным изменением колебательной (E_k) и вращательной (E_v) энергий молекулы, причем $\Delta E_e \ll \Delta E_k \ll \Delta E_v$. При этом наблюдаются *электронно-колебательно-вращательные молекулярные спектры*, которые сокращенно называют *электронными*, или *электронно-колебательными спектрами*. Они находятся в видимой и ультрафиолетовой областях и имеют вид системы полос, состоящих из множества тесно расположенных спектральных линий. Каждой полосе при заданном значении $\Delta E_e = h\nu_e$ соответствует свое значение ΔE_k , а каждой спектральной линии в этой полосе — определенное значение ΔE_v .

2°. Колебательная структура электронного спектра двухатомной молекулы описывается *формулой Деландра*:

$$\nu_{\text{эк}} = \nu_e + \nu' \left(v' + \frac{1}{2} \right) \left[1 - x' \left(v' + \frac{1}{2} \right) \right] - \nu \left(v + \frac{1}{2} \right) \left[1 - x \left(v + \frac{1}{2} \right) \right],$$

или

$$\nu_{\text{эк}} = \nu_{00} + \nu' \nu' (1 - x') - \nu' x' \nu'^2 - \nu \nu (1 - x) + \nu x \nu^2,$$

где

$$\nu_{00} = \nu_e + \frac{\nu'(1-x')}{2} - \frac{\nu(1-x)}{2}.$$

Собственные частоты колебаний молекулы ν и коэффициенты ангармоничности x рассчитываются по формулам для верхнего (ν' , x') и нижнего (ν , x) электронных состояний молекулы, соответствующих рассматриваемому переходу $\Delta E_a = h\nu_e$.

Колебательные квантовые числа $\nu' = 0, 1, 2, \dots$ и $\nu = 0, 1, 2, \dots$ также относятся к вышеуказанным двум разным электронным состояниям молекулы. В отличие от гармонического осциллятора, для которого действует правило отбора $\Delta\nu = \pm 1$, возможны переходы между колебательными уровнями молекулы со всевозможными значениями разности $\Delta\nu = \nu' - \nu$. Частота ν_{00} соответствует переходу $\nu' = 0 \leftrightarrow \nu = 0$.

3°. Полосы, выражаемые формулой Деландра, разбиваются на поперечные и продольные серии полос. Частоты спектра, соответствующие $\nu = \text{const}$ (т. е. фиксированному нижнему уровню перехода), образуют *поперечную серию Деландра*; они характерны для спектров поглощения молекул. Частоты, соответствующие $\nu' = \text{const}$ (фиксированному верхнему уровню перехода), образуют *продольную серию Деландра*, характерную для спектров испускания и флуоресценции.

Частоты поперечных и продольных серий Деландра удовлетворяют формулам:

$$\nu_{\text{попер}} = \nu_{0\nu} + \nu'\nu[1 - x'(1 + \nu)];$$

$$\nu_{\text{прод}} = \nu_{0\nu'} - \nu'\nu[1 - x'(1 + \nu)];$$

где $\nu_{0\nu} = \nu_{00} - \nu\nu[1 - x(1 + \nu)]$,

$$\nu_{0\nu'} = \nu_{00} - \nu'\nu[1 - x'(1 + \nu)].$$

Частота ν_{00} нулевой линии поперечной серии ($\nu' = 0$) и нулевой продольной серии ($\nu = 0$) не совпадает с ν_0 , вследствие существования нулевой энергии колебаний молекулы и различия частот ν и ν' этих колебаний.

4°. В электронно-колебательных спектрах полосы, соответствующие различным значениям $\Delta\nu = \nu' - \nu$, имеют сравнимую интенсивность в большом диапазоне $\Delta\nu$. Это связано с тем, что вероятности переходов в электронных спектрах определяются изменением электронной конфигурации молекулы.

В случае незапрещенного электронного перехода возможны любые значения $\Delta\nu$. Электронные переходы в молекулах совершаются настолько быстро, что за время переходов не успевают существенно измениться ни расстояния между ядрами в молекуле, ни их импульсы. Электронные переходы происходят при практически постоянном расстоянии между ядрами. Такой стационарности внешних условий в течение перехода

соответствует большая его вероятность, а значит, и интенсивность соответствующих спектральных линий (*принцип Франка—Кондона*).

5°. Различие частот собственных колебаний молекул изотопов является причиной *колебательного изотопического эффекта* в электронно-колебательных спектрах молекул. Различие моментов инерции изотопных молекул приводит к *вращательному изотопическому эффекту*.

7. ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. *Вращательно-колебательные спектры молекул* образуются при изменении колебательного состояния, которое практически всегда сопровождается изменением их вращательного состояния. Частоты вращательного спектра по порядку величины в 100—1000 раз меньше частот колебательного спектра. В результате наложения на колебательные частоты малых вращательных частот линии колебательного спектра превращаются в *полосы*, представляющие собой группы вращательных линий. Так возникает *линейчато-полосатая структура* вращательно-колебательного спектра. Поскольку $E_e \gg E_v$, то на спектр, соответствующий электронным переходам, вращение молекулы практически не влияет.

2°. Частота $\nu_{вк}$ вращательно-колебательного спектра в пренебрежении взаимодействием колебаний с вращением и с учетом неизменности электронной энергии молекулы:

$$\nu_{вк} = \nu_v + \nu_k = \frac{E'_v - E_v}{h} + \frac{E'_k - E_k}{h},$$

где штрихами обозначены верхние энергетические состояния в каждом из переходов.

3°. *Колебательная (полосатая) структура* вращательно-колебательного спектра двухатомных молекул характеризуется частотами

$$\nu_k = \nu(1 - x)(\nu' - \nu) - \nu x(\nu'^2 - \nu^2),$$

где $\nu' - \nu = \Delta\nu$ — разность колебательных квантовых чисел верхнего и нижнего уровней перехода. Структура имеет вид серий линий. Номер серии определяется значением ν для начального уровня. Например, нуле-

вая серия спектра поглощения ($\nu = 0$) содержит следующие частоты колебаний:

$$\nu_{0\nu'} = \nu[(1-x)\nu' - x\nu'^2],$$

где $\nu' = 1, 2, 3, \dots$, т. е. $\nu_{01} = \nu(1-2x)$, $\nu_{02} = 2\nu(1-3x)$, $\nu_{03} = 3\nu(1-4x)$ и т. д.

Расстояния между соседними спектральными линиями этой серии, а также и всех других убывает с ростом $\nu' - \nu$. Линии каждой серии сходятся к границе, соответствующей диссоциации молекулы.

4°. *Вращательная структура* вращательно-колебательного спектра в предположении жесткости молекулы ($D_e = 0$) характеризуется частотами:

$$\nu_B = B[J'(J' + 1) - J(J + 1)].$$

Для молекул, находящихся в Σ -состояниях, в соответствии с правилами отбора для вращательного квантового числа $\Delta J = \pm 1$ получают следующие две группы линий:

а) *положительная*, или *R-ветвь* полосы, для которой $J' = J + 1$ и

$$\nu_{KB} = \nu_{+1} = \nu_K + 2B(J + 1), \text{ где } J = 0, 1, 2, \dots;$$

б) *отрицательная*, или *P-ветвь* полосы, для которой $J' = J - 1$ и

$$\nu_{KB} = \nu_{-1} = \nu_K - 2BJ,$$

где $J = 1, 2, \dots$.

R- и *P*-ветви данной полосы образуют ряд равноотстоящих друг от друга линий с выпадающей линией ν_K , называемой нулевой линией полосы. Расстояние между соседними линиями составляет $\Delta\nu = 2B$.

5°. При больших значениях квантовых чисел ν и J проявляется зависимость вращательной энергии молекулы от обоих квантовых чисел:

$$E_B = h[B_v J(J + 1) - D_v J^2(J + 1)^2],$$

где $B_v = B - \alpha\nu$ и $D_v = D_e + \beta\nu$, причем $\alpha \ll B$ и $\beta \ll D_e$.

8. КОМБИНАЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. *Явление комбинационного рассеяния* состоит в том, что в спектре света, рассеянного каким-либо жидким или твердым телом, наблюдаются наряду с частотами излучения источника света также смещенные частоты. Линии спектра, которым соответствуют $\nu_c < \nu_0$

называют *стоксовыми*, линии с $\nu_a > \nu_0$ — *антистоксовыми*, где ν_0 — первоначальная частота света. Линии ν_c, ν_a образуют *комбинационный спектр молекул*.

2°. Простейшее объяснение возникновения комбинационного рассеяния сводится к следующим двум схемам взаимодействия кванта с рассеивающей молекулой:

$$h\nu_0 + E(1) \rightarrow h\nu_c + E(2),$$

$$h\nu_0 + E(2) \rightarrow h\nu_a + E(1),$$

где $E(1)$ и $E(2)$ — энергии колебательных состояний молекулы, причем $E(1) < E(2)$. В первом случае за счет энергии фотона $h\nu_0$ молекула переходит в более высокое колебательное энергетическое состояние и возникает рассеянный фотон с меньшей частотой ν_c . Во втором случае взаимодействие кванта с возбужденной молекулой приводит к появлению рассеянного фотона с большей частотой ν_a , равной

$$\nu_a = \nu_c + \frac{E(2) - E(1)}{h},$$

и переходу молекулы в более низкое колебательное состояние.

3°. Наблюдаются спектры комбинационного рассеяния колебательные, вращательные, а также вращательно-колебательные. Кроме того, возможен спектр комбинационного рассеяния, в котором разность частот соответствует энергии электронного возбуждения молекулы. В спектрах комбинационного рассеяния, в отличие от обычных спектров, правила отбора могут не соблюдаться и заменяются новыми. Так, для электронных спектров иногда наблюдаются комбинационные линии, нарушающие запрет $\Delta\Sigma = 0$, для вращательных спектров возникает правило отбора $\Delta J = 0, \pm 2$.

9. СПЛОШНЫЕ И ДИФФУЗНЫЕ СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

1°. *Сплошные (истинно непрерывные) спектры молекул* характеризуются тем, что их нельзя разделить на отдельные линии или полосы даже при высокой разрешающей способности спектрального прибора. Сплошные спектры молекул связаны с переходом молекулы из дискретного состояния с $E < 0$ в непрерывное состояние с $E > 0$.

Этому переходу соответствует как ионизация молекул, так и ее диссоциация на ионы или нейтральные атомы. Диссоциация молекулы может быть вызвана увеличением колебательной энергии молекулы до таких пределов, при которых колебательным переходам в молекуле будут соответствовать квантовые числа $\nu \geq \nu_{\text{макс}}$. В результате таких переходов молекула, перейдя в неустойчивое возбужденное состояние, уже не возвращается в исходное состояние, а диссоциирует. Диссоциация молекулы может быть также вызвана соударением ее с достаточно быстрой частицей (например, нейтроном), а также поглощением молекулой кванта излучения, обладающего достаточной энергией (*фотодиссоциация*).

2°. Возникновение сплошного спектра может быть также вызвано нагреванием вещества. В результате нагревания молекулы приобретают большие скорости движения. Возникающее при этом доплеровское уширение частот спектральных линий приводит к перекрыванию линий и даже слиянию отдельных линий в полосы. Другой причиной превращения дискретного спектра молекулы в непрерывный является ударное уширение линий, проявляющееся преимущественно во вращательных спектрах и вызываемое существенным уменьшением времени жизни молекулы в возбужденном состоянии и соответственным увеличением ширины линии. В результате ударного уширения вращательные линии в полосе могут перекрыться настолько, что исчезнет ее вращательная структура, а при еще более высоких давлениях и температурах вещества ударное уширение может привести и к перекрыванию отдельных полос.

3°. *Диффузные спектры молекул* характеризуются размытостью полос, вызванной сильным уширением вращательных линий даже при обычных давлениях и температурах. Соответствующие этому уширению времена жизни молекулы в возбужденном состоянии на один-два порядка меньше периода вращения молекулы, в результате чего исчезает квантованность вращений и связанная с ней дискретная вращательная структура полос спектра. Это явление вызывается так называемой *преддиссоциацией* молекулы. Отличие ее от диссоциации состоит в том, что последняя происходит непосредственно из дискретного устойчивого в неустойчивое состояние молекулы, характеризуемое частью потенциальной кривой, соответствующей отталкиванию

атомов в молекуле, тогда как преддиссоциация возникает из возбужденного состояния молекулы. Преддиссоциация происходит в два этапа: сначала имеет место переход молекулы из нормального в возбужденное состояние, а затем происходит переход молекулы из возбужденного состояния не в нормальное, а в неустойчивое.

Вероятности перехода молекулы в нормальное состояние с испусканием кванта излучения и перехода преддиссоциацией в неустойчивое состояние определяют время жизни молекулы в возбужденном состоянии. При большой вероятности безызлучательного перехода время жизни молекулы в возбужденном состоянии оказывается малым и соответствующая ширина спектральных линий — большой.

10. МОЛЕКУЛЯРНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ

1°. Изучение электронных спектров молекул дает сведения того же характера, что и изучение атомных спектров. Дополнительными являются сведения об электронных уровнях в молекуле, о распределении плотности электронов в молекулах и природе химических связей. Особый интерес для исследования структуры молекул представляет изучение колебательных и вращательных спектров молекул.

2°. Колебательные и вращательные спектры молекул дают сведения о пространственном расположении атомов в молекулах, о возможных их равновесных конфигурациях, о распределении молекул по этим конфигурациям. Знание формы молекул позволяет понять природу валентных связей в них и тем самым выяснить реакционные способности молекул. Вращательные спектры обычно находятся в инфракрасной области, и обнаружение и исследование их требует специальной техники инфракрасной спектроскопии.

3°. Спектроскопия комбинационного рассеяния благодаря простоте методов обладает рядом преимуществ перед инфракрасной спектроскопией. Из комбинационных спектров находят частоты собственных колебаний молекул (по колебательным спектрам), моменты инерции и форма молекул (по вращательным спектрам), а также те структурные изменения, которые претерпевают молекулы при изменениях агрегатного состояния вещества.

4°. Область молекулярной спектроскопии — *радиоспектроскопия* — основана на эффекте Зеемана. Радиоспектроскопия исследует, в отличие от оптической спектроскопии, не спектральные линии, обязанные переходам с какого-либо уровня на подуровни другого уровня, а спектральные линии, вызванные переходами между самими этими подуровнями. Частоты этих спектральных линий лежат обычно в области ультракоротких радиоволн (от десятков МГц). Спектральная картина в радиоспектрах молекул оказывается во много раз проще, чем в оптических спектрах, что имеет большое значение для анализа сложных молекулярных спектров, которые в оптической области состоят из многих тысяч линий. Это обстоятельство, наряду с высокой чувствительностью радиоспектроскопических методов, во много раз превышающей чувствительность оптических методов, обеспечивает радиоспектроскопии большие преимущества в области молекулярных спектров.

11. ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

1°. Ионизация, т. е. отрыв электронов от атомов или молекул, вызывается многими причинами. *Термическая ионизация* вызвана увеличением энергии теплового движения атомов или молекул и происходит при нагревании вещества в результате соударений атомов или молекул с достаточной энергией. *Ионизация электронным или ионным ударом* обычно происходит в сильных электрических полях, в которых ионы или электроны приобретают достаточную для ионизации энергию, например, при газовом разряде. К этому же виду относится ионизация, вызываемая корпускулярными излучениями (альфа-частицами, протонами, дейтронами и т. д.) при их прохождении в веществе. *Фотоионизация* вызывается поглощением атомами и молекулами квантов электромагнитного излучения с достаточной энергией.

2°. Энергия ионизации атома зависит от величины заряда его ядра и от того, из какого электронного слоя атома выбивается электрон, возрастая приблизительно квадратично с увеличением атомного номера Z и уменьшаясь по мере увеличения номера слоя n . Численно энергия ионизации равна энергии связи электрона с атомом на данном уровне.

3°. *Степенью ионизации газа* называют величину α , равную отношению числа ионизированных атомов к их общему числу в объеме газа. В условиях термодинамического равновесия степень термической ионизации газа подсчитывают по *формуле Саха*:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 2 \frac{g_i}{g_a} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{kT}{p} \exp\left(-\frac{e\varphi_i}{kT}\right),$$

где m — масса электрона, p — сумма парциальных давлений атомов, ионов и электронов, T — термодинамическая температура, g_a и g_i — статистические веса нейтрального атома и иона, т. е. кратность вырождения их состояния (обычно основного), k и h — постоянные Больцмана и Планка, e — элементарный заряд, φ_i — потенциал ионизации. Формула Саха приближенная, так как не учитывает распределения электронов по различным состояниям в атомах газа, а также процессов возбуждения атомов без ионизации и безызлучательных переходов.

4°. В случае молекул, наряду с ионизацией атомов, может иметь место *диссоциативная ионизация*, т. е. распад молекулы с одновременной ионизацией продуктов диссоциации. Диссоциативная ионизация имеет место преимущественно в случае многоатомных молекул. Возникающие при этом ионы могут соединяться с нейтральными атомами или молекулами, приводя к образованию комплексных ионов. Степень ионизации при данной энергии ионизирующих частиц связана с распределением атомов и молекул по энергетическим состояниям.

5°. Фотоионизация происходит при энергиях фотонов, равных или превышающих энергию ионизации:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \geq e\varphi_i,$$

ν — частота фотона. *Красная граница фотоионизации*:

$$\nu_0 = \frac{e\varphi}{h}.$$

Фотоионизация жесткими (гамма, рентгеновскими) фотонами связана, главным образом, с отрывом от атомов электронов, входящих в глубокие электронные оболочки, фотоионизация оптическими фотонами — с отрывом от атома внешних, валентных электронов. Возможны также процессы *фотонейтрализации отрицательных ионов*, связанные с отрывом от них внешних, избыточных электронов.

Раздел VII

ОСНОВЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Глава 1

АТОМНОЕ ЯДРО

1. СОСТАВ И РАЗМЕРЫ АТОМНЫХ ЯДЕР

1°. Все атомные ядра состоят из элементарных частиц, называемых *протонами* и *нейтронами*. Протоны имеют положительный заряд, равный элементарному заряду, нейтроны электрически нейтральны. Протон и нейтрон считают двумя различными зарядовыми состояниями одной частицы, именуемой *нуклоном*.

2°. Количество протонов в ядре называют *зарядовым числом* Z (*атомным номером, порядковым номером*); оно равно атомному номеру соответствующего химического элемента в Периодической системе Д. И. Менделеева. К настоящему времени известны ядра с Z от 1 (водород) до $Z = 116$. Количество нейтронов в ядре обозначается N . Для большинства ядер $N \geq Z$ (за исключением ${}^1_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$ и других *нейтронодефицитных ядер*).

Для легких ядер отношение $\frac{N}{Z} \approx 1$; для ядер элементов

в конце периодической системы $\frac{N}{Z} \approx 1,6$.

3°. Полное число нуклонов в ядре $A = N + Z$ называют *массовым числом ядра*. Разновидности атомов одного и того же химического элемента, ядра которых содержат одно и то же число Z протонов, но различное число N нейтронов, называют *изотопами*. Так же называют сами ядра этих атомов. Атомные ядра, у которых одинаковы массовые числа A , но различны зарядовые числа Z , называют *изобарами*. Ядра-изобары называют *зеркальными ядрами*, если число протонов в одном из них равно числу нейтронов в дру-

гом ($Z_1 = N_2$, $Z_2 = N_1$ и $Z_1 + N_1 = Z_2 + N_2$). Конкретное атомное ядро с заданными значениями Z и A называют *нуклидом* и обозначают AX или ${}_Z^AX$, где X — символ химического элемента с порядковым номером Z в Периодической системе Менделеева.

4°. К началу XXI века открыто ≈ 3000 атомных ядер. Всего в границах ядерной стабильности по оценкам может быть около 7000 ядер (устойчивых ядер около 300, остальные — неустойчивые (радиоактивные)). Устойчивые изобары большей частью встречаются *парами*. Устойчивые изобарные пары, за исключением пар с $A = 113$ и 123, имеют четные A , Z и N , причем для членов пары Z отличаются на две единицы.

Известно 59 устойчивых изобарных *пар* (табл. VII.1) и 5 изобарных *триад* (табл. VII.2).

Таблица VII.1

A	Пара		A	Пара		A	Пара	
36	${}_{16}\text{S}$	${}_{18}\text{Ar}$	104	${}_{44}\text{Ru}$	${}_{46}\text{Pd}$	152	${}_{62}\text{Sm}$	${}_{64}\text{Gd}$
40	${}_{18}\text{Ar}$	${}_{20}\text{Ca}$	106	${}_{46}\text{Pd}$	${}_{48}\text{Cd}$	154	${}_{62}\text{Sm}$	${}_{64}\text{Gd}$
46	${}_{20}\text{Ca}$	${}_{22}\text{Ti}$	108	${}_{46}\text{Pd}$	${}_{48}\text{Cd}$	156	${}_{64}\text{Gd}$	${}_{66}\text{Dy}$
48	${}_{20}\text{Ca}$	${}_{22}\text{Ti}$	110	${}_{46}\text{Pd}$	${}_{48}\text{Cd}$	158	${}_{64}\text{Gd}$	${}_{66}\text{Dy}$
54	${}_{24}\text{Cr}$	${}_{26}\text{Fe}$	112	${}_{48}\text{Cd}$	${}_{50}\text{Sn}$	160	${}_{64}\text{Gd}$	${}_{66}\text{Dy}$
58	${}_{26}\text{Fe}$	${}_{28}\text{Ni}$	113	${}_{48}\text{Cd}$	${}_{49}\text{In}$	162	${}_{66}\text{Dy}$	${}_{68}\text{Er}$
64	${}_{28}\text{Ni}$	${}_{30}\text{Zn}$	114	${}_{48}\text{Cd}$	${}_{50}\text{Sn}$	164	${}_{66}\text{Dy}$	${}_{68}\text{Er}$
70	${}_{30}\text{Zn}$	${}_{32}\text{Ge}$	116	${}_{48}\text{Cd}$	${}_{50}\text{Sn}$	168	${}_{68}\text{Er}$	${}_{70}\text{Yb}$
74	${}_{32}\text{Ge}$	${}_{34}\text{Se}$	120	${}_{50}\text{Sn}$	${}_{52}\text{Te}$	170	${}_{68}\text{Er}$	${}_{70}\text{Yb}$
76	${}_{32}\text{Ge}$	${}_{34}\text{Se}$	122	${}_{50}\text{Sn}$	${}_{52}\text{Te}$	174	${}_{70}\text{Yb}$	${}_{72}\text{Hf}$
78	${}_{34}\text{Se}$	${}_{36}\text{Kr}$	123	${}_{51}\text{Sb}$	${}_{52}\text{Te}$	176	${}_{70}\text{Yb}$	${}_{72}\text{Hf}$
80	${}_{34}\text{Se}$	${}_{36}\text{Kr}$	126	${}_{52}\text{Te}$	${}_{54}\text{Xe}$	180	${}_{72}\text{Hf}$	${}_{74}\text{W}$
82	${}_{34}\text{Se}$	${}_{36}\text{Kr}$	128	${}_{52}\text{Te}$	${}_{54}\text{Xe}$	184	${}_{74}\text{W}$	${}_{76}\text{Os}$
84	${}_{36}\text{Kr}$	${}_{38}\text{Sr}$	132	${}_{54}\text{Xe}$	${}_{56}\text{Ba}$	186	${}_{74}\text{W}$	${}_{76}\text{Os}$
86	${}_{36}\text{Kr}$	${}_{38}\text{Sr}$	134	${}_{54}\text{Xe}$	${}_{56}\text{Ba}$	190	${}_{76}\text{Os}$	${}_{78}\text{Pt}$
92	${}_{40}\text{Zr}$	${}_{42}\text{Mo}$	138	${}_{56}\text{Ba}$	${}_{58}\text{Ce}$	192	${}_{76}\text{Os}$	${}_{78}\text{Pt}$
94	${}_{40}\text{Zr}$	${}_{42}\text{Mo}$	142	${}_{58}\text{Ce}$	${}_{60}\text{Nd}$	196	${}_{78}\text{Pt}$	${}_{80}\text{Hg}$
98	${}_{42}\text{Mo}$	${}_{44}\text{Ru}$	144	${}_{60}\text{Nd}$	${}_{62}\text{Sm}$	198	${}_{78}\text{Pt}$	${}_{80}\text{Hg}$
100	${}_{42}\text{Mo}$	${}_{44}\text{Ru}$	148	${}_{60}\text{Nd}$	${}_{62}\text{Sm}$	204	${}_{80}\text{Hg}$	${}_{82}\text{Pb}$
102	${}_{44}\text{Ru}$	${}_{46}\text{Pd}$	150	${}_{60}\text{Nd}$	${}_{62}\text{Sm}$			

Таблица VII.2

A	Триада			A	Триада		
50	${}_{22}\text{Ti}$	${}_{23}\text{V}$	${}_{24}\text{Cr}$	130	${}_{62}\text{Te}$	${}_{64}\text{Xe}$	${}_{66}\text{Ba}$
96	${}_{40}\text{Zr}$	${}_{42}\text{Mo}$	${}_{44}\text{Ru}$	136	${}_{64}\text{Xe}$	${}_{66}\text{Ba}$	${}_{68}\text{Ce}$
124	${}_{50}\text{Sn}$	${}_{62}\text{Te}$	${}_{84}\text{Xe}$				

5°. Ядра, состоящие из четного (нечетного) числа протонов и четного (нечетного) числа нейтронов, называют *четно-четными* (*нечетно-нечетными*). Ядра, состоящие из четного (нечетного) числа протонов и нечетного (четного) числа нейтронов, называют *четно-нечетными* (*нечетно-четными*).

6°. Ядра не имеют резко выраженной границы. Поэтому *радиус ядра* имеет условный смысл. Эмпирическая формула для радиуса ядра имеет вид

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad \text{где } R_0 = (1,2 - 1,5) \cdot 10^{-15} \text{ м.}$$

Объем ядра пропорционален числу нуклонов в нем. Плотность ядерного вещества постоянна для всех ядер, ее значение по порядку величины равно $\rho \approx 27 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$. Предположение, что ядра имеют сферическую форму, справедливо не всегда.

2. ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ЯДЕР. ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ

1°. *Энергией связи атомного ядра* ${}^A_Z\text{X}$ называют минимальную энергию, которая необходима для полного расщепления ядра на свободные протоны и нейтроны. В соответствии с законом взаимосвязи массы и энергии покоя

$$W_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}]c^2,$$

или

$$W_{\text{св}} = [ZM_{\text{H}} + (A - Z)m_n - M]c^2,$$

где M и $M_{\text{я}}$ — массы атома и его ядра, M_{H} — масса атома водорода ${}^1_1\text{H}$, m_p и m_n — массы протона и нейтрона,

c — скорость света в вакууме. Величину $\Delta m = \frac{W_{\text{св}}}{c^2}$ называют *дефектом массы ядра*.

Примечание. Иногда под дефектом массы понимают величину $\Delta = M - A$, где масса атома M выражена в а. е. м. Величину $f = \frac{\Delta}{A}$ называют соответственно *упаковочным коэффициентом*.

Обычно $W_{\text{св}}$ выражают в МэВ, а M , M_{α} , M_{H} , m_p и m_n — в атомных единицах массы ($1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{12}$ массы атома углерода $^{12}_6\text{C}$):

$$W_{\text{св}} = 931,5016(1,0072765Z + \\ + 1,0086650(A - Z) - M_{\alpha}),$$

или

$$W_{\text{св}} = 931,5016(1,0078250Z + \\ + 1,0086650(A - Z) - M).$$

2°. Отношение энергии связи ядра к числу содержащихся в нем нуклонов называют *удельной энергией*

связи ядра $w_{\text{св}} = \frac{W_{\text{св}}}{A}$. На рис. VII.1.1 показан общий

характер зависимости $W_{\text{св}}$ от массового числа A для стабильных ядер. Наиболее прочно связаны нуклоны в ядрах атомов химических элементов, находящихся в средней части Периодической системы Менделеева,

$w_{\text{св макс}} \approx 8,7 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$. Для ядер более тяжелых атомов

удельная энергия связи убывает с ростом массового числа A (например, для ядра урана $^{238}_{92}\text{U}$ $w_{\text{св}} = 7,6 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$).

Этим объясняется возможность выделения энергии при делении тяжелых ядер. В области малых значений A имеются острые «пики» удельной энергии связи: мак-

симумы соответствуют четно-четным ядрам (${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$), а минимумы — нечетно-нечетным ядрам (${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$). Возрастание $w_{\text{св}}$ с ростом A в этой области объясняет возможность получения энергии при образовании из легких ядер более тяжелых.

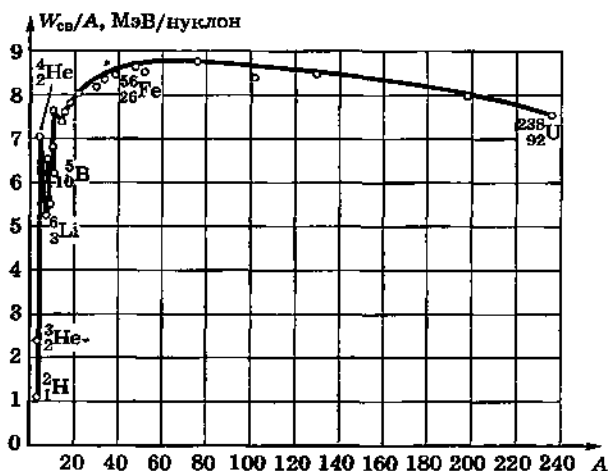


Рис. VII.1.1

3°. Ядро, имеющее наименьшую возможную энергию, равную $E_{\text{мин}} = -W_{\text{св}}$, называют находящимся в *основном состоянии*. Если ядро имеет энергию $E > E_{\text{мин}}$, то говорят о *возбужденном состоянии ядра*. Ядро в возбужденном метастабильном состоянии называют *изомером*. Случай $E = 0$ соответствует диссоциации ядра на составляющие его нуклоны.

4°. Между протонами в ядре действуют кулоновские силы отталкивания. Поэтому из факта существования устойчивых ядер следует, что между составляющими

его нуклонами действуют некоторые силы, связывающие их в ядро. Эти силы называют *ядерными силами*. Ядерные силы представляют собой одно из проявлений *сильного (цветового) взаимодействия*. Энергия ядерных сил и кулоновского взаимодействия протонов в ядре равна энергии связи. Ядерные силы обладают следующими свойствами:

а) *свойство зарядовой независимости*: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или между двумя нейтронами, или же между протоном и нейтроном, одинаковы. Отсюда вытекает, что ядерные силы имеют неэлектрическую природу;

б) *свойство насыщения*: каждый нуклон взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Это следует из характера зависимости энергии связи и дефекта массы от массового числа. При отсутствии насыщения должно было бы быть $W_{\text{св}} \sim A(A-1)$;

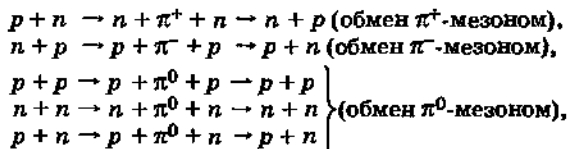
в) ядерные силы являются силами притяжения, а на очень малых расстояниях между нуклонами ($r \leq 5 \cdot 10^{-16}$ м) силы притяжения сменяются силами отталкивания;

г) ядерные силы являются короткодействующими, т. е. проявляются на расстояниях между нуклонами, сравнимых по порядку величины с размерами самих нуклонов. Эти расстояния называются *радиусом R действия ядерных сил* ($R \approx 1,5 \cdot 10^{-15}$ м);

д) ядерные силы имеют нецентральный характер, а их потенциал лишен сферической симметрии;

е) ядерные силы зависят от ориентации спинов взаимодействующих нуклонов.

5°. В *обменной теории ядерных сил* (Юкава Х., 1935) предполагается, что взаимодействие между нуклонами в атомном ядре осуществляется путем обмена виртуальными мезонами. Так, силы притяжения нуклонов объясняются обменом *π -мезонами*, происходящим по схемам:



где p и n — протон и нейтрон.

6°. Обменный механизм ядерных сил объясняет их короткодействующий характер. При этом существенно наличие у π -мезона отличной от нуля массы покоя. Согласно соотношению неопределенностей время обмена нуклонов π -мезонами не может превышать Δt , для которого

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

где $\Delta E = m_\pi c^2$ — энергия покоя π -мезона. Расстояние, на которое за время Δt может удалиться π -мезон от нуклона в ядре, даже двигаясь со скоростью, близкой к скорости света в вакууме, равно $R_0 \approx \frac{\hbar}{m_\pi c} \approx 1,2 \cdot 10^{-15}$ м,

т. е. примерно совпадает со значением радиуса ядра и по порядку величины совпадает с радиусом действия ядерных сил. (Для фотонов $m_\phi = 0$ и $R_0 = \infty$, т. е. электромагнитное поле имеет бесконечно большой радиус действия.)

С другой стороны, предполагая, что за время Δt π -мезон проходит расстояние R_0 , равное радиусу действия ядерных сил, можно подсчитать массу покоя π -мезона: $m_\pi = \frac{\hbar}{R_0 c} \approx 250 m_e$, где m_e — масса покоя электрона. Это согласуется со значениями масс π -мезонов.

3. МАГНИТНЫЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЯДЕР

1°. Нуклоны в ядре обладают орбитальным и спиновым магнитными и механическими моментами. Нуклоны являются фермионами, их спин равен $\frac{\hbar}{2}$. Орбитальный μ_l и спиновый μ_s магнитные моменты нуклонов равны:

$$\mu_l = \gamma_l l, \quad \mu_s = \gamma_s s, \quad \mu_l = \gamma_l l \hbar, \quad \mu_s = \gamma_s s \hbar,$$

где l и s — орбитальное и спиновое квантовые числа, а γ_l и γ_s — соответствующие *гиромагнитные отношения*, причем

$$\gamma_l \frac{\hbar}{\mu_N} = \begin{cases} 1 & \text{для протона,} \\ 0 & \text{для нейтрона,} \end{cases} \quad \gamma_s \frac{\hbar}{\mu_N} = \begin{cases} +5,585 & \text{для протона,} \\ -3,826 & \text{для нейтрона.} \end{cases}$$

Здесь $\mu_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,051 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ — так называемый

ядерный магнетон (m_p — масса протона).

2°. В ядерной физике *спином ядра* называют его полный момент импульса. Он геометрически складывается из полных моментов нуклонов, составляющих ядро (см. (7.1)). Соответственно внутренние квантовые числа нуклонов складываются алгебраически и дают суммарное целое число (0, 1, 2, 3, ...) при четном массовом

числе A и суммарное полуцелое число $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$

при нечетном A . В первом случае ядра подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, во втором — статистике Ферми—Дирака.

3°. Изложенное в п. 2° является следствием того, что в ядрах осуществляется сильная (jj) связь между спиновым и орбитальным моментами каждого нуклона. Поэтому каждый нуклон характеризуется полным моментом импульса:

$$j = l + s. \quad (7.1)$$

Спин J и магнитный момент μ ядра равны:

$$J = \sum_{i=1}^A j_i, \quad \mu = \gamma_J J, \quad |J| = \sqrt{J(J+1)} \hbar,$$

где γ_J — гиромагнитное отношение для ядра.

4°. Спины ядер не превышают нескольких $\hbar$, а магнитные моменты ядер — нескольких ядерных магнетонов $\mu_{\text{я}}$. Это свидетельствует о том, что спины и магнитные моменты протонов и нейтронов в ядре в основном взаимно компенсируются. Соответственно, спины и магнитные моменты четно-четных ядер равны нулю.

Магнитные моменты четно-нечетных и нечетно-четных ядер могут быть приближенно рассмотрены в *однонуклонной модели ядра*. В ней предполагается, что магнитные моменты таких ядер обусловлены движением одного «валентного» нуклона около остальной части ядра, состоящей из четного числа нуклонов, векторная

сумма орбитальных и спиновых моментов которых равна нулю. В этом случае

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\mu} = \gamma_l \mathbf{l} + \gamma_s \mathbf{s}.$$

Поскольку γ_l и γ_s у «валентного» нуклона различны, магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ этого нуклона не параллелен спину ядра $\mathbf{J}$. Вектор $\boldsymbol{\mu}$ прецессирует вокруг вектора $\mathbf{J}$, а его среднее значение, играющее роль проявляющегося в опытах эффективного магнитного момента ядра, равно составляющей вектора $\boldsymbol{\mu}$ вдоль направления вектора $\mathbf{J}$.

Магнитные моменты ядер по модулю равны:

$$\mu_{\text{н.ч.}} = \begin{cases} \frac{J^2 - 1,293J}{J+1} \mu_{\text{я}} & \text{для } l = J + \frac{1}{2}, \\ (J + 2,293) \mu_{\text{я}} & \text{для } l = J - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\mu_{\text{ч.н.}} = \begin{cases} \frac{1,913J}{J+1} \mu_{\text{я}} & \text{для } l = J + \frac{1}{2}, \\ -1,913 \mu_{\text{я}} & \text{для } l = J - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где индексы «н. ч.» и «ч. н.» соответствуют нечетно-четным и четно-нечетным ядрам.

5°. Электрический заряд нуклонов (протонов) в ядре в общем случае распределен асимметрично. Мерой отклонения этого распределения от сферической симметрии служит *квадрупольный электрический момент ядра* Q_0 . Распределение заряда в ядре приближенно представляют в виде эллипсоида вращения. Квадрупольный момент ядра

$$Q_0 = \frac{2}{5} Ze(b^2 - a^2),$$

где b и a — полуоси эллипсоида. Для ядра, вытянутого вдоль направления спина, соответствующего полуоси b , $Q_0 > 0$; для ядра, сплюснутого в этом направлении, $Q_0 < 0$. Для сферического распределения заряда в ядре $Q_0 = 0$; это имеет место при спине ядра, равном 0 или $1/2$ (в единицах $\hbar$).

6°. Дипольный электрический момент ядра в основном состоянии равен нулю.

7°. Во внешнем магнитном поле происходит квантование спина ядра (*пространственное квантование*) и каждый энергетический уровень расщепляется на $2J + 1$ подуровень (*зеemanовское расщепление ядерных уровней*).

Избирательное поглощение электромагнитного излучения веществом, связанное с переходами его ядер между различными *зеemanовскими* подуровнями энергии, называют ядерным *парамагнитным резонансом*. Резонансные частоты для переходов, подчиняющихся правилу отбора для магнитного (внутреннего) квантового числа m_J , $\Delta m_J = \pm 1$, равны:

$$\nu_{\text{япр}} = \frac{g\mu_J B}{h},$$

где g — безразмерный коэффициент, аналогичный множителю Ланде для атома, μ_J — ядерный магнетон, B — индукцию внешнего постоянного магнитного поля, h — постоянная Планка.

Частоты ядерного парамагнитного резонанса при одном и том же значении B по порядку величины в $\frac{\mu_B}{\mu_J} \approx 10^4$ раз меньше частот электронного парамагнит-

ного резонанса и лежат в области 10^5 — 10^6 Гц для обычно применяемых магнитных полей.

Спин-решеточная релаксация ядерных спинов ввиду слабого взаимодействия ядерных спинов с решеткой имеет периоды, достигающие многих часов; они в тысячи раз больше, чем в электронном парамагнитном резонансе.

8°. Если ядро имеет квадрупольный электрический момент, то вследствие его взаимодействия с внутримолекулярным или внутрикристаллическим электрическим полем возникает *штарковское расщепление уровней ядра на ряд подуровней*. Избирательное поглощение веществом электромагнитного излучения, связанное с переходами его ядер между *штарковскими* подуровнями энергии, называют *ядерным квадрупольным резонансом*. Ядерный квадрупольный резонанс (ЯКР) являет-

ся эффективным методом изучения структуры молекул и кристаллов на основе определения положения и интенсивностей линий ЯКР.

4. МОДЕЛИ ЯДРА

А. КАПЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

1°. Ввиду незнания точного характера сил, действующих в атомном ядре, для изучения и теоретического предсказания его свойств пользуются *моделями ядра*, основанными на внешней аналогии свойств атомных ядер со свойствами жидкой капли, электронной оболочки атома и т. д. Соответственно этому модели ядер называются капельной, оболочечной и т. д.

2°. В *капельной модели ядра* силы, действующие в ядре, предполагаются аналогичными молекулярным силам в капле жидкости. Энергия притяжения нуклонов, обусловленная ядерными силами, соответствует энергии молекулярного притяжения молекул жидкости в капле. Второй вклад в энергию ядра дает кулоновское отталкивание одноименно заряженных протонов, растущее с увеличением их числа в ядре; это соответствует снижению устойчивости капли с ростом ее массы, т. е. числа молекул в капле. Нуклоны, находящиеся на поверхности ядра, испытывают одностороннее притяжение ядерными силами, которое характеризуется коэффициентом «поверхностного натяжения» σ .

3°. Полная положительная энергия связи ядра выражается полуэмпирической *формулой Вейцеккера*:

$$\Delta W = \alpha_1 A - \alpha_2 A^{2/3} - \alpha_3 Z^2 A^{-1/3} - \alpha_4 (A - 2Z)^2 A^{-1} + \alpha_5 A^{-3/4} \delta(Z, N),$$

где $\alpha_1 = 15,75$ МэВ, $\alpha_2 = 17,8$ МэВ, $\alpha_3 = 0,71$ МэВ, $\alpha_4 = 23,7$ МэВ, $\alpha_5 = 34$ МэВ, A — массовое число, Z — зарядовое число,

$$\delta(Z, N) = \begin{cases} +1 & \text{для четно-четных ядер;} \\ 0 & \text{для четно-нечетных ядер;} \\ -1 & \text{для нечетно-нечетных ядер.} \end{cases}$$

Первый член указывает на пропорциональность энергии связи величине A , второй — на уменьшение ΔW (за счет одностороннего притяжения поверхностных нуклонов ядра-капли) на величину, пропорциональную поверхности капли, т. е. $A^{2/3}$ (поверхностное натяжение). Третий член учитывает кулоновское отталкивание протонов, пропорциональное $\frac{Z^2}{r}$, т. е. $Z^2 A^{-1/3}$.

Четвертый член отражает тенденцию к симметрии в строении ядер, стремление к равенству в них числа протонов и нейтронов и учитывает отклонение от равенства $A = 2Z$ в ту или иную сторону. Этот член не вытекает из капельной модели и появляется из-за подчинения нуклонов принципу Паули. Последний член вводится для учета различной устойчивости четно-четных, нечетно-четных и нечетно-нечетных ядер. Для этих типов ядер последовательно убывает их устойчивость. Характер последнего члена связан с зависимостью ядерных сил от ориентации спинов нуклонов. Из сопоставлений формулы Вейцзеккера с экспериментом следует ее универсальный характер. В частности, из нее следует для всех ядер значение радиуса ядра: $R = (1,3 \text{ } 1,5) \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Б. ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

1°. В оболочечной модели ядра принимается, что энергетическая структура (уровни энергии нуклонов) ядра подобна энергетической структуре электронной оболочки атома.

Сильное взаимодействие нуклонов в ядре и малый радиус этого взаимодействия позволяют рассматривать нуклоны движущимися независимо друг от друга в поле, обладающем сферически симметричным потенциалом. При этом нуклоны могут находиться в различных энергетических состояниях. Основному состоянию ядра должно соответствовать заполнение всех нижних уровней. Потеря нуклоном энергии при межнауклонных столкновениях не может перевести его в более низкое состояние, ибо все они заняты в соответствии с принципом Паули. Это приводит к тому, что длина свободного пробега нуклона в невозбужденном ядре становится больше радиуса ядра. Это означает возможность рассматривать нуклоны в рамках данной модели невзаимодействующими и несталкивающимися. Движение

невзаимодействующих нуклонов в поле сферического портенциала, где орбитальный момент импульса является интегралом движения, характеризуется тем, что всем $(2l + 1)$ возможным ориентациям вектора l соответствует одинаковый энергетический уровень. На этом уровне размещаются $2(2l + 1)$ нуклонов данного типа. Таким образом, в оболочечной модели нуклоны располагаются в определенном количестве на энергетических *нуклонных оболочках*. Каждый нуклон характеризуется индивидуальной волновой функцией с индивидуальными квантовыми числами n и l . Существуют две системы нуклонных состояний — одна для протонов, другая для нейтронов; обе системы уровней заполняются нуклонами независимо друг от друга. Ядра, имеющие только заполненные *нуклонные оболочки*, должны обладать повышенной устойчивостью (проявляющейся, например, в их большей распространенности в природе), а также должны иметь сферически симметричное распределение заряда (близкий к нулю квадрупольный момент).

2°. Порядок заполнения нуклонных оболочек с ростом A сходен с порядком заполнения электронных оболочек с ростом Z . Ввиду сильной спин-орбитальной связи все уровни с $l \neq 0$ расщепляются на два подуровня с $j = l \pm \frac{1}{2}$, заполняющихся независимо.

3°. Предсказания оболочечной модели, в общем, соответствует действительности. Наиболее устойчивыми по сравнению с соседними ядрами являются ядра со значениями N или Z , равными 2, 8, 20, 28, 126 и 152. Эти числа названы *магическими*. Распространенность в природе таких ядер наиболее велика, а квадрупольные моменты их близки к нулю. Ядра, у которых магическими числами являются и N , и Z , называют *дважды магическими*. Эти ядра $\left({}^4_2\text{He}, {}^{16}_8\text{O}, {}^{40}_{20}\text{Ca}, {}^{208}_{82}\text{Pb} \right)$ обла-

дают особой устойчивостью, проявляющейся, в частности, в том, что они являются наиболее распространенными в природе изотопами этих элементов.

4°. С одной стороны, аналогия нуклонных оболочек в ядре и электронных оболочек атома имеет внешний характер. Электроны атома движутся в центральном кулоновском поле ядра, тогда как поле, в котором дви-

жуются нуклоны, не имеет центрального характера. Электроны в атоме не испытывают столкновений друг с другом — только при этом условии можно говорить о числе l , определяющем систему атомных уровней энергии, как о точном квантовом числе, соответствующем стационарному движению. При высокой же плотности ядерного вещества нуклоны должны испытывать частые столкновения друг с другом, так что квантование их движения, казалось бы, невозможно.

С другой стороны, успех оболочечной модели говорит о том, что для ядер l имеет смысл точного квантового числа. Это, по-видимому, связано с тем, что нуклоны в основном состоянии ядра не могут испытывать столкновений друг с другом (п. 1°).

5°. Оболочечная модель ядра хорошо оправдывается для легких ядер и ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.

В. ОБОБЩЕННАЯ (КОЛЛЕКТИВНАЯ) МОДЕЛЬ

1°. *Обобщенная (коллективная) модель ядра* представляет собой синтез капельной и оболочечной моделей. В этой модели принимается, что нуклоны ядра движутся в некотором усредненном самосогласованном поле, действующем на выделенный нуклон со стороны остальных. Эта усредненность поля теряется вблизи «поверхности» ядра вследствие того, что нуклоны, не входящие в состав заполненных нуклонных оболочек («валентные» нуклоны), вызывают у «поверхности» ядра флуктуации потенциала самосогласованного поля, что проявляется в «деформации» ядерной «поверхности». Эти деформации возникают тем более легко, что в ядре нет центрального тела, которое стабилизировало бы движение системы нуклонов. В результате деформаций нарушается сферическое распределение заряда в ядре и оно приобретает квадрупольный электрический момент.

2°. Оболочечная и капельная модели рассматриваются как предельные случаи обобщенной модели ядра. Оболочечный аспект обобщенной модели состоит в том, что в ней сохраняют смысл индивидуальные состояния нуклонов и нуклонные оболочки. Вместе с тем эти состояния определяются не непосредственным взаимодействием нуклонов, а их коллективным взаимодей-

ствием, как в капельной модели, через нарушение потенциала взаимодействия «деформациями» ядерной поверхности. Капельный аспект обобщенной модели проявляется при больших возбуждениях ядра (сильных «деформациях» и сильных искажениях самосогласованного поля), когда теряется индивидуализация состояний отдельных нуклонов. При очень высоких возбужденных состояниях из ядра могут «испаряться» отдельные нуклоны.

Глава 2

РАДИОАКТИВНОСТЬ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. Радиоактивностью называют самопроизвольное превращение неустойчивых изотопов одного химического элемента в изотопы другого элемента, сопровождающееся испусканием некоторых частиц (например, ядер гелия).

Естественной радиоактивностью называют радиоактивность, наблюдающуюся у неустойчивых изотопов, существующих в природе.

Искусственной радиоактивностью называют радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций. Свойства данного изотопа не зависят от способа его получения.

С учетом возможности образования составного ядра в ядерных реакциях радиоактивность можно определять как самопроизвольное изменение состава ядра, происходящее путем испускания элементарных частиц или ядер из основного или метастабильного состояния ядра за время, существенно превышающее время жизни возбужденного составного ядра в ядерных реакциях. Минимальное время жизни радиоактивных изотопов составляет 10^{-12} — 10^{-13} с.

2°. В табл. VII.3 представлены основные типы радиоактивных превращений. В ней указаны «правила сдвигов» ΔZ и ΔA , схема процессов и типы взаимодействий, ответственные за их протекание и стабилизацию. Символы S, E и W обозначают соответственно сильное, электромагнитное и слабое взаимодействия.

Таблица VII.3

Тип превращения	ΔZ	ΔA	Вид обнаруженного излучения	Процесс	Взаимодействие	Авторы открытия, год
Радиоактивность	—	—	Излучение	—	—	А. Беккерель, 1896
α -распад	-2	-4	${}^4_2\text{He}$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + {}^4_2\text{He}$	S + E	Э. Резерфорд, 1898
β^- -распад	+1	0	$(n \rightarrow p) e^- \bar{\nu}_e$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + e^- + (\bar{\nu}_e)$	W	Э. Резерфорд, 1898
γ -распад	0	0	γ	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + \gamma$	E	П. Виллар, 1900
β^+ -распад	-1	0	$(p \rightarrow n) e^+ \nu_e$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + e^+ + \nu_e$	W	И. Жолио-Кюри, Ф. Жолио-Кюри, 1934
Электронный захват (К-захват)	-1	0	$(pe^- \rightarrow n) \nu_e$	$A_X Z_X + e^- \rightarrow A_Y Z_Y$	W	Л. Альварес, 1937
Спонтанное деление ядер	$\sim Z/2$	$\sim A/2$	Два осколка	$A_X Z_X \rightarrow A_Y' Z_Y' + A_Y'' Z_Y''$	S + E	К. А. Петряк, Г. Н. Флоров, 1940
Протонный распад	-1	-1	${}^1_1\text{H}$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + {}^1_1\text{H}$	S + E	Э. Хофман и др., 1982
Кластерный распад (f-радиоактивность)	$Z' - Z$	$A' - A$	${}^{14}\text{C}$, ${}^{20}\text{O}$, ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{He}$, ${}^{28}\text{Mg}$, ${}^{30}\text{Mg}$, ${}^{32}\text{Si}$, ${}^{34}\text{Si}$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y' Z_Y' + A_Y'' Z_Y''$	S + E	Х. Роуз, Г. Джонс, Д. В. Александров и др., 1984
Двухпротонный распад	-2	-2	${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$	$A_X Z_X \rightarrow A_Y Z_Y + {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$	S + E	J. Giovannazzo et al., M. Pfitzner et al., 2002

3°. Перечисленные основные типы радиоактивности характеризуются относительно большой продолжительностью превращения ядер, которая обеспечивается или характером взаимодействия (слабые взаимодействия при β -распаде), или задержкой испускания положительно заряженных частиц потенциальным барьером в ядре, обусловленным совместным действием сил кулоновского отталкивания и ядерного притяжения (α -распад, спонтанное деление, одно- и двухпротонная радиоактивность). Обычно все типы радиоактивности сопровождаются испусканием *гамма-лучей*, представляющих собой потоки фотонов жестких электромагнитных излучений с длиной волны порядка 10^{-11} — 10^{-13} м. Гамма-лучи являются наиболее распространенной формой снятия избыточной энергии возбужденных продуктов радиоактивного распада. Ядро, испытывающее радиоактивный распад, называют *материнским*, возникающее ядро — *дочерним*. Если последнее также распадается, то иногда говорят о «внучатном» ядре.

4°. *Самостоятельный (спонтанный) распад атомных ядер* следует закону

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N_0 — количество ядер в данном объеме вещества в момент времени $t = 0$, N — количество ядер в том же объеме к моменту времени t , λ — *постоянная распада*. Постоянная λ имеет смысл вероятности распада ядра за 1 с: она равна доле ядер, распадающихся за 1 с. Величину $\frac{1}{\lambda}$ называют *средним временем жизни радиоак-*

тивного изотопа. Для характеристики устойчивости ядер относительно распада пользуются понятием о *периоде полураспада* $T_{1/2}$, равном времени, в течение которого исходное количество ядер данного вещества распадается наполовину. Величины λ и $T_{1/2}$ связаны соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Если радиоактивный изотоп имеет несколько типов радиоактивности, то общая постоянная распада $\lambda = \sum_k \lambda_k$, где суммирование производится по всем типам

радиоактивности, λ_k являются *парциальными постоянными распада*. Число распадов ядер данного препарата в единицу времени называют *активностью* препарата; отнесенное к единице массы препарата, это число называют *удельной активностью* вещества препарата.

Активность

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

5°. Если получающееся в результате распада исходного ядра новое ядро также радиоактивно и, распадаясь, дает устойчивое или вновь радиоактивное ядро и т. д., то имеет место *цепочка радиоактивных превращений*. В этом случае суммарная активность ядер, образующихся в цепочке, при измерении ее каким-либо прибором зависит от времени по более сложному закону, поскольку постоянные распада для различных звеньев цепочки не равны друг другу и, кроме того, прибор имеет различную эффективность регистрации различных излучений от каждого из звеньев цепочки превращений.

Если λ_i — постоянная распада ядра в i -м звене цепочки, а k_i — восприимчивость детектора излучения к излучению i -го звена, то суммарная активность

$$A = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i N_i.$$

В случае цепочки из двух звеньев ($n = 2$)

$$A = k_1 \lambda_1 N_{10} \left[\left(1 - \frac{k_2 \lambda_2}{k_1 \lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{k_2 \lambda_2}{k_1 \lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right];$$

индекс «нуль» относится к моменту времени $t = 0$.

6°. Устойчивость ядер (в среднем) снижается с возрастанием их массового числа. Естественная радиоактивность легких и средних ядер — редкое явление (наблюдаемое у ядер $^{10}_{19}\text{K}$, $^{82}_{34}\text{Se}$, $^{87}_{37}\text{Rb}$, $^{113}_{48}\text{Cd}$, $^{115}_{49}\text{In}$, $^{123}_{52}\text{Te}$, $^{128}_{52}\text{Te}$, $^{138}_{57}\text{La}$, $^{144}_{60}\text{Nd}$, $^{147}_{62}\text{Sm}$, $^{148}_{62}\text{Sm}$, $^{152}_{64}\text{Gd}$ и некоторых более тяжелых). Среди тяжелых атомов (начиная от $A > 200$) естественная радиоактивность — это

универсальное явление. Эти ядра образуют 3 естественно-радиоактивных и 1 искусственно-радиоактивное семейства, называемые по наиболее долгоживущему (с наибольшим $T_{1/2}$) «родоначальнику» семейства: семейство урана (от $^{238}_{92}\text{U}$), семейство тория (от $^{232}_{90}\text{Th}$), семейство актиния (от $^{235}_{89}\text{Ac}$) и семейство нептуния (от $^{237}_{93}\text{Np}$, получаемого искусственно). Массовые числа членов каждого из радиоактивных семейств характеризуют формулой

$$A = 4n + a,$$

где n — целое число, $a = 0$ для семейства тория, $a = 1$ для семейства нептуния, $a = 2$ для семейства урана, $a = 3$ для семейства актиния. Переход от одного члена семейства к другому осуществляется цепочкой последовательных альфа- и бета-распадов и заканчивается на устойчивом ядре, которым для семейства с $a = 0$ является $^{208}_{82}\text{Pb}$, для $a = 1$ — $^{209}_{83}\text{Bi}$, для $a = 2$ — $^{206}_{82}\text{Pb}$ и для $a = 3$ — $^{207}_{82}\text{Pb}$. Последовательность радиоактивных превращений в этих семействах показана на рис. VII.2.1, a , b , где стрелки, параллельные оси A , соответствуют альфа-распадам, а стрелки, параллельные оси $N-Z$, — бета-распадам. Для этой последовательности превращений в радиоактивных семействах справедлив закон смещения Содди—Фаянса:

$$\left. \begin{array}{l} A' = A - 4 \\ Z' = Z - 2 \end{array} \right\} \alpha\text{-распад}, \quad \left. \begin{array}{l} A' = A \\ Z' = Z + 1 \end{array} \right\} \beta\text{-распад},$$

где значения A , Z и A' , Z' соответствуют материнскому и дочернему ядрам.

7°. В настоящее время известно 24 элемента с $Z > 92$, называемые *трансурановыми*. Все они в природных условиях, по-видимому, не существуют и получены искусственным путем. Всем трансурановым элементам присуща радиоактивность с периодами полураспада, быстро уменьшающимися при возрастании Z . К трансурановым элементам относятся нептуний (^{93}Np), плу-

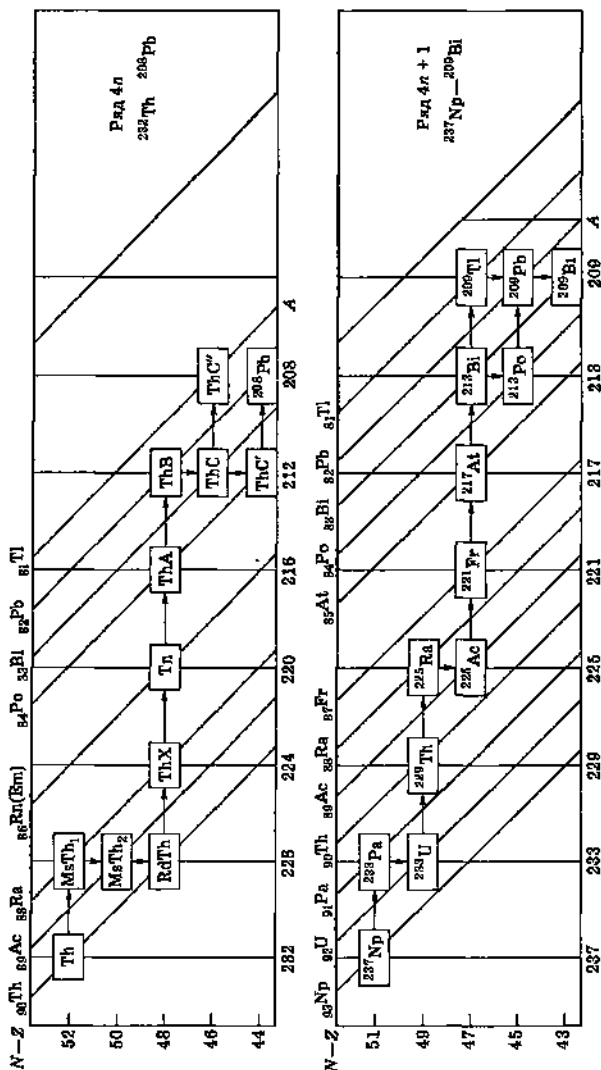
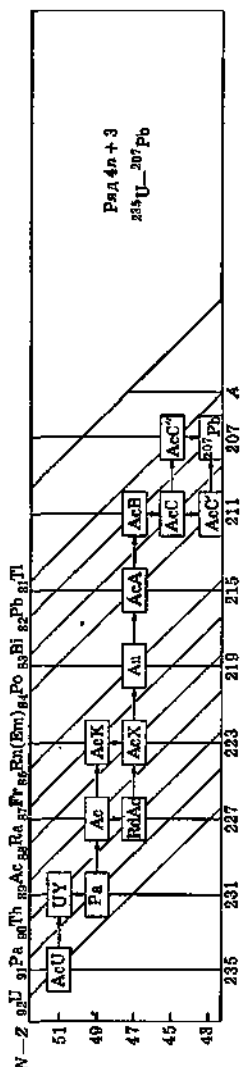
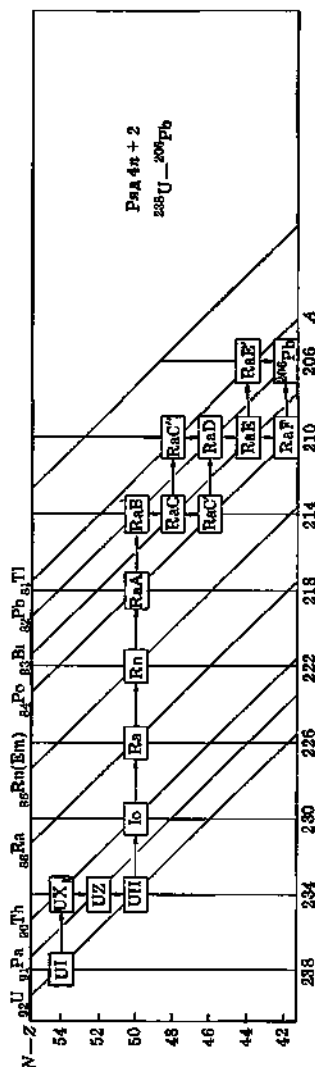


РИС. VII.2.1, а



тоний (${}_{94}\text{Pu}$), америций (${}_{95}\text{Am}$), кюрий (${}_{96}\text{Cm}$), берклий (${}_{97}\text{Bk}$), калифорний (${}_{98}\text{Cf}$), эйнштейний (${}_{99}\text{Es}$), фермий (${}_{100}\text{Fm}$), менделевий (${}_{101}\text{Md}$), нобелий (${}_{102}\text{No}$), лоуренсий (${}_{103}\text{Lr}$), резерфордий (${}_{104}\text{Rf}$), дубний (${}_{105}\text{Db}$), сиборгий (${}_{106}\text{Sg}$), борий (${}_{107}\text{Bh}$), хассий (${}_{108}\text{Hs}$), мейтнерий (${}_{109}\text{Mt}$), дармштадтий (${}_{110}\text{Ds}$), рентгений (${}_{111}\text{Rg}$). Искусственно полученные трансурановые элементы от 112 до 116 не имеют (2004 г.) утвержденных названий.

Основным видом радиоактивного превращения трансурановых элементов является альфа-распад. Изотопы трансурановых элементов тем устойчивее, чем меньше у них число нейтронов N при данном числе протонов Z ; изотопы с заполненными ядерными оболочками имеют большие $T_{1/2}$, чем соседние с ними. Трансурановые элементы неустойчивы по отношению к спонтанному делению ядер.

2. АЛЬФА-РАСПАД

1°. *Альфа-распадом* называют испускание атомным ядром α -частицы (ядра гелия ${}^4_2\text{He}$). Альфа-распад характерен для тяжелых ядер с массовым числом $A = 150$. Известно более 300 α -активных изотопов, большая часть которых получена искусственно. Периоды полураспада $T_{1/2}$ различных α -активных изотопов варьируют в очень широких пределах от 10^{-7} с до 10^{17} лет. Кинетическая энергия α -частиц T_α заключена в сравнительно узких пределах от 2 до 11 МэВ.

2°. Альфа-распад ядра возможен только при условии: $M_A > (M_{A-4} + M_\alpha)$, где M_A и M_{A-4} — массы материнского и дочернего ядер, а M_α — масса α -частицы. Энергия E , выделяющаяся при α -распаде ядра, и кинетическая энергия α -частицы T_α равны:

$$E = (M_A - M_{A-4} - M_\alpha)c^2 \quad \text{и} \quad T_\alpha = \frac{M_{A-4}}{M_A} E.$$

Для данного α -активного изотопа энергетический спектр α -частиц — дискретный. Энергия T_α при распа-

де невозбужденного материнского ядра зависит не только от природы изотопа, но также от степени возбуждения дочернего ядра. Энергия T_α максимальна в том случае, когда дочернее ядро не возбуждено, и тем меньше, чем на более высоком энергетическом уровне находится дочернее ядро. Соответственно, α -радиоактивный источник излучает несколько групп α -частиц, различающихся по их энергии (*тонкая структура альфа-спектра*). Обычно наиболее интенсивной является группа с наибольшей энергией T_α .

3°. Альфа-распад ядра рассматривается как пример туннельного эффекта. Считается, что внутри ядра спонтанно образующаяся α -частица находится в потенциальной яме, которая отделена потенциальным барьером конечной ширины и высоты. Этот барьер обусловлен совместным действием на α -частицу ядерных сил притяжения нуклонами и кулоновских сил отталкивания ядерными протонами. Высота барьера в несколько раз больше энергии α -частицы, которая может выйти из ядра только путем просачивания сквозь барьер.

4°. В процессе альфа-распада различают две стадии: образование α -частицы из нуклонов ядра и испускание α -частицы ядром. Образование α -частиц происходит с заметной вероятностью, и поэтому время жизни α -радиоактивных ядер определяется в основном второй, гораздо более медленной, стадией α -распада. Обособлению двух протонов и двух нейтронов в α -частицу способствует насыщение ядерных сил, так что сформировавшаяся α -частица подвержена меньшему действию ядерных сил притяжения и вместе с тем большему действию кулоновских сил отталкивания от протонов ядра, чем отдельные нуклоны.

Этим объясняется тот факт, что альфа-распад представляет собой значительно более вероятный тип радиоактивности, чем одно- и двухпротонная радиоактивность.

5°. Коэффициент прозрачности потенциального барьера очень сильно зависит от ширины и высоты барьера. Именно поэтому период полураспада $T_{1/2}$ α -радиоактивных ядер очень сильно уменьшается при даже небольшом увеличении энергии α -частиц T_α .

Связь между $T_{1/2}$ и T_α описывается экспериментально установленным *законом Гейгера—Неттола*:

$$\lg T_{1/2} = \frac{B}{\sqrt{T_\alpha}} + C,$$

где $B > 0$ и $C < 0$ — постоянные величины, не зависящие от массового числа A материнского ядра и слабо зависящие от зарядового числа Z этого ядра. Так, для $Z = 84$ $B = 128,8$ МэВ^{1/2} и $C = -50,15$, а для $Z = 90$ $B = 133,4$ МэВ^{1/2} и $C = -51,94$. Этот закон наиболее хорошо описывает переходы между основными состояниями чётно-чётных ядер.

3. БЕТА-РАСПАД

1°. Под понятием *бета-распада* объединяют три вида ядерных превращений: *электронный (β^-) распад*, *позитронный (β^+) распад* и *электронный захват (E -захват)*. Бета-радиоактивных изотопов значительно больше, чем альфа-активных. Они имеются во всей области изменения массовых чисел ядер от легких ядер до самых тяжелых. Всего известно более 1200 β -активных изотопов. Из них только около 20 являются естественными, а все остальные получены искусственным путем.

2°. Бета-распад атомных ядер обусловлен *слабым взаимодействием* элементарных частиц. При β^- -распаде происходит превращение одного ядерного нейтрона в протон, а при β^+ -распаде — одного ядерного протона в нейтрон с одновременным испусканием ядром *лептонной пары* — электрона и электронного антинейтрино (в первом случае) и позитрона и электронного нейтрино (во втором случае). При E -захвате происходит превращение одного ядерного протона в нейтрон с испусканием электронного нейтрино в результате поглощения ядром электрона из какого-либо слоя атомной оболочки (чаще всего из ближайшего к ядру K -слоя). E -захват сопровождается испусканием атомом характеристического рентгеновского излучения.

При β -распаде происходит преобразование друг в друга d и u кварков в одном из нуклонов ядра: при β^- -распаде один из двух d кварков нейтрона превра-

щается в u кварк, а при β^+ -распаде один из двух u кварков протона превращается в d кварк.

3°. Характерное время электромагнитного взаимодействия в 10^7 раз меньше такого же времени слабого взаимодействия. Поэтому можно считать, что при β -распаде материнское ядро находится в основном состоянии (если это ядро первоначально было возбуждено, то оно успевает испустить γ -фотон и перейти в основное состояние еще до начала β -распада), а вот дочернее ядро может образоваться как в основном, так и в возбужденных состояниях. В первом случае β -распад называют *простым*, а во втором — *сложным*. Сложный β -распад сопровождается γ -излучением.

Вероятность β -распада характеризуют ядерным матричным элементом перехода $[H_{ik}]$, содержащим: волновую функцию нуклона в начальном состоянии i ; волновые функции нуклона, электрона (позитрона) и электронного антинейтрино (нейтрино) в конечном состоянии k ; энергию взаимодействия, соответствующую переходу $i \rightarrow k$, и, наконец, величину, определяющую плотность числа конечных состояний системы. Для β -распада существуют правила отбора, которые устанавливают значительно большую вероятность для *разрешенных переходов* и малую вероятность так называемых *запрещенных β -переходов*.

Различают два типа разрешенных β -переходов — *фермиевские* и *гамов-теллеровские*. В первом случае спин ядра не изменяется, так как суммарный спин лептонной пары (п. 2°) равен нулю. Во втором случае спины членов лептонной пары сонаправлены и спин ядра изменяется на ± 1 (в единицах $\hbar$).

4°. Энергетические условия возможности осуществления различных типов β -распада материнского атомного ядра A_ZX имеют следующий вид (масса нейтрино и антинейтрино принята равной нулю, а различие в энергиях связи электронов в материнском и дочерних атомах считаются пренебрежимо малым):

а) β^- -распад возможен, если

$$M(Z, A) > M(Z + 1, A) + 2m;$$

б) β^+ -распад возможен, если

$$M(Z, A) > M(Z - 1, A) + 2m;$$

в) E -захват возможен, если

$$M(Z, A) > M(Z - 1, A).$$

Здесь $M(Z, A)$ и $M(Z \pm 1, A)$ — массы атомов материнского (исходного) и дочернего (конечного) вещества, а m — масса электрона.

E -захват и β -распад приводят к одному и тому же процессу превращения ядерного протона в нейтрон и могут происходить оба, конкурируя друг с другом. Однако, если

$$M(Z - 1, A) < M(Z, A) < M(Z - 1, A) + 2m,$$

то β -распад невозможен, тогда как E -захват будет осуществляться.

5°. Из полуэмпирической формулы Вейцзеккера следует, что среди *изобаров* с массовым числом A устойчив в отношении β -распада изобар с зарядовым числом, равным ближайшему целому числу к

$$Z_{\text{уст}} = \frac{A}{0,015A^{2/3} + 2}.$$

Для легких атомов $Z_{\text{уст}} \approx 0,5 A$, т. е. атомные ядра стабильных изотопов легких атомов содержат примерно равные числа протонов и нейтронов. В ядрах тяжелых атомов $Z_{\text{уст}} < 0,5 A$. Так, при $A = 200$ $Z_{\text{уст}} \approx 0,4 A$, т. е. стабильные тяжелые атомные ядра содержат примерно в 1,5 раза больше нейтронов, чем протонов.

При $Z < Z_{\text{уст}}$ (ядро переобогащено нейтронами) ядро неустойчиво по отношению к β^- -распаду, а при $Z > Z_{\text{уст}}$ (нейтронодефицитные ядра) ядро неустойчиво по отношению к β^+ -распаду и E -захвату.

6°. Почти все нечетно-нечетные атомные ядра, кроме ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$ и некоторых других, неустойчивы по отношению к β^+ -распаду и E -захвату, переводящим эти ядра в устойчивые четно-четные дочерние ядра. Поэтому многим четным значениям массового числа, начиная с $A = 36$, соответствуют изобарные пары с четными значениями зарядового числа Z , различающимися в пределах пары на две единицы.

Каждому нечетному значению A соответствует только одно устойчивое атомное ядро. В то же время нет никаких ограничений на число различных стабильных изотопов одного и того же химического элемента.

7°. Пренебрегая по малости кинетической энергией отдачи дочернего ядра, можно считать, что энергия E_0 , выделяющаяся при β -распаде материнского ядра, распределяется только между членами лептонной пары — электроном и антинейтрино при β^- -распаде или позитроном и нейтрино при β^+ -распаде. Соотношения между кинетическими энергиями членов лептонной пары может быть любым и изменяться случайным образом в разных актах β -распада. Поэтому электроны (позитроны), образующиеся при β -распаде, имеют непрерывный спектр значений кинетической энергии в пределах от нуля до $T_{\text{макс}} = E_0$ — *верхней границы бета-спектра* (см. рис. VII.2.2, где $N(T) = \frac{dN}{dT}$, а dN —

число электронов (позитронов) с энергией в пределах от T до $T + dT$, испускаемых β -радиоактивным препаратом за 1 с).

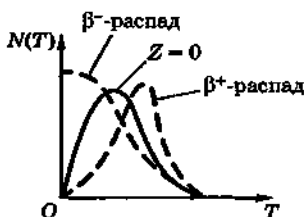


Рис. VII.2.2

числа медленных (рис. VII.2.2, где кривая $Z = 0$ соответствует распределению $N(T)$ без учета кулоновского взаимодействия).

8°. Для разрешенных β -переходов в предположении, что нейтрино и антинейтрино имеют нулевую массу,

$$N(T) = N_{\alpha} B \sqrt{T(T + 2mc^2)} (T + mc^2)(T - E_0)^2 F(Z, T).$$

Здесь B — коэффициент, зависящий от свойств рассматриваемого β -радиоактивного вещества, N_{α} — общее число атомных ядер в препарате, m и mc^2 — масса и энергия покоя электрона, а $F(Z, T)$ — функция, учитывающая влияние кулоновского поля атома.

Кулоновское поле ядра атома и электронной оболочки влияет на распределение β -частиц по энергии T : с ростом зарядового числа Z при β^- -распаде уменьшается доля быстрых электронов и увеличивается доля медленных, а при β^+ -распаде, наоборот, растет доля быстрых позитронов и уменьшается

Для суждения о принадлежности экспериментально найденного β -спектра $N_{\text{эксп}}(T)$ к разрешенным или неразрешенным строят график функции

$$K(T) = \left(\frac{N_{\text{эксп}} T}{\sqrt{T(T+2mc^2)}(T+mc^2)F(Z, T)} \right)^{1/2},$$

называемый *графиком Кюри (графиком Ферми)*.

Для разрешенных β -спектров зависимость $K(T)$ имеет вид прямой, пересекающей ось абсцисс (энергии T) при $T = E_0$. Отклонение графика функции $K(T)$ от этой прямой свидетельствует о том, что данный β -переход принадлежит к числу запрещенных. Бета-спектры запрещенных переходов могут сильно отличаться от спектров разрешенных переходов.

В случае сложного β -распада наблюдаемый энергетический спектр $N_{\text{эксп}}(T)$ является результатом наложения нескольких энергетических спектров, каждый из которых соответствует своему значению граничной энергии E_0 , зависящей от того, в каком энергетическом состоянии образуется дочернее ядро.

9°. Постоянная β -распада равна

$$\lambda = -\frac{1}{N_{\pi}} \frac{dN_{\pi}}{dt} = \frac{1}{N_{\pi}} \int_0^{E_0} N(T) dT.$$

Для разрешенных β -переходов постоянная λ и период $T_{1/2}$ полураспада равны:

$$\lambda = Bf(Z, E_0) \quad \text{и} \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{Bf(Z, E_0)},$$

где

$$f(Z, E_0) = \int_0^{E_0} \sqrt{T(T+2mc^2)}(T+mc^2)(T-E_0)^2 F(Z, T) dT$$

— функция Z и E_0 .

Величину $T_{1/2 \text{ прив}} = T_{1/2} f(Z, E_0)$ называют *приведенным периодом полураспада*.

10°. Классификация типов β -переходов в зависимости от значения $T_{1/2 \text{ прив}}$ приведена в табл. VII.4.

Таблица VII.4

Бета-переход	$\lg T_{1/2} \text{ мин}$
Сверхразрешенный	$3,5 \pm 0,2$
Затрудненный разрешенный	$5,7 \pm 1,1$
Запрещенные переходы:	
первого запрета	$7,5 \pm 1,5$
второго запрета	$12,1 \pm 1,0$
третьего запрета	$18,2 \pm 0,6$

К числу сверхразрешенных β -переходов принадлежат β^- -распады нейтрона, ${}^3_1\text{H}$, ${}^6_2\text{He}$; β^+ -распады ${}^{11}_6\text{C}$, ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ и др.

4. ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ

1°. При радиационном переходе атомного ядра из возбужденного состояния n с энергией E_n в основное или менее возбужденное состояние f с энергией E_f испускается один γ -фотон. Согласно закону сохранения энергии (с точностью до энергии отдачи ядра) энергия фотона $h\nu = E_n - E_f$, где ν — частота γ -излучения. В связи с дискретностью энергетических уровней ядра γ -излучение имеет линейчатый спектр энергии и частот.

При γ -излучении выполняются также законы сохранения импульса и момента импульса. Согласно первому закону ядро, излучая γ -фотон с импульсом $p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$, приобретает импульс отдачи, равный $-p_\gamma$, и кинетическую энергию отдачи $T_{\text{отд}} = \frac{(E_n - E_f)^2}{2E_0}$, где E_0 — энергия покоя ядра.

2°. В соответствии с законом сохранения момента импульса γ -фотон обладает моментом импульса (спином)

$$L_\gamma = J_n - J_f,$$

где J_n и J_f — значения спина ядра в начальном и конечном состояниях. Так как $|L_\gamma| = \hbar\sqrt{L(L+1)}$ и $|J_f| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$, то

$$|J_n - J_f| \leq L \leq (J_n + J_f).$$

Фотоны — это бозоны с единичным спином, так что $L = 1, 2, \dots$. Соответственно запрещен радиационный $0-0$ -переход ядра ($J_n = J_f = 0$). Величину 2^L называют мультипольностью γ -излучения: $L = 1$ — дипольное излучение, $L = 2$ — квадрупольное излучение, $L = 3$ — октупольное излучение и т. д. Вероятность γ -излучения ядер быстро уменьшается с ростом его мультипольности. Как правило, осуществляется γ -излучение низкой мультипольности ($L < 3$): электрическое дипольное излучение, обозначаемое E1, электрическое квадрупольное излучение E2 и магнитное дипольное излучение M1.

3°. Наряду с радиационным переходом ядра, при котором излучается гамма-квант, существует конкурирующий с ним безызлучательный процесс, называемый *внутренней конверсией*. В этом процессе энергия, освобождающаяся при ядерном переходе, передается без посредства гамма-кванта одному из атомных электронов, вызывая ионизацию атома. Внутреннюю конверсию формально, для облегчения расчетов, считают идущей в две стадии: на первой стадии ядро как бы излучает гамма-квант, который на второй стадии поглощается электроном и передает ему свою энергию (*конвертирует*).

4°. Отношение вероятности вылета K -электрона из атома при внутренней конверсии к вероятности испускания гамма-кванта за этот же промежуток времени называют *парциальным коэффициентом конверсии* на K -слое атома. Аналогично вводят парциальные коэффициенты для внутренней конверсии с L -, M -, ... слоев атома:

$$w_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_\gamma}, \quad w_L = \frac{\lambda_L}{\lambda_\gamma}, \quad w_M = \frac{\lambda_M}{\lambda_\gamma}, \dots$$

Сумму парциальных коэффициентов называют *полным коэффициентом внутренней конверсии*:

$$w = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} = w_K + w_L + w_M + \dots,$$

где λ_e — вероятность испускания конвертированных электронов из всех оболочек атома. Величина λ_e растет с уменьшением энергии возбуждения ядра и с увеличением мультипольности гамма-излучения.

5°. Когда энергия, освобождающаяся при ядерном переходе, превышает удвоенную энергию покоя электрона, равную 1,02 МэВ, становится возможной внутренняя конверсия с образованием пары электрон—позитрон. Соответствующий коэффициент конверсии возрастает с увеличением энергии ядерного перехода и уменьшением мультипольности γ -излучения.

6°. В ряде случаев время жизни ядра в возбужденном состоянии может значительно превышать обычно наблюдаемые времена. Для таких метастабильных возбужденных состояний ядра оно может достигать до многих лет. В зависимости от свойств уровней энергии ядер и разности энергий между уровнями, величина времени жизни ядра в метастабильном состоянии может изменяться в очень широких пределах. Например, у нептуния известно время жизни возбужденного ядра, соответствующее периоду полураспада 5500 лет. Разновидности одного и того же изотопа, обнаруживающие наряду с периодом полураспада, соответствующим обычному гамма-переходу, также период, отвечающий гамма-переходу из метастабильного возбужденного состояния, называют *ядерными изомерами*. Ядерные изомеры данного изотопа имеют различные значения спина.

7°. Явление ядерной изомерии объясняется оболочечной моделью ядра возникновением в ядрах с почти заполненными нуклонными оболочками (при N и Z вблизи магических чисел) возбужденных состояний с квантовыми числами l , сильно отличающимися от l для основных состояний ядер. В связи со значительным различием волновых функций возбужденного и основного состояний в этом случае вероятность перехода между ними оказывается малой, а время жизни в возбужденном состоянии — большим. Опыт показывает, что ядерная изомерия действительно наблюдается лишь для N и Z , имеющих значения вблизи (меньше) чисел 50, 82, 126, где возникают «острова изомерии».

8°. Свободное атомное ядро, поглощая γ -фотон и переходя из основного состояния f в возбужденное состояние n , испытывает отдачу так же, как и при испускании γ -фотона в случае обратного перехода (п. 1°). Существенно, что энергия испускаемого фотона $E_{\text{исп}} = h\nu_{\text{исп}}$ и энергия поглощаемого фотона $E_{\text{погл}} = h\nu_{\text{погл}}$

не равны друг другу и отличны от энергии $E = E_n - E_f$ рассматриваемого γ -перехода ядра:

$$E_{\text{исп}} = E - T_{\text{отд}}, \quad E_{\text{погл}} = E + T_{\text{отд}},$$

и

$$E_{\text{погл}} - E_{\text{исп}} = h(\nu_{\text{погл}} - \nu_{\text{исп}}) = 2T_{\text{отд}} = \frac{E^2}{E_0}.$$

Эта величина во много раз больше естественной ширины Γ даже первых возбужденных энергетических уровней атомных ядер. Поэтому на свободных атомных ядрах невозможно резонансное поглощение γ -излучения:

$$(\nu_{\text{погл}} - \nu_{\text{исп}}) > \frac{\Gamma}{h} \sim \frac{1}{\tau},$$

где τ — время жизни ядра в возбужденном состоянии.

9°. Резонансное испускание и поглощение γ -фотонов атомными ядрами, называемое *эффектом Мёссбауэра*, наблюдается в кристаллических твердых телах. В кристалле энергия отдачи ядер преобразуется в энергию колебаний кристаллической решетки. Этот процесс — статистический, причем есть отличная от нуля вероятность того, что импульс отдачи передается не отдельному ядру, а всему кристаллу. Именно за счет таких переходов атомных ядер «без отдачи» ($T_{\text{отд}} = 0$) и осуществляется эффект Мёссбауэра.

Чрезвычайная малость естественных ширины многих гамма-линий по сравнению с энергией гамма-переходов позволяет использовать эффект Мёссбауэра для проведения тончайших экспериментов (с чувствительностью порядка Γ/E , достигающей 10^{-16}). Этот эффект применяют для измерения сдвига частоты фотонов в гравитационном поле, для измерения весьма малого зеемановского расщепления ядерных уровней энергии и т. п.

5. ПРОХОЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

1°. Заряженные частицы и γ -излучение, проходя через вещество, взаимодействуют с электронными оболочками и ядрами его атомов. Эти взаимодействия приводят к упругому рассеянию частиц и квантов, неупругому

рассеянию, сопровождающемуся возбуждением и ионизацией атомов, возбуждением ядерных реакций, а также к нарушениям структуры вещества, называемым *радиационными повреждениями*.

2°. Потери энергии заряженными частицами при прохождении в веществе на ионизацию и возбуждение атомов называют *ионизационными*; потери энергии на тормозное излучение называют *радиационными*. Обычно находят *удельные потери энергии частиц*, рассчитанные на единицу их пути в веществе: $-\frac{dT}{dx}$, где T —

кинетическая энергия частицы. Удельные ионизационные потери $\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}}$ для тяжелой заряженной частицы массой M (протон, α -частица) в области значений энергии T частицы от нескольких МэВ до десятков и сотен ГэВ прямо пропорциональны произведению квадрата заряда ze на концентрацию n_e электронов в веществе и

зависит от скорости v частицы, а также (значительно слабее) от средней энергии $\langle I \rangle$ ионизации атомов вещества, равной $\langle I \rangle = 13,5Z$, где Z — атомный номер вещества:

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}} = \frac{4\pi n_e k^2 e^4 z^2}{m_e v^2} \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right), \quad (7.2)$$

где m_e — масса электрона, $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

С ростом энергии частицы в нерелятивистской области скоростей v ($T \ll Mc^2$) удельные ионизационные потери сначала быстро падают (пропорционально $1/T$). Затем при дальнейшем увеличении T это падение замедляется. При $T \approx Mc^2$ величина $\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}}$ дости-

гает минимума и дальше медленно увеличивается с ростом T .

При малых скоростях заряженных частиц $v < 10^6$ м/с (средняя скорость электронов в атомах) формула (7.2) завышает удельные ионизационные потери энергии. Это связано с возможностью перезарядки медленно движущихся частиц вследствие захвата ими электронов атомов вещества.

Часто для характеристики ионизационных потерь энергии тяжелых заряженных частиц в веществе плотностью ρ вместо $\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}}$ рассматривают величину $\left(-\frac{dT}{d\xi}\right)_{\text{ион}}$, где $\xi = \rho x$. Так как концентрация электронов в веществе $n_e = \frac{\rho Z N_A}{A}$, где A — атомная масса, N_A — постоянная Авогадро, то

$$\left(-\frac{dT}{d\xi}\right)_{\text{ион}} = \frac{4\pi k^2 z^2 e^4 Z N_A}{m_e A v^2} \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle (1 - \beta^2)} - \beta^2 \right).$$

Для разных атомов отношение A/Z изменяется в сравнительно узких пределах. Поэтому при одинаковых значениях скорости v заряженной частицы в разных веществах удельные ионизационные потери $\left(-\frac{dT}{d\xi}\right)_{\text{ион}}$ примерно одинаковы.

3°. Удельные ионизационные потери для электрона

$$\begin{aligned} \left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}} &= \frac{2\pi k^2 e^4 n_e}{m_e v^2} \left(\lg \frac{m_e v^2 T}{2 \langle I \rangle^2 (1 - \beta^2)} - \right. \\ &\left. - (2\sqrt{1 - \beta^2} - 1 + \beta^2) \cdot \ln 2 + 1 - \beta^2 + \frac{1}{8}(1 - \sqrt{1 - \beta^2})^2 \right), \end{aligned}$$

где T — релятивистская кинетическая энергия электрона, движущегося со скоростью $v = \beta c$. Остальные обозначения см. в п. 2°.

В ультрарелятивистском случае ($T \gg m_e c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$)

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}} = \frac{2\pi k^2 e^4 n_e}{m_e c^2} \left(\lg \frac{T^2}{2 \langle I \rangle^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{1}{8} \right).$$

4°. Удельные радиационные потери энергии на тормозное излучение $\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{рад}}$ пропорциональны квадрату ускорения a заряженной частицы массы M . В куло-

новском поле ядер атомов вещества $a \sim \frac{1}{M}$, поэтому

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{рад}} \sim \frac{1}{M^2}. \text{ Для тяжелых частиц потери на тормозное излучение даже в веществах с большим атомным номером } Z \text{ невелики. Для электронов высоких энергий ввиду малости массы } m_e \text{ электрона потери на тормозное излучение являются основным видом потерь энергии.}$$

Удельные радиационные потери энергии для электрона прямо пропорциональны его кинетической энергии T :

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{рад}} = \frac{T}{l_r},$$

где l_r — постоянная величина, зависящая от рода вещества и называемая *радиационной длиной*. Отношение удельных радиационных и ионизационных потерь для электрона удовлетворяет приближенному условию:

$$\frac{\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{рад}}}{\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ион}}} \approx \frac{ZT}{800},$$

где Z — зарядовое число ядра атома вещества, а энергия T выражается в МэВ. Это отношение равно 1 при кинетической энергии электрона $T_{\text{кр}} = \frac{800}{Z}$ МэВ, называемой *критической энергией*. При $T < T_{\text{кр}}$ преобладают ионизационные потери энергии электрона, при $T > T_{\text{кр}}$ — радиационные потери.

5°. Потери энергии частицей с зарядом e на черенковское излучение

$$\left(-\frac{dT}{dx}\right)_{\text{чер}} = \frac{4\pi^2 e^2}{\epsilon_0 c^2} \int \left[1 - \frac{1}{(\beta n)^2}\right] v dv,$$

где v — частота излучения, $n(v)$ — показатель преломления среды для данной частоты, $\beta = \frac{v}{c}$. Интегрирова-

ние производится по частотам ν , для которых $\beta l(\nu) > 1$. Существенными оказываются частоты в видимой области и ближайшем ультрафиолете.

6°. Расстояние R , проходимое заряженной частицей в веществе до остановки вследствие полной растраты кинетической энергии T , называют *пробегом частицы*:

$$R = \int_{T_0}^0 \frac{dT}{-dT/dx},$$

где T_0 — кинетическая энергия частицы перед входом в вещество.

Пробег тяжелых частиц с зарядом ze определяется ионизационными потерями (п. 2°):

$$R = \frac{M}{(ze)^2} f(v_0, \langle I \rangle),$$

где M — масса заряженной частицы, v_0 — ее начальная скорость, а $f(v_0, \langle I \rangle)$ — одинаковая для всех частиц функция v_0 и $\langle I \rangle$.

С учетом перезарядки частиц (п. 2°)

$$R = \frac{M}{(ze)^2} f(v_0, \langle I \rangle) + R_1,$$

где R_1 — постоянная, определяемая опытным путем и различная для разных частиц и веществ.

7°. При малых значениях энергии электронов, соответствующих преобладанию ионизационных потерь энергии, электроны, в отличие от тяжелых заряженных частиц, движутся в веществе не прямолинейно. Поэтому обычно пользуются понятием *максимального пробега* $R_{\max}$, равного наименьшей толщине слоя вещества, в котором задерживаются все электроны с заданным значением начальной кинетической энергии. Для расчетов используют таблицы и эмпирические формулы для $R_{\max} = R'_{\max} \rho$, где ρ — плотность вещества. Для грубой оценки используют формулу

$$R'_{\max} = 0,53T - 0,24,$$

где T в МэВ, а $R'_{\max}$ — в г/см².

8°. При прохождении гамма-лучей через вещество они взаимодействуют с атомами (молекулами). Основными видами взаимодействия являются фотоэффект, комптон-эффект и образование электронно-позитронных пар. Кроме того, возможны ядерные реакции под действием γ -лучей (ядерный фотоэффект). Вследствие всех вышеуказанных процессов плотность потока J

γ -квантов в пучке $\left(J = \frac{dn_{\text{сек}}}{dS_{\perp}} \right.$ — число γ -квантов, ежесекундно пролетающих через единицу площади поперечного сечения пучка $\left. \right)$ убывает по мере распространения

в веществе. Для монохроматического излучения в однородном веществе $J = J_0 e^{-\mu x}$, где J_0 — плотность потока γ -квантов на входе в вещество ($x = 0$), μ — коэффициент поглощения (ослабления) гамма-излучения, равный сумме коэффициентов поглощения μ_i для всех одновременно идущих процессов поглощения, т. е.

$$\mu = \sum_i \mu_i = \sum_i n_i \sigma_i.$$

Здесь σ_i — площадь сечения i -го процесса, а n_i — число соответствующих этому процессу рассеивающих центров в единице объема вещества. Для фотоэффекта и рождения электронно-позитронных пар в поле ядер $n_i = n_{\text{ат}}$ — концентрация атомов вещества, а для эффекта Комптона — концентрация электронов в веществе, равная $Zn_{\text{ат}}$, где Z — порядковый атомный номер. Таким образом,

$$\mu = n_{\text{ат}}(\sigma_{\text{ф}} + Z\sigma_{\text{К}} + \sigma_{\text{пар}}),$$

где $\sigma_{\text{ф}}$, $Z\sigma_{\text{К}}$, $\sigma_{\text{пар}}$ — полные сечения соответственно фотоэффекта, эффекта Комптона и рождения пар. Так как $n_{\text{ат}} = \frac{\rho}{M_{\text{ат}}}$, где ρ — плотность вещества, а $M_{\text{ат}}$ — масса

атома, то часто пользуются *массовым коэффициентом поглощения*, равным

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\sigma_{\text{ф}} + Z\sigma_{\text{К}} + \sigma_{\text{пар}}}{M_{\text{ат}}}.$$

Слой вещества толщиной $d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$ называют *слоем половинного ослабления гамма-излучения*.

9°. При фотоэффекте под действием γ -кванта выбивается электрон, сильно связанный в атоме — как правило, из K -слоя атома (по законам сохранения импульса и энергии свободный электрон не может поглотить фотон). Сечение фотоэффекта очень сильно зависит от атомного номера Z вещества, возрастая с его увеличением, и убывает при увеличении энергии γ -кванта E_γ

$$\sigma_{\text{ф}} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma} \quad (\text{при } E_\gamma > I_K) \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{ф}} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}} \quad (\text{при } E_\gamma \gg I_K),$$

где I_K — энергия связи электрона в K -слое, возрастающая с увеличением Z .

10°. Дифференциальное сечение $d\sigma_K = \sigma_K(\theta)d\Omega$ комптоновского рассеяния неполяризованного γ -излучения выражается *формулой Клейна—Нишины—Тамма*:

$$d\sigma_K = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{v'}{v} \right)^2 \left(\frac{v'}{v} + \frac{v}{v'} - \sin^2 \theta \right) d\Omega,$$

где v и v' — частоты падающего γ -излучения и рассеянного под углом θ в телесный угол $d\Omega$; $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} =$

$= 2,81 \cdot 10^{-15}$ м — *классический радиус электрона*.

Полное эффективное сечение комптоновского рассеяния

$$\sigma_K = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \left(\frac{2(1+\epsilon)}{1+2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \ln(1+2\epsilon) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\epsilon} \ln(1+2\epsilon) - \frac{1+3\epsilon}{(1+2\epsilon)^2} \right\},$$

где $\epsilon = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{E_\gamma}{0,511 \text{ МэВ}}$ — отношение энергии гамма-кванта к энергии покоя электрона.

а) При $\epsilon \ll 1$ сечение $\sigma_K = \sigma_{\text{томс}} (1 - 2\epsilon + \frac{26}{5}\epsilon^2 + \dots)$,

где $\sigma_{\text{томс}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ — классическое сечение рассеяния, рассчитанное на один электрон (*томсоновское сечение рассеяния*). При малых значениях E_γ сечение σ_K линейно убывает с ростом энергии.

б) При $\epsilon \gg 1$ сечение $\sigma_K = \pi r_0^2 \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{2} + \ln 2\epsilon \right)$, т. е. при

$E_\gamma \gg m_e c^2$ $\sigma_K \sim \frac{1}{E_\gamma}$. С учетом наличия Z электронов в атоме полное сечение σ_K , рассчитанное на атом, $\sigma_K \sim \frac{Z}{E_\gamma}$.

11°. Если процесс образования электронно-позитронной пары происходит в кулоновском поле ядра, то энергия ядра отдачи незначительна, и пороговая энергия, необходимая для образования пары, равна

$$E_{0\gamma} \approx 2 m_e c^2 = 1,02 \text{ МэВ.}$$

При образовании пары в кулоновском поле электрона $E_{0\gamma} \approx 4 m_e c^2 = 2,04 \text{ МэВ.}$

Электронно-позитронные пары, возникающие под действием двух фотонов, образуются при условии

$$E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} > 2 m_e c^2.$$

Условие образования пары при соударении двух электронов имеет вид $E_e > 7 m_e c^2$, где E_e — полная энергия движущегося электрона.

Сечение $\sigma_{\text{пар}}$ образования пары в поле ядра:

$$\sigma_{\text{пар}} \sim Z^2 \ln E_\gamma \quad \text{при} \quad 5 m_e c^2 < E_\gamma < 50 m_e c^2.$$

Если $E_\gamma < 5 m_e c^2$ и $E_\gamma > 50 m_e c^2$, то $\sigma_{\text{пар}}$ растет с увеличением энергии более медленно. В ультрарелятивистском случае $\sigma_{\text{пар}}$ не зависит от E_γ .

12°. Суммарное сечение σ для взаимодействия γ -квантов с веществом (в расчете на один атом)

$$\sigma = \sigma_{\text{ф}} + Z\sigma_K + \sigma_{\text{пар}}.$$

Формулы для сечений отдельных процессов приведены в пп. 9°—11°.

В области энергий γ -квантов $E_\gamma < E_1$, где E_1 имеет порядок $(10^{-2}—10^{-1})$ МэВ, основным процессом взаимодействия γ -квантов с веществом является фотоэффект; в области энергий $E_1 < E_\gamma < E_2$, где E_2 по порядку ве-

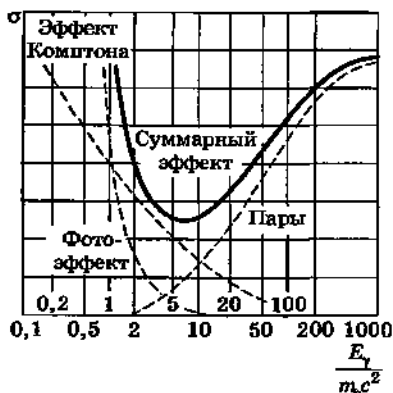


Рис. VI.2.3

личины составляет $(1—10)$ МэВ, основным является комpton-эффект; в области больших энергий $E_\gamma > E_2$ — процесс образования электронно-позитронных пар. На рис. VII.2.3 приведена зависимость сечений взаимодействия γ -лучей в свинце от энергии гамма-кванта для каждого из процессов и для суммарного сечения.

Глава 3

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1°. *Ядерными реакциями* называют превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействиями с элементарными частицами или друг с другом. В большинстве ядерных реакций участвуют два ядра и две частицы; одна пара ядро-частица называется исходной, а другая — конечной.

2°. Ядерные реакции символически записывают в виде

$$a + A \rightarrow b + B \quad \text{или} \quad A(a, b)B, \quad \text{либо} \quad (a, b),$$

где A и B — исходное и конечное ядра, a и b — исходная и конечная частицы в реакции. Ядерную реакцию характеризуют энергией ядерной реакции Q , равной разности суммарной кинетической энергии продуктов реакции и суммарной кинетической энергии исходных частиц. Из закона сохранения полной (релятивистской) энергии системы при ядерной реакции следует, что энергия реакции Q равна разности энергии покоя системы исходных частиц и энергии покоя продуктов реакции.

При $Q > 0$ реакция идет с выделением энергии и называется экзотермической, а при $Q < 0$ — с поглощением энергии и называется эндотермической.

3°. Эндотермической ядерной реакции с энергией $Q < 0$ соответствует энергетический порог ($E_{\text{порог}}$) — эта реакция может осуществляться только при условии, что кинетическая энергия относительного движения ядра A и частицы a $T_{\text{отн}} \geq Q$. Если ядро A неподвижно (мишень), а частица a налетает на ядро, двигаясь с нерелятивистской скоростью $v_1 \ll c$, то пороговая кинетическая энергия частицы a

$$T_{\text{порог}} = \frac{M_A + m_a}{M_A} |Q|, \quad \text{где}$$

M_A и m_a — массы ядра A и частицы a .

Если частица релятивистская ($v_1 < c$), то

$$T_{\text{порог}} = \left(1 + \frac{m_a}{M_A} + \frac{|Q|}{2M_A} \right) |Q|,$$

где $|Q| = (M_B + m_b - (M_A + m_a))c^2$ — разность энергий покоя конечной и исходных пар. В случае экзотермической ядерной реакции и при упругом рассеянии $E_{\text{порог}} = 0$.

4°. Взаимодействие исходной пары ядро-частица (п. 1°) может заключаться: 1) в упругом рассеянии, при котором происходит только перераспределение кинетической энергии соударяющихся частиц; 2) в неупругом рассеянии, при котором из ядра вылетает частица $b = a'$, тождественная с налетающей на мишень, но обладающая меньшей энергией. Ядро мишени при

этом переходит в возбужденное состояние ($B = A^*$). Символическая запись неупругого рассеяния: $a + A \rightarrow A^* + a'$ или $A(a, a')A^*$; 3) в ядерной реакции, в результате которой возникают новое ядро $B \neq A$ и новая частица $b \neq a$, так что процесс происходит по схеме $a + A \rightarrow B + b$ или $A(a, b)B$. Ядерная реакция приводит к изменению свойств и состава исходной пары или к превращению элементарных частиц. Во всех ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического, барионного, лептонных зарядов, а также изотопического спина и его проекции.

5°. Ядерные реакции изучаются методами теории столкновений. Вероятность ядерной реакции характеризуется величиной эффективного сечения σ . Наряду с эффективным сечением, ядерные реакции характеризуются *выходом* — отношением числа ядерных превращений к числу исходных частиц a . Функцию, описывающую зависимость σ от энергии бомбардирующих частиц, называют *функцией возбуждения ядерной реакции*. Ядерные реакции можно рассматривать как квантовые переходы системы $(a + A)$ в систему $(b + B)$.

В ряде случаев ядерная реакция может происходить неоднозначно, т. е., наряду со схемой $a + A \rightarrow b + B$, она может протекать по схеме $a + A \rightarrow C + c$, т. е. $A(a, b)C$, и по другим схемам. Возможные пути протекания ядерной реакции называют ее *каналами (модами)*. Начальный этап реакции называют *входным каналом*, а конечный — *выходным*. Если энергия налетающей частицы ниже порога эндотермической реакции, то эта ядерная реакция идти не может (соответствующий канал называют *закрытым*).

6°. Различают ядерные реакции, протекающие в один и два этапа. Первые называют *прямыми ядерными реакциями*, они характеризуются малым временем протекания $\sim 10^{-21} - 10^{-23}$ с. При прямой реакции частица a , налетающая на ядро-мишень A , сталкивается с одним нуклоном (максимум с 2—3 нуклонами) ядра A , передавая прямо ему импульс и энергию. Таковы, например, реакции типа (n, n) , (n, p) , (p, n) , (p, p) , играющие заметную роль при обстреле ядер нуклонами с энергией порядка нескольких десятков МэВ.

Возможен другой ход ядерной реакции. На первом этапе налетающая частица застревает в ядре-мишени. Энергия влетевшей в ядро частицы быстро распределяется между нуклонами ядра, и ни один из них не получает достаточной энергии для вылета из ядра. Проходит большое время сравнительно с характерным *ядерным временем* (10^{-22} — 10^{-23} с), пока энергия в ядре вновь концентрируется на одной частице и следует вылет ее из ядра (второй этап ядерной реакции). Такие ядра, образовавшиеся в результате поглощения частицы и находящиеся в возбужденном состоянии, называют *составными ядрами (компаунд-ядра)*. Ядерная реакция при этом идет как бы в два этапа:



где C^* — составное ядро. Время жизни составных ядер достигает 10^{-14} — 10^{-15} с.

7°. Характер распада составного ядра не зависит от того, каким образом оно образовалось. Тип распада составного ядра зависит от энергии возбуждения ядра, момента импульса и некоторых других характеристик ядра. Различные возможные способы распадов имеют ту или иную вероятность, определяемую *парциальной шириной* Γ_i , соответствующей данному способу распада. Вероятность ω_b распада составного ядра с испусканием частицы b (п. 4°)

$$\omega_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma},$$

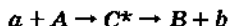
где Γ_b — парциальная ширина данного типа распада, Γ — полная ширина, равная сумме всех ширин, соответствующих всем возможным способам распада. Ширина уровня $\Gamma = \sum \Gamma_b$ здесь есть мера неопределенности энергии ядра в данном состоянии, связанная с соотношением неопределенности для энергии и времени. Сечение $\sigma(a, b)$ ядерной реакции $A(a, b)B$ (п. 4°) $\sigma(a, b) = \sigma(a)\omega_b$, где $\sigma(a)$ — сечение образования составного ядра:

$$\sigma(a) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\lambda^2}{4\pi} D_l \eta_l.$$

Здесь l — момент импульса налетающих частиц (в единицах $\hbar$), λ — длины их дебройлевских волн, D_l — вероятность прохождения через потенциальный барьер налетающей частицы с моментом импульса l , η_l — вероятность прилипания этой частицы к ядру-мишени, определяемая ядерным взаимодействием a и A (п. 4°).

В капельной модели ядра налетающая частица рассматривается как источник повышения «температуры» ядра-капли, а вылетевшая из ядра частица — как результат «испарения» из капли ядерного вещества.

8°. В соответствии с соотношением неопределенностей энергетические уровни составного ядра C^* имеют конечную ширину $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$, где τ — время жизни ядра в данном состоянии («на данном уровне»). Если расстояние ΔE между соседними уровнями ядра C^* больше ширины этих уровней, то энергетический спектр ядра считают квазинепрерывным. Соответственно образование составного ядра может происходить при любых значениях кинетической энергии T частицы a . В этом случае ядерную реакцию



называют *нерезонансной*.

Если $\Delta E < \Gamma$, то составное ядро может образовываться, а идущая через него ядерная реакция может осуществиться лишь при условии, что энергия частицы a соответствует попаданию энергии составного ядра в интервал Γ неопределенности положения энергетического уровня ядра. Такую ядерную реакцию называют *резонансной*, так как ее сечение $\sigma(a, b)$ зависит от энергии T частицы a резонансным образом — заметно изменяется с изменением энергии T вблизи резонансного значения T_0 .

Эту зависимость сечения $\sigma(a, b)$ от T описывают формулой Брейта—Вигнера. Для резонансной реакции, вызываемой частицами a с нулевым орбитальным моментом импульса ($l = 0$) и идущей через составные ядра C^* , формула Брейта—Вигнера имеет вид

$$\sigma(a, b) = \pi \lambda_a^2 \frac{2J_C + 1}{2(J_A + 1)(2J_a + 1)} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(T - T_C)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

где $\lambda_a = \frac{\lambda_0}{2\pi}$, λ_0 — дебройлевская длина волны частицы a , Γ_a и Γ_b — парциальные ширины уровня составного ядра C^* , соответственно, на частицу a и ядро-мишень A (упругое рассеяние частиц a) и на частицы b и B , Γ — полная ширина уровня составного ядра, J_C — спин составного ядра, а J_A и J_a — спины сталкивающихся частиц A и a .

2. ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

1°. Ядерные реакции классифицируются: а) по энергии вызывающих их частиц; б) по роду участвующих в них частиц; в) по роду участвующих в них ядер; по характеру происходящих ядерных превращений.

2°. Различают ядерные реакции при малых, средних и высоких энергиях. Реакции при малых энергиях (порядка эВ) происходят в основном с участием нейтронов. Реакции при средних энергиях (до нескольких МэВ) вызываются также заряженными частицами, гамма-квантами и *вторичными космическими лучами*. Реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи МэВ) приводят к разложению ядер на составляющие их нуклоны и к рождению отсутствующих в свободном виде элементарных частиц (*мезонов, гиперонов и др.*).

3°. По роду участвующих в ядерных реакциях частиц различают: а) реакции под действием нейтронов, б) реакции под действием заряженных частиц — протонов, дейтронов (ядер тяжелого водорода), альфа-частиц (ядер гелия) и многозарядных ионов тяжелых химических элементов; источниками заряженных частиц являются: *естественно-радиоактивные* элементы, *ускорители* заряженных частиц, космические лучи; в) реакции под действием гамма-квантов.

4°. По роду участвующих в ядерных реакциях ядер различают: реакции на легких ядрах (с массовыми числами $A < 50$), реакции на средних ядрах ($50 < A < 100$) и реакции на тяжелых ядрах ($A > 100$).

5°. Для реакций под действием заряженных частиц характерно наличие кулоновского потенциального барьера, который должны преодолеть частицы, чтобы проникнуть в ядро и вызвать реакцию. Благодаря *туннельному эффекту* такие реакции начинаются при энергиях частиц, меньших высоты потенциального барьера. Сходство механизмов ядерных реакций под действием заряженных частиц и нейтронов заключается в образовании возбужденного составного ядра с его последующим распадом. Различие ядерных реакций на заряженных частицах и нейтронах сказывается за пределами ядра и связано с разной проницаемостью кулоновского барьера для частиц, имеющих заряд и нейтроны. В области малых энергий наиболее вероятно неупругое рассеяние протона p или альфа-частицы α , т. е. реакции (p, p) и (α, α) . В области средних энергий ($E \approx 1$ МэВ) становятся возможными реакции (p, n) , (α, n) , $(\alpha, 2n)$ и $(\alpha, 3n)$ с вылетом в каждом акте реакции соответственно одного, двух и трех нейтронов n .

6°. Особым видом реакции является реакция срыва на дейтронах d типа (d, p) или (d, n) .

Ввиду слабой связи протона с нейтроном в дейтроне, а также благодаря большим размерам дейтрона, при его приближении к ядру-мишени нейтрон проникает в ядро, а протон находится вне его. В результате образуется ядро, являющееся изотопом ядра-мишени. Такие ядерные реакции, происходящие при энергиях d порядка нескольких МэВ, называют *реакциями срыва*. При этом реакция (d, p) оказывается более вероятной, чем (d, n) , и ядро характеризуется небольшой энергией возбуждения, часто меньшей, чем энергия связи нейтрона, определяющая возможность его распада. При больших энергиях дейтронов ядерные реакции срыва остаются преобладающим типом реакций на дейтронах. Однако в этом случае как нейтрон, так и протон дейтрона могут проникать в ядро, в то время как другая часть дейтрона остается вне мишени. Поэтому при больших энергиях дейтронов существует одинаковая вероятность реакций (d, p) и (d, n) .

7°. Нейтрону не нужно преодолевать потенциальный барьер для проникновения в атомное ядро. Поэтому экзотермические ядерные реакции под действием нейтронов наиболее вероятны при низких тепловых

энергиях нейтронов порядка сотых долей эВ. Реакции с нейтронами при малых энергиях идут с образованием составного ядра и являются резонансными. Распространенной реакцией для медленных нейтронов на ядрах, за исключением самых легких, является *радиационный захват* нейтронов протонами ядер (n, γ), в результате которого составного ядра не образуется, а ядро возвращается из возбужденного в основное состояние, испустив γ -квант. Наряду с радиационным захватом нейтронов происходит их испускание с первоначальной энергией (*упругое рассеяние* нейтронов). Для быстрых нейтронов имеет место *неупругое их рассеяние* с испусканием гамма-квантов (n, γ). Нейтроны также вызывают реакции деления ядер.

8°. При взаимодействиях ядер с налетающими гамма-квантами происходит *фотоядерная реакция* (*ядерный фотоэффект*). Виды этой реакции: испускание ядром протона, нейтрона, а также деление (*фотоделение*) ядер. Одной из распространенных реакций является *фоторасщепление дейтрона*: $d + \gamma \rightarrow n + p$, которое становится возможным, когда энергия гамма-кванта превысит энергию связи протона и нейтрона в дейтроне (2,23 МэВ). Ядерный фотоэффект объясняется с помощью представления о составном ядре, возбужденном поглощением гамма-кванта. В этой реакции наиболее вероятно испускание нейтрона. Наряду с этим (для тяжелых ядер) существует процесс выбивания протона из ядра прямым «ударом» гамма-квантов, при котором вылетающий протон забирает почти всю энергию γ -кванта (*прямой ядерный фотоэффект*). Эффективные сечения фотоядерных реакций характеризуются очень широким максимумом в области энергий $E_\gamma = 10\text{—}20$ МэВ почти для всех ядер (так называемый *гигантский резонанс*). При $E_\gamma \geq 2m_\pi c^2$, $E_\gamma \geq 2m_{p,n} c^2$ происходят реакции *фоторождения мезонов, нуклонов* и т. д. (m_π — масса покоя π -мезона, $m_{p,n}$ — масса покоя нуклона). Область фоторождения соответствует энергиям $10^8\text{—}10^9$ эВ.

9°. *Делением (вынужденным делением) атомного ядра* называют распад возбужденного составного ядра на 2 (значительно реже на 3) близких по массе ядра — *осколка деления*. Реакция деления под действием нейтронов становится энергетически выгодной для средних

и тяжелых ядер с массовым числом $A > 100$. Неустойчивость таких ядер относительно деления связана с большим количеством содержащихся в них протонов и соответственно значительными силами кулоновского отталкивания (особенно вблизи границ ядра). Вследствие этого отталкивания потенциальный барьер, который нужно преодолеть при делении составного ядра, имеет небольшую высоту, равную $E_{\text{акт}}$ и называемую *энергией активного деления ядра*. Такую энергию возбуждения должно получить ядро, поглощая нейтрон, для того, чтобы осуществить деление. Энергия возбуждения ядра равна сумме кинетической энергии налетающего нейтрона и его энергии связи $E_{\text{св}}$ в составном ядре. Энергия активации $E_{\text{акт}}$ убывает с увеличением так называемого *параметра делимости* Z^2/A , где A и Z — зарядовое и массовое числа ядра. Энергия $E_{\text{св}}$ зависит от четности ядра. Поэтому кинетическая энергия нейтронов, необходимая для осуществления деления ядра и равная $E_{\text{акт}} - E_{\text{св}}$, может заметно отличаться у разных изотопов одного и того же химического элемента.

У сверхтяжелых ядер (например, у ядер урана) энергия $E_{\text{акт}}$ столь мала, что возможно *самопроизвольное (спонтанное) деление ядер*, не связанное с какими-либо внешними воздействиями и осуществляющееся путем туннельного эффекта.

10°. В рамках обобщенной модели ядра деление ядра рассматривается как результат такой деформации ядерной поверхности, при которой возникает ее неустойчивость, приводящая к возникновению «перетяжки» и последующему отделению друг от друга двух и более частей ядра по разные стороны «перетяжки» (подобно дроблению жидкой капли). Капельная модель ядра приводит к следующему условию, определяющему возможность деления ядра: $\frac{Z^2}{A} \geq 17$. Это условие вы-

полняется для всех ядер, начиная с серебра $^{108}_{47}\text{Ag}$, для которого параметр деления ≈ 20 . Из обобщенной модели следует, что ядра совершенно неустойчивы относительно деления и не могут существовать в природе, если

их параметр $\frac{Z^2}{A} \geq \frac{Z^2}{A_{\text{кр}}}$ (критическое значение параметра деления). По разным оценкам $\frac{Z^2}{A_{\text{кр}}} = 45-49$.

Энергетическая неустойчивость тяжелых ядер по отношению к делению связана с тем, что удельная энергия связи в тяжелых ядрах составляет $\approx 7,6$ МэВ, в то время как для ядер атомов середины Периодической системы энергия связи на один нуклон $\approx 8,7$ МэВ.

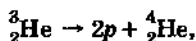
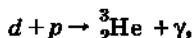
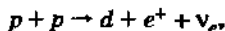
11°. Наиболее вероятным в реакции деления является деление ядра на две части. При делении тепловыми нейтронами и спонтанном делении отношение масс осколков примерно 3 : 2. Вероятность деления ядра на три части составляет $10^{-2}-10^{-6}$ от вероятности деления на две части. Деление ядра на еще большее число частей имеет пренебрежимую вероятность при обычных энергиях частиц. Одновременно с делением тяжелого ядра на 2 осколка из ядра вылетает несколько нейтронов, называемых *мгновенными нейтронами*. Оба ядра-осколка перегружены нейтронами и в момент образования находятся в сильно возбужденных состояниях. Поэтому они испытывают несколько последовательных β^+ -распадов, а также испускают сравнительно небольшое число так называемых *запаздывающих нейтронов* (для урана они составляют около 1% от всех нейтронов деления).

Энергия реакции деления тяжелых ядер освобождается главным образом в виде кинетической энергии осколков (около 89% при делении ядер $^{235}_{52}\text{U}$ *тепловыми нейтронами*), а также в виде энергии нейтронов деления, γ -квантов и частиц-продуктов β^- -распада).

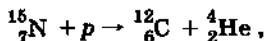
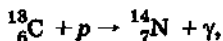
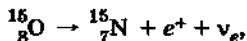
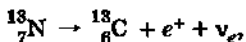
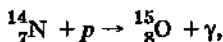
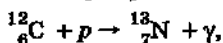
12°. Особым видом ядерных реакций являются экзотермические реакции синтеза легких ядер, эффективно протекающие при сверхвысоких температурах (порядка 10^7-10^9 К) самопродолжающиеся за счет значительного выделения в них энергии. Такие реакции называют *термоядерными*. Высокие температуры в них необходимы для того, чтобы кинетическая энергия теплового движения ядер, оказалась достаточной для преодоления кулоновского потенциального барьера ядер и последую-

щего возбуждения реакции синтеза. Термоядерные реакции начинаются при энергиях теплового движения ядер, несколько меньших высоты потенциального барьера (туннельный эффект).

13°. Термоядерные реакции являются, по-видимому, основными источниками энергии звезд. Известны два *термоядерных цикла*, в которых энергосвечение происходит за счет превращения ядер водорода в ядра гелия. В одном из вариантов *протонно-протонного цикла*,



ядро гелия образуется из 4 протонов, и выделяется энергия. В одном из вариантов *углеродно-азотного цикла*,



т. е. $4p \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$ (ν_e — электронное нейтрино, γ — гамма-квант), ядро углерода ${}^{12}_6\text{C}$ играет роль «катализатора»; этот цикл также сопровождается выделением энергии.

3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

1°. Зависимость сечения ядерной реакции деления от энергии вызывающих ее нейтронов различна для разных ядер. Для одной группы ядер (например,

^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu) сечение реакции имеет максимумы для *медленных нейтронов* ($E \approx 0,025$ эВ), а также для *промежуточных нейтронов* ($E \approx 1-10^2$ эВ). Для другой группы ядер (например, ^{232}Th , ^{238}U) эффективное сечение реакции деления является наибольшим для *быстрых нейтронов* ($E \approx 10^6$ эВ). Это связано с различной энергией связи нейтронов в ядрах с четным или нечетным числом нуклонов в ядре. В случае захвата нейтрона ядром $^{235}_{92}\text{U}$, захваченный нейтрон является четным, и его энергия связи больше, чем энергия связи нейтрона, захваченного ядром $^{238}_{92}\text{U}$ и являющегося нечетным.

2°. В каждом акте реакции деления тяжелых ядер из сильно возбужденных ядер испускаются от 2 до 3 мгновенных нейтронов. Нейтроны деления, взаимодействуя с соседними ядрами делящегося вещества, в свою очередь могут вызывать их деление. Такую реакцию деления называют *цепной* по аналогии с цепными химическими реакциями, продукты которых могут вновь вступать в соединения с исходными веществами. Особенностью подобных реакций является непрерывное восстановление активных центров. В цепной реакции деления роль активных центров играют нейтроны деления.

3°. Характер протекания во времени цепной реакции деления тяжелых ядер под действием нейтронов определяется значением *коэффициента размножения нейтронов* k , равного отношению чисел нейтронов, поглощаемых ядрами и вызывающих их деление в данном и предыдущем звеньях цепи. Для осуществления незатухающей цепной реакции деления необходимо, чтобы выполнялось условие: $k \geq 1$.

Скорость нарастания цепной реакции деления равна скорости увеличения числа нейтронов, вызывающих деление ядер:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k-1}{\tau} n,$$

где τ — среднее время жизни одного поколения нейтронов.

При $k > 1$ $\frac{dn}{dt} > 0$, и реакцию называют *саморазгоняющейся (развивающейся)*, а ее режим — *надкритическим*. При $k = 1$ $n = \text{const}$ и реакцию называют *самоподдерживающейся*, а ее режим — *критическим*. При $k < 1$ цепная реакция затухает: $\frac{dn}{dt} < 0$.

4°. Коэффициент размножения нейтронов всегда меньше среднего числа ν нейтронов, высвобождающихся при делении одного ядра рассматриваемого тяжелого изотопа. Это связано, во-первых, с тем, что цепная реакция проходит в пределах ограниченного объема пространства, вызываемого *активной зоной*. Поэтому часть нейтронов и не участвует в цепной реакции. Во-вторых, есть вероятность *радиационного захвата* нейтрона ядром, т. е. испускания составным ядром γ -кванта без деления самого ядра.

Соответственно важнейшей характеристикой ядерного горючего служит величина

$$\eta = \frac{\sigma(n, f)}{\sigma(n, f) + \sigma(n, \gamma)} \nu,$$

где $\sigma(n, f)$ и $\sigma(n, \gamma)$ — сечения реакций деления ядра и радиационного захвата нейтрона. Наконец, в реальных ядерных установках часть нейтронов деления захватывается неделяющимися ядрами (замедлителями, конструкционных материалов, продуктов реакции, примесей). В результате

$$k = \eta P(1 - \mu),$$

где $P < 1$ — вероятность того, что нейтроны деления остаются в пределах активной зоны, μ — вероятность захвата нейтронов неделяющимися ядрами. Значение вероятности P зависит от формы и размеров активной зоны, уменьшаясь с уменьшением размеров этой зоны. Минимальные размеры активной зоны, при которых еще возможно осуществление реакции деления, т. е.

$$P_{\min} = \frac{1}{\eta(1 - \mu)},$$

называют *критическими размерами*. Массу делящегося вещества, находящуюся в активной зоне критических размеров, называют *критической массой*.

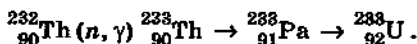
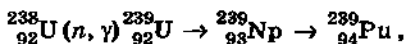
5°. В атомной бомбе используется неуправляемая цепная реакция деления ядер урана $^{235}_{92}\text{U}$ или плутония $^{239}_{94}\text{Pu}$. Реакция осуществляется мгновенными нейтронами деления, обладающими кинетической энергией порядка 1 МэВ. Среднее время жизни этих быстрых нейтронов очень мало (10^{-8} — 10^{-7} с), а скорость развития реакции (п. 3°) столь велика, что за время порядка 10^{-6} с выделяется огромная энергия. Эту энергию принято выражать в *тротиловом эквиваленте* — массе тротилового заряда, при взрыве которого выделяется такая же энергия. Тротиловый эквивалент 1 кг $^{235}_{92}\text{U}$ при полном делении всех его ядер равен 20 000 т тротила.

До момента взрыва атомной бомбы ее ядерный заряд, масса которого больше критической, разделен на несколько не взаимодействующих частей с массами, меньшими критической. Для осуществления взрыва все ее части быстро соединяются вместе.

6°. *Ядерным реактором* называют установку, в которой осуществляется управляемая цепная реакция деления. По энергии E_n нейтронов, вызывающих деление, ядерные реакторы делятся на быстрые ($E_n \approx 1$ МэВ), тепловые ($E_n \approx 0,025$ эВ) и промежуточные. В качестве делящегося вещества — ядерного горючего используют природный изотоп урана $^{235}_{92}\text{U}$ (0,7% в природной смеси) и искусственно полученные изотопы $^{233}_{92}\text{U}$ и плутония $^{239}_{94}\text{Pu}$, $^{241}_{94}\text{Pu}$, и $^{243}_{94}\text{Pu}$, деление которых осуществляется нейтронами любой энергии.

Природные изотопы урана $^{238}_{92}\text{U}$ (99,3% в природной смеси) и тория $^{232}_{90}\text{Th}$ (100%) делятся только быстрыми нейтронами ($E_n \geq 1$ МэВ), но при этом сече-

ния деления столь малы, что коэффициент размножения нейтронов $k < 1$. Поэтому $^{238}_{92}\text{U}$ и $^{232}_{90}\text{Th}$ не могут использоваться в качестве ядерного горючего. Они служат сырьем для воспроизводства ядерного горючего — захватив нейтрон и испытав два последовательных β^- -распада, ядро $^{238}_{92}\text{U}$ превращается в $^{239}_{94}\text{Pu}$, а ядро $^{232}_{90}\text{Th}$ в $^{233}_{92}\text{U}$:



Большую часть действующих ядерных реакторов составляют тепловые с урановым ядерным горючим.

7°. Для торможения нейтронов деления до нужных небольших тепловых значений энергии в активную зону теплового реактора помещают, помимо ядерного горючего, *замедлитель*. В качестве замедлителя используют вещества с малой атомной (молярной) массой, имеющие большое сечение захвата нейтронов. Для этой цели используют обычную (H_2O) воду, графит и соединения бериллия. По расположению в активной зоне ядерного горючего и замедлителя ядерные реакторы делятся на *гомогенные*, в которых горючее и замедлитель равномерно перемешаны, образуя раствор или суспензию, и *гетерогенные*, в которых горючее и замедлитель расположены порознь в виде отдельных блоков. В быстрых реакторах замедлителя нет.

В целях уменьшения вероятности ухода нейтронов из активной зоны реактора последнюю окружают слоем *отражателя нейтронов*, изготовленного из тех же материалов, что замедлитель.

8°. Система охлаждения предназначена для отвода из активной зоны реактора выделяющейся в ней энергии деления (обычно в виде определенного количества теплоты), в которую переходит кинетическая

энергия осколков деления при их торможении в делящемся веществе и замедлителе. Через активную зону реактора прокачивается теплоноситель (вода, водяной пар, He, CO₂, воздух, некоторые жидкие металлы и сплавы), который затем через теплообменник передает тепло во вторичную тепловую систему реактора.

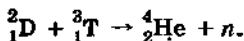
9°. Системы регулирования и безопасности обеспечивают возможность управления цепной реакцией, недопущения ее самопроизвольного разгона, а также обеспечивают защиту окружающего реактор пространства от интенсивных потоков нейтронов и гамма-квантов, существующих в активной зоне реактора. Для первой цели применяютсядвигаемые в активную зону стержни (бор, кадмий). Вторая цель достигается окружением реактора массивными слоями веществ, сильно поглощающих нейтроны и гамма-кванты (например, комбинацией бетона и свинца), а также полной замкнутостью цепей теплоносителя и отсутствием утечек в них.

10°. В *реакторе-размножителе* ядра одного делящегося вещества превращаются в результате ядерных реакций в ядра другого делящегося вещества, причем количество воспроизводимого делящегося изотопа превышает количество сжигаемого первоначального изотопа. В *бридерных реакторах* воспроизводимое и первоначальное вещества представляют собой изотопы одного и того же химического элемента (например, «сжигается» ^{235}U , воспроизводится ^{233}U), в *реакторах-конверторах* — изотопы разных химических элементов (например, «сжигается» ^{235}U , воспроизводится ^{239}Pu).

11°. Для создания высокой температуры в неуправляемой термоядерной реакции ($T \approx 5 \cdot 10^7 \text{ K}$) применяется атомная бомба, дающая такую температуру при взрыве на весьма малый ($\sim 10^{-6} \text{ с}$) промежуток времени, за который, однако, успевает произойти термоядерная реакция в массе изотопов водорода (*водородная бомба*).

12°. В основе термоядерной энергетики лежит использование энергии экзотермических реакций син-

теза легких ядер. Наиболее доступной по области необходимых температур является реакция между ядрами дейтерия и трития:



В этой реакции выделяется 17,6 МэВ. Энерговыделение, рассчитанное на один нуклон в такой реакции, составляет $\approx 3,5$ МэВ/нуклон, в то время как при делении ядра ${}^{238}_{92}\text{U}$ эта величина составляет 0,85 МэВ/нуклон.

Управляемая термоядерная реакция, самоподдерживаясь за счет выделения энергии, сможет длительное время протекать в контролируемых масштабах. Нагрев и управление поведением термоядерной смеси при этом определяются тем обстоятельством, что смесь при сверхвысоких температурах переходит в состояние *плазмы*. Для такого нагрева скорость подвода энергии к смеси должна превышать скорость утечки энергии из нее. Основными видами утечек являются тепло, уходящее через стенки реактора, а также *тормозное излучение* в плазме.

Важнейшей задачей практического осуществления управляемых термоядерных реакций является создание таких условий, при которых высокотемпературная плазма устойчиво удерживается с помощью магнитных полей в состоянии термозоляции. Для этой цели применяют *магнитные ловушки* и специальные тороидальные разряды, в которых имеется продольное магнитное поле. Магнитные ловушки удерживают плазму от контакта со стенками реактора. В системах с плазменными шнурами происходит стягивание плазмы в шнур магнитным полем тока, протекающего в плазме.

13°. Образование возбужденных ядер в реакциях с нейтронами приводит к распаду ядер спустя значительное время после окончания реакции, вызванной нейтронным облучением. Излучение таких ядер, состоящее обычно из бета-частиц и гамма-квантов, является примером *искусственной радиоактивности*. Периоды полураспада искусственно-радиоактивных ядер лежат в интервале от долей секунды до тысяч лет.

Глава 4

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ

1°. С экспериментальной точки зрения *частицы* есть детектируемые «сгустки энергии и импульса», причем определенные частицы считаются «*фундаментальными*» в том смысле, что именно они участвуют в элементарных актах взаимодействия, как это представляется на данной стадии познания. С появлением новой экспериментальной информации приходится пересматривать исходные позиции. Необходимость такого пересмотра вытекает из требования, чтобы теория могла количественно объяснить любой осуществимый эксперимент.

На каждой стадии действительно удается считать некоторые частицы фундаментальными и не сталкиваться с необходимостью изменения своих представлений. Причина заключается в том, что согласно *квантовой механике* можно с хорошей точностью исключить из рассмотрения те состояния, энергия возбуждения которых много больше рассматриваемой характерной энергии. Например, энергия возбуждения атомного ядра в миллион раз больше энергии возбуждения атома, поэтому при атомных энергиях в несколько электрон-вольт ядро можно феноменологически рассматривать как точечную массу. Замечательный факт заключается в том, что хотя после становления атомной физики обнаружены новые структурные уровни (*ядра, адроны, кварки*), динамические принципы в том виде, как они сформулированы *релятивистской локальной квантовой теорией*, продолжают действовать. Преемственность теорий различных структурных уровней известна как *принцип соответствия*.

2°. *Элементарная частица* — в точном значении этого термина — первичная, неразложимая частица. Во Вселенной все «состоит» из элементарных частиц. В понятии элементарные частицы находит выраже-

ние древняя идея о первосущностях, определяющих все наблюдаемые свойства мира. Вообще говоря, эта идея является экстраполяцией известных фактов и сколько-нибудь строгого обоснования не имеет. Нельзя с уверенностью утверждать, что частицы, воспринимаемые как элементарные (первичные), существуют. Не исключено также, что утверждение «состоит из ...» может оказаться лишенным содержания. В этом случае от данного определения «элементарности» придется отказаться. Существование элементарных частиц — это своего рода постулат, который требует проверки.

3°. Как правило, термин «элементарная частица» употребляют в современной физике не в своем точном смысле, а менее строго — для наименования большой группы мельчайших наблюдаемых частиц, подчиненных условию, что они не являются атомами или атомными ядрами, т. е. объектами заведомо составной природы (исключение составляет протон — ядро атома водорода). В этом смысле их иногда называют *субъядерными частицами*. Так, определяемая группа элементарных частиц весьма обширна. Помимо протона (p), нейтрона (n), электрона (e) и фотона (γ), к ней относятся: π -мезоны (π), μ -лептон (μ), τ -лептон (τ), нейтрино трех типов (ν_e, ν_μ, ν_τ), так называемые *странные частицы* (K -мезоны и гипероны), очарованные и прелестные частицы, разнообразные резонансы, промежуточные векторные бозоны — всего более 400 частиц, в основном нестабильных.

Число частиц, включаемых по мере их открытия в эту группу, постоянно растет (и будет расти). Очевидно, что такое огромное количество частиц не может выступать в качестве элементарных составляющих (первосущностей), и, действительно, было показано, что большая часть перечисленных частиц (все мезоны и барионы) представляют собой составные частицы. Использование названия элементарные частицы применительно ко всем упомянутым частицам имеет исторические причины.

4°. Основным принципом построения фундаментальной теории является принцип симметрии и стремление к объединению. С симметрией определен-

ной физической системы связана *ненаблюдаемость* (неизмеримость) некоторых ее параметров, что означает *инвариантность* (неизменность) системы относительно соответствующих *преобразований*, образующих *группу симметрий*, и вытекающие отсюда *законы сохранения* так называемых сопряженных величин.

Из ненаблюдаемости абсолютного положения в пространстве, т. е. инвариантности физических явлений относительно пространственных сдвигов (трансляций), образующих трехпараметрическую *группу сдвигов* $T(3)$, следует *закон сохранения импульса*, точность которого ограничена квантово-механическим *соотношением неопределенностей* (соотношением Гейзенберга) $\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$, где Δp_x и Δx — неопределенности измерения соответственно проекции импульса и координаты, $\hbar$ — постоянная Планка.

Ненаблюдаемость абсолютного времени, т. е. инвариантность пространства—времени относительно *преобразований сдвига во времени*, образующих однопараметрическую *группу сдвигов* $T(1)$, дает *закон сохранения энергии*, точность которого ограничена квантово-механическим *соотношением неопределенностей* $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, где ΔE — неопределенность измерения энергии за время измерения Δt .

Из ненаблюдаемости абсолютного направления в пространстве, т. е. инвариантности явлений относительно пространственных поворотов, образующих трехпараметрическую *группу пространственных вращений* $SO(3)$ следует *закон сохранения момента импульса*, точность которого ограничена квантово-механическим соотношением неопределенностей $\Delta L_z \Delta \varphi \sim \hbar$, где ΔL_z и $\Delta \varphi$ — неопределенности измерения соответственно проекции момента импульса и угла.

Ненаблюдаемость равномерного поступательного движения, т. е. инвариантность физических явлений преобразованиям движения (*преобразованиям Лоренца*), образующим трехпараметрическую *группу* (однородную *группу Лоренца*) пространственных поворотов $SO(3)$, дает *закон сохране-*

ния положения центра масс. Ниже представлены соответствия непрерывных симметрий пространства-времени и законов сохранения.

Неизмеримость	Инвариантность относительно	Законы сохранения	Точность
абсолютного положения в пространстве (3 степени свободы)	сдвига в пространстве (группа трансляций $T(3)$)	импульса p	$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$, $\Delta p_x \Delta t \sim \hbar/c$
абсолютного времени (1 степень свободы)	сдвига во времени (группа трансляций $T(1)$)	энергии E	$\Delta E \Delta t \sim \hbar$
абсолютного направления в пространстве (3 степени свободы)	пространственных вращений (группа $SO(3)$)	момента импульса L	$\Delta L_x \Delta \varphi \sim \hbar$
равномерного поступательного движения (3 степени свободы)	преобразования движения, пространственно-временных поворотов (группа Лоренца $SO(3)$)	центра масс	полная

5°. Для элементарных частиц, помимо законов сохранения, связанных с симметрией пространства-времени, существуют законы сохранения, связанные с симметрией абстрактного пространства квантовомеханических операторов и векторов состояний (*гильбертова пространства*), так называемые *внутренние симметрии*. Например, закон сохранения электрического заряда является следствием ненаблюдаемости изменения фазы комплексной функции поля, описывающей заряженные частицы, относительно незаряженных. Изменение фазы функции поля осуществляется преобразованием, называемым *калибровочным*, при котором функция умножается на множитель $\exp(iaQ)$, где a — вещественный непрерывный параметр, Q — электрический заряд (в единицах *элементарного заряда* e). Калибровочные преобразования не меняют модуля функции, поэтому их называют *уни-*

тарными. В следующей таблице представлены соответствия *внутренних симметрий* и законов сохранения:

Неизмеримость постоянного фазового сдвига волновых функций	Инвариантность относительно глобальных калибровочных преобразований	Закон сохранения	Симметрия
электрически заряженных частиц	группа $U(1)$	электрического заряда Q	полная (эксп.) нарушена (теор.)
барионов	группа $U(1)$	барионного заряда B	* *
странных частиц	группа $U(1)$	странности S	нарушена в слабых взаимодействиях
очарованных частиц	группа $U(1)$	очарования C	то же
предельных частиц	группа $U(1)$	прелести b	* *
лептонов 1-го поколения	группа $U(1)$	e -лептонного числа l_e	полная
лептонов 2-го поколения	группа $U(1)$	μ -лептонного числа l_μ	то же
лептонов 3-го поколения	группа $U(1)$	τ -лептонного числа l_τ	* *
независимого фазового сдвига волновых функций истинных частиц (t -частиц)	локальных калибровочных преобразований группа $U(1)$	истинности	то же
Ненаблюдаемость	Инвариантность относительно	Закон сохранения	Симметрия
различия u - и d -кварков	замены $u \leftrightarrow d$, группа $SU(2)$	изоспина T	нарушена
различия u -, d -, s -кварков	замены $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s$, группа $SU(3)$	то же	то же
различия u -, d -, s -, c -кварков	замены $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s \leftrightarrow c$, группа $SU(4)$	* *	* *
различия u -, d -, s -, c -, b -кварков	замены $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s \leftrightarrow c \leftrightarrow b$, группа $SU(5)$	* *	* *
различия u -, d -, s -, c -, b -, t -кварков	замены $u \leftrightarrow d \leftrightarrow s \leftrightarrow c \leftrightarrow b \leftrightarrow t$, группа $SU(6)$	* *	* *
частиц с дробным барионным зарядом	преобразований цветной группы $SU(3)$	—	полная

6°. Преобразования симметрии обладают следующим свойством: два последовательных преобразования определенного типа эквивалентны одному преобразованию того же типа. Преобразования, обладающие таким свойством, образуют *группу (группу симметрий)*, если имеется также единичное преобразование и преобразование, обратное данному. Если порядок преобразований можно переставлять, то группу преобразований называют *перестановочной (коммутативной)* или *абелевой*, в противном случае группу называют *некоммутативной (неабелевой)*.

Из групп симметрий особо выделены *группы непрерывных преобразований*, элементы которых аналитически зависят от конечного числа непрерывных параметров. К таким группам относится *неоднородная группа преобразований Лоренца* (группа сдвигов $T(4)$ и вращений $SO(3)$ в четырехмерном пространстве), *унитарная абелева группа $U(1)$* — группа калибровочных преобразований первого рода, *унитарные, унимодулярные неабелевы группы $SU(n)$* — специальные унитарные группы, подгруппы комплексных унитарных матриц с единичным определителем, играющие важную роль в теории *сильного и электрослабого взаимодействий*.

Если параметры группы не зависят от пространственно-временных координат, то группы и соответствующие симметрии называют *глобальными*, если зависят, то — *локальными, калибровочными*.

7°. Помимо непрерывных преобразований пространства-времени и внутренних симметрий пространства квантовомеханических состояний большое значение в физике элементарных частиц имеют группы *несобственных дискретных преобразований*. К ним относятся *пространственные отражения, обращение времени, зарядовое сопряжение и их комбинации*. В следующей таблице (с. 918) представлены соответствия несобственных (дискретных) преобразований и *комбинированных (дискретных) преобразований и комбинированных законов сохранения*.

Неизмеримость	Инвариантность относительно	Сохранение	Симметрия
различия между частицами и античастицами	зарядового сопряжения	<i>C</i> -четности	нарушена в слабом взаимодействии
различия между левым и правым	пространственной инверсии	<i>P</i> -четности	то же
направления течения времени	обращения времени	<i>T</i> -четности	• •
направления течения времени и различия между левым и правым	пространственной и временной инверсии	<i>PT</i> -четности	• •
различия между частицей и античастицей и различия между левым и правым	пространственной инверсии и замены частицы на античастицу	<i>CP</i> -четности	• •
направления течения времени, различия между левым и правым и различия между частицей и античастицей	пространственной и временной инверсии и замены частицы на античастицу	<i>CPT</i> -четности	полная

Пространственные отражения (*инверсия пространства — операция *P*-четности*) — это операция замены правой ориентации на левую и наоборот. Например, для пространственно-временной точки $(t, \mathbf{r})$ $\hat{P}(t, \mathbf{r}) = (t, -\mathbf{r})$.

Для трехмерного пространства преобразование отражения не может быть сведено к пространственным вращениям. Следовательно, инвариантность относительно пространственных отражений не следует из инвариантности относительно вращения.

Преобразование обращения времени (*операция *T*-четности*) — обращение направления течения времени $\hat{T}(t, \mathbf{r}) = (-t, \mathbf{r})$. Инвариантность физических явлений относительно операции обращения времени с необходимостью приводит к симметрии сечений прямого и обратного процессов.

Экспериментально обнаруженные (1964 г.) особенности реакции распада K^0 -мезона на два π -мезона показали, что в микромире *T*-инвариантность нарушена.

Преобразование *зарядовое сопряжение* (операция *C-четности*) меняет знаки всех зарядов (электрический, лептонный, барионный, цветовой) у частиц на противоположные. Зарядовое сопряжение меняет частицу на *античастицу*. Например, электрон e^- при операции зарядового сопряжения переходит в античастицу e^+ — позитрон: $\hat{C}e^- = e^+$.

8°. По определению, *античастица* (по отношению к данной частице) — это частица, обладающая той же массой, спином, временем жизни, что и данная частица, но имеющая все *зарядовые квантовые числа (заряды)* противоположного знака. Зарядовыми квантовыми числами называют электрический заряд, лептонный заряд, барионный заряд, цветовой заряд. Античастица обычно обозначается той же буквой, что и частица, но со знаком «тильда» или черточкой над ней. Частицы, не обладающие никакими зарядовыми квантовыми числами, называются *истинно нейтральными*, например, фотон. Они сами являются своими античастицами.

9°. Инвариантность законов природы относительно сдвигов в пространстве-времени, пространственных вращений и движений с постоянной скоростью составляет сущность *специальной теории относительности (релятивистской теории)*. Перечисленные преобразования в совокупности образуют неоднородную *группу Лоренца*. Если рассматривать только повороты пространства-времени, затрагивающие временную координату (преобразования движения), то совокупность этих преобразований образует *подгруппу Лоренца* SO , удовлетворяющую условиям *ортogonalности (O)* и *унимодулярности (S)*. Эти преобразования соответствуют переходу от одной *инерциальной системы* к другой и называются собственно *преобразованиями Лоренца*.

10°. Точку четырехмерного пространства-времени (*мировую точку* — элементарное событие) обозначают координатами $x_\alpha = (x_0, x_i) = (ct, \mathbf{r})$, где греческий индекс α принимает значения 0, 1, 2, 3, а латинский индекс $i = 1, 2, 3$. Координата $x_0 = ct$ соответствует времени, измеренному в единицах расстояния (c — скорость света в вакууме), а координаты x_i соответствуют про-

пространственным координатам, например, x, y, z вектора $\mathbf{r}$. В таких *естественных единицах измерения* скорость становится безразмерной, например, скорость света $c = 1$, а масса m , энергия E и импульс $\mathbf{p}$ выражаются в одинаковых единицах. Для физики элементарных частиц удобными являются единицы, кратные электронвольту: мегаэлектронвольт (МэВ), гигаэлектронвольт (ГэВ) или тераэлектронвольт (ТэВ) ($1 \text{ ТэВ} = 10^3 \text{ ГэВ} = 10^6 \text{ МэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$). Мировую точку рассматривают как вектор четырехмерного пространства — *4-вектор*. При *преобразованиях Лоренца* координаты 4-вектора меняются, но остается неизменным (постоянным, инвариантным) квадрат длины 4-вектора (*релятивистский инвариант*), определяемый соотношением

$$x^2 = x_0 x_0 - (x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3) = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 = \text{inv.}$$

11°. Для свободной частицы измеряемые энергия E и 3-вектор импульса $\mathbf{p}$ образуют релятивистский *4-вектор импульса* $P = (E, \mathbf{p})$, инвариантный квадрат длины которого равен квадрату массы m частицы:

$$P^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 = \text{inv} \geq 0.$$

По определению, *виртуальной* называют частицу, для которой не выполняется равенство квадрата 4-импульса квадрату массы. Отклонение от равенства характеризует *виртуальность* частицы. Для реального фотона $P^2 = 0$, масса фотона равна нулю; для *виртуального фотона* $P^2 \neq 0$.

12°. В квантовой механике частицы описываются *волновыми функциями (векторами состояния)*, зависящими от пространственно-временных координат и переменной, связанной со спином частицы. Обычно в качестве спиновой переменной σ (*спиновое квантовое число*) выбирают значение проекции спина на какое-либо направление в пространстве. Спин частицы равен целому или полуцелому числу, и спиновая переменная пробегает ограниченное число дискретных значений. Таким образом, *волновая функция* частицы со спином является многокомпонентной. Для частиц с ненулевой массой число компонент равно числу проекций спина ($2\sigma + 1$).

Наиболее простой однокомпонентной волновой функцией описывается частица с $\sigma = 0$. У частицы со спином $1/2$ имеется два состояния, соответствующие двум возможным проекциям спина: $+1/2$ и $-1/2$, поэтому волновая функция такой частицы двухкомпонентна. Частица со спином 1 (имеющим три проекции: $+1, 0, -1$) описывается трехкомпонентной волновой функцией.

При преобразованиях Лоренца наряду с координатами изменяются и волновые функции. При этом волновые функции изменяются различным способом в зависимости от того, какой спин у частицы — целый или полуцелый, т. е. является частица бозоном или фермионом.

Волновые функции частиц с целым спином (бозоны) изменяются при преобразовании Лоренца так же, как соответствующие четырехмерные величины, т. е. как скаляры ($\sigma = 0$) и векторы ($\sigma = 1$). Такие волновые функции и соответствующие им частицы называют скалярными и векторными.

По-другому преобразуются волновые функции частиц с полуцелым спином (фермионы). Эти волновые функции называют спинорами, а описываемые ими частицы — спинорными. Специфичным для спиноров является то, что при повороте на угол 2π спинор изменяет знак, в то время как волновая функция бозона знака не меняет.

13°. Каждая волновая функция частицы подчиняется определенному уравнению, которое после преобразования Лоренца координат и функций не меняет свою форму; говорят, что уравнение ковариантно преобразованию Лоренца.

Релятивистски ковариантное уравнение для вещественной волновой функции $\varphi(x)$ свободной нейтральной скалярной частицы массой m (уравнение Клейна—Гордона—Фока) в естественной системе единиц ($c = \hbar = 1$) имеет вид

$$-(\partial_0^2 - \nabla^2)\varphi(x) = m^2\varphi(x),$$

где $m^{-1} = \lambda_C$ — комптоновская длина волны частицы

(в обычной системе единиц $\lambda_C = \frac{\hbar}{cm}$).

Для описания свободной заряженной частицы необходимо комплексное скалярное поле

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

которое характеризуется двумя вещественными функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Последние можно выразить через $\varphi(x)$ и ее комплексную сопряженную $\varphi^*(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$. Комплексные поля удобнее описывать с помощью функций φ и φ^* . Каждая из них подчиняется уравнению Клейна—Гордона—Фока.

14°. По определению, четырехмерная плотность тока $j_\alpha = (j_0, \mathbf{j})$ скалярного поля φ имеет вид

$$j_\alpha \sim \varphi^* \partial_\alpha \varphi - \varphi \partial_\alpha \varphi^*,$$

где

$$\partial_\alpha \equiv (\partial/\partial_0, \nabla) \equiv (\partial_0, \partial_k) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

— четырехмерный оператор Гамильтона (набла-оператор) — четырехмерная производная в пространстве-времени.

Ток вещественного поля равен нулю, а комплексного отличен от нуля. Вещественное поле описывает нейтральные частицы, а комплексное — заряженные скалярные частицы.

15°. Векторные частицы описываются четырехкомпонентной волновой функцией $A_\alpha(x)$. Каждая ее компонента подчиняется уравнению Клейна—Гордона—Фока. Функцию $A_\alpha(x)$ можно представить в виде

$$A_\alpha(x) = \xi_\alpha \exp \{iPx\},$$

где $Px = Ex_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$, а множитель ξ_α характеризует различные спинные состояния частицы. Об этих состояниях говорят как о состояниях с различной поляризацией, а ξ_α — 4-вектор поляризации. Но для описания векторной частицы нужна трехкомпонентная волновая функция.

Чтобы «убрать» лишнюю компоненту, налагают на A_α дополнительные, релятивистски инвариантные условия:

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0,$$

которые называют калибровкой Лоренца. Из четырех компонент 4-вектора поляризации ξ_α независимыми остаются только три.

16°. Уравнение для двухкомпонентного спинора $\chi(x)$, описывающего частицу со спином $1/2$, обычно записывают в виде системы двух линейных уравнений первого порядка:

$$(i\partial_0 + m)\chi(x) = (i\tau_k \partial_k)(i\tau_1 \partial_1)\varphi(x),$$

$$(i\partial_0 - m)\varphi(x) = (i\tau_k \partial_k)(i\tau_1 \partial_1)\chi(x),$$

где τ_k — матрицы Паули ($k = 1, 2, 3$), или двумерные комплексные эрмитовы (самосопряженные) матрицы с нулевым следом,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

либо в виде одного уравнения первого порядка; но для четырехкомпонентного спинора

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix},$$

который называют биспинором,

$$(i\gamma_\alpha \partial^\alpha - m)\Psi(x) = 0,$$

где γ_α — матрицы Дирака. Это уравнение называют *уравнением Дирака*, оно описывает поведение свободного электрона и его античастицы — *позитрона*.

Матрицы Дирака — это 4×4 матрицы, действующие на спинорную переменную четырехкомпонентного спинора Дирака (биспинора Ψ). Матрицы Дирака входят в квантовое волновое уравнение для релятивистской частицы со спином $1/2$, а также в *лагранжианы взаимодействия полей*, если во взаимодействии участвуют частицы со спином $1/2$ (например, *лагранжиан электромагнитного взаимодействия, слабого взаимодействия*). Матрицы Дирака γ_α представляют собой эрмитовы матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta},$$

$$\gamma_\alpha \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\alpha = 0,$$

$$\gamma_5^2 = I,$$

где

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. При вычислении сечений процессов с участием частиц со спином $1/2$ явный вид матриц Дирака не нужен, достаточно использовать указанные перестановочные соотношения. Однако при решении уравнения Дирака удобно пользоваться определенным представлением матриц Дирака. Часто применяют представление, в котором матрица γ_0 диагональна (*представление Дирака—Паули*). В этом случае матрицы γ_α и γ_5 имеют вид

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 1 & \tau_k \\ -\tau_k & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где τ_k — матрицы Паули, I — единичная 2×2 матрица.

Квантово-механические уравнения для частиц с различным спином «аналогичны» динамическому уравнению Ньютона классической физики. Однако в описании свойств и взаимодействия элементарных частиц более эффективным оказывается подход, основанный на *вариационных принципах*.

17°. Функция действия S среди физических величин занимает в некотором смысле центральное место. *Постоянная Планка $\hbar$* является квантом действия. По определению, действие от момента времени x_0 до момента x'_0 равно

$$S = \int_{x_0}^{x'_0} L(x_\alpha) dx_0 = \int \mathcal{L}(x_\alpha) dx_0 dV,$$

где $L(x_\alpha)$ — функция Лагранжа, $\mathcal{L}(x_\alpha) = \frac{\partial L}{\partial V}$ — плотность функции Лагранжа (*лагранжиан*), $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, x_α — координаты мировой точки. Например, для нерелятивистской частицы в статическом потенциальном поле $L = T - U$, где T — кинетическая энергия, U — потенциальная.

Центральная роль *функции действия* в физике обусловлена существованием *принципа наименьшего действия* (*принципа Гамильтона*). Согласно классической формулировке для реальных процессов в природе величина действия экстремальна — его *вариация* обращается в нуль: $\delta S = 0$.

Из инвариантности действия относительно тех или иных преобразований следуют законы сохранения. На основе принципа наименьшего действия из S и L получают уравнения движения (*уравнения Лагранжа*). Поэтому построение теории сводится к нахождению *фундаментального лагранжиана*, описывающего физический мир, и к решению вытекающих из него уравнений.

Наряду с тем, что лагранжиан должен быть инвариантен лоренцевым и C -, P -, T -преобразованиям, он должен быть вещественной функцией (хотя сами функции поля могут быть комплексными) и удовлетворять ряду математических требований. Лагранжиан выбирают так, чтобы он приводил к дифференциальным уравнениям для функций поля $\phi(x)$ не выше второго порядка, поэтому он может зависеть только от самих функций поля и их производных $\partial_\alpha \phi(x)$. Чтобы уравнения для поля были линейными, лагранжиан может содержать только квадратичную комбинацию членов относительно функций поля и их производных. Для описания локального взаимодействия лагранжиан должен быть функцией координат одной точки и не содержать функций и их производных в различных точках. Кроме того, предполагается, что лагранжиан не зависит явно от координат x . Таким образом, лагранжиан поля, описываемого многокомпонентной функцией $\phi(x)$, запишется в виде $\mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi)$.

Для получения уравнения поля надо найти вариацию действия и положить ее равной нулю.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1°. Информацию о взаимодействии элементарных частиц получают из экспериментов по *столкновению* (*рассеянию*) частиц. В зависимости от числа

взаимодействующих частиц все процессы (реакции) разделяются на *двухчастичные* и *многочастичные*. В двухчастичных процессах в начальном и конечном состояниях имеется по две частицы ($a\ b \rightarrow c\ d$). В многочастичных процессах при столкновении двух частиц большой энергии образуется более двух частиц ($a\ b \rightarrow c\ d\ e\ \dots$).

Обособлены *реакции распада*, в результате которых из одной частицы образуется несколько. К наиболее простым из них относятся двухчастичные и трехчастичные распады ($a \rightarrow b\ c$; $a \rightarrow b\ c\ d$).

Типичная схема двухчастичного столкновительного эксперимента $a\ b \rightarrow c\ d$ изображена на рис. VII.4.1. Пучок частиц a , выходящий из ускорителя, падает на неподвижную мишень, состоящую из частиц b . За мишенью образуются рассеянный пучок c и частицы отдачи рассеивателя d . Опыт заключается в наблюдении и изучении частиц c и d , возникающих при столкновении частиц a и b .

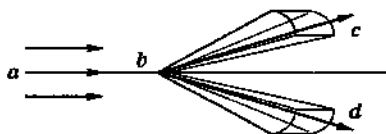


Рис. VII.4.1

Кроме метода с неподвижной мишенью используется метод *встречных пучков* — экспериментальный метод исследования элементарных частиц, в котором два пучка заряженных частиц, ускоренных до заданной энергии, движутся навстречу друг другу, взаимодействуя на участке встречи. Сталкивающиеся частицы предварительно ускоряются в *циклических* или *линейных ускорителях*, накапливаются и доускоряются в *накопителях* (накопительных кольцах) для увеличения как полного числа, так и концентрации частиц. Преимущество метода встречных пучков — достижение энергии реакции при заданной энергии ускоренных частиц, значительно превышающей энергию реакции в ускорителе с неподвижной мишенью. Максимальная энергия

реакции ($E_p = \sqrt{s}$ — энергия в системе центра масс) при столкновении встречных частиц с массами m_a , m_b с одинаковыми значениями 3-импульса p равна сумме энергий обеих частиц E_a и E_b :

$$E_p = \sqrt{s} = E_a + E_b.$$

Для ускорителя с неподвижной мишенью максимальная энергия реакции равна (скорость света $c = 1$)

$$E_p^* = \sqrt{s^*} = \sqrt{2E_a m_b + m_a^2 + m_b^2}.$$

Для частиц одинаковой массы m в ультрарелятивистском пределе при ускорении до одной и той же энергии ($E_a \approx E_b \approx E \approx p \gg m$) следует

$$E_p \approx 2p \approx 2E,$$

$$E_p^* = \sqrt{2(E+m)m} \approx \sqrt{2pm} \approx \sqrt{2Em}, \quad E_p \gg E_p^*.$$

Пример. Протонный ускоритель ($m = m_p \approx 10^{-3}$ ТэВ) на встречных пучках на энергию протона в пучке $E = 1$ ТэВ эквивалентен ($2E = \sqrt{2E_{\text{экр}} m_p}$) ускорителю с неподвижной мишенью на энергию $E_{\text{экр}} = \frac{2E^2}{m_p} = 2 \cdot 10^3$ ТэВ.

Ускорители на встречных пучках называют *коллайдерами* (от англ. collide — столкнуть).

Столкновение (рассеяние) двух частиц называют *упругим*, если новые частицы не возникают, частица a лишь рассеивается частицей b . При возникновении новых частиц говорят о *неупругом столкновении (рассеянии, процессе)*. При множественном рождении частиц говорят о *глубоко неупругом столкновении (рассеянии, процессе)*. Например, глубоко неупругое рассеяние электрона на протоне: $e p \rightarrow e + \text{адроны}$, допускаемое законами сохранения; или глубоко неупругое рассеяние нейтрино на протоне: $\nu_\mu p \rightarrow \mu + \text{адроны}$.

2°. На опыте измеряют число частиц $dN(E, \theta, \varphi)$, рассеянных в телесный угол $d\Omega$. Эта величина, пропорциональная телесному углу $d\Omega$, зависит от полярного угла θ и азимутального угла φ , определяющих направление от мишени на счетчик, а также от энергии E . Кроме того, $dN(E, \theta, \varphi)$ пропорционально потоку частиц N в падающем пучке. Отношение $\frac{dN}{N}$ определяет вероятность рассеяния $P(E, \theta, \varphi)$ частицы с энергией E в телесный угол $d\Omega$:

$$\frac{dN}{N} = P(E, \theta, \varphi) d\Omega.$$

Отношение вероятности $P(E, \theta, \varphi) d\Omega$ к плотности потока I_0 частиц в падающем пучке определяет *дифференциальное сечение* процесса рассеяния частицы $d\sigma(E, \theta, \varphi)$:

$$d\sigma(E, \theta, \varphi) = P(E, \theta, \varphi) \frac{d\Omega}{I_0}.$$

Интегрируя дифференциальное сечение рассеяния по полному телесному углу, получим *полное сечение рассеяния*:

$$\sigma(E) = I_0^{-1} \int P(E, \theta, \varphi) d\Omega.$$

В ядерной физике и физике элементарных частиц сечения выражают в *барнах* (от англ. barn — сарай): $1 \text{ б} = 10^{-28} \text{ м}^2$. Наименование барн не имеет прямого смыслового значения.

Если процессы рассеяния характеризуют соответствующим сечением $\sigma(E)$, то реакции распада обычно описывают *временем жизни*

$$\tau \approx \frac{\sqrt{\sigma}}{c},$$

где c — скорость света.

3°. Источником первичных пучков частиц являются как специально созданные ускорители, так и естественные ускорители в космосе, создающие потоки частиц высокой энергии — *космические лучи* (КЛ), а также продукты ядерных реакций.

Космические лучи представляют собой поток частиц высокой энергии ($1-10^{15}$ МэВ), в основном протонов, падающих на Землю из космического пространства (*первичные КЛ*), а также поток частиц, рожденных при столкновении первичных частиц с ядрами атомов воздуха (*вторичные КЛ* — протоны, электроны, мезоны, фотоны).

Первичные КЛ попадают в Солнечную систему в основном из межзвездного пространства от источников, расположенных в нашей Галактике (*галактические КЛ*) — пульсары, сверхновые звезды, область галактического ядра. Часть КЛ имеет внегалактическое происхождение (*метегалактические КЛ*). Некоторая доля КЛ приходит от Солнца после солнечных вспышек (*солнечные КЛ*). КЛ похожи на сильно разреженный *релятивистский газ*, частицы которого испытывают воздействие космических магнитных полей и редкие столкновения с веществом межзвездной среды. Суммарный поток КЛ у Земли составляет примерно 100 частиц/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), плотность их энергии ≈ 1 МэВ/ м^3 . КЛ приобретают энергию в специфических астрофизических процессах электромагнитной и плазменной природы.

Ускорители значительно уступают космическим лучам по достижимым энергиям, но превосходят их по плотности потока ускоренных частиц. Для ускорителей на встречных пучках (коллайдеров) плотность потока частиц определяет его эффективность. Эффективность коллайдера характеризуют *светимостью* L — величиной, равной числу столкновений, происходящих в единицу времени при столкновении двух пучков, при единичном сечении взаимодействия. Светимость выражают в единицах $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$. Скорость счета $\frac{dN_i}{dt}$ в i -м типе рассеяния (реакции) с сечением σ_i равна

$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma_i L.$$

При известной светимости L измерение скорости счета позволяет измерить соответствующее сечение рассеяния. Для ускорителей с неподвижной мишенью характерная светимость $L = 10^{37} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Для физики элементарных частиц наибольший интерес представляет взаимодействие встречных пучков частиц и античастиц. Для электронов и позитронов

практически достигнут предел энергии для встречных пучков в циклическом варианте ускорения. Этот предел связан с *синхротронным излучением*, интенсивность которого растет как четвертая степень энергии частицы и падает только как первая степень радиуса орбиты, поэтому увеличение размеров установки не позволяет решить проблему. Встречные пучки тяжелых частиц (протонов, антипротонов, ионов) при циклическом ускорении предела энергии не достигли (интенсивность синхротронного излучения обратно пропорциональна четвертой степени массы частицы). Ограничение на энергию, связанное с синхротронным излучением для линейных встречных пучков не существует. В табл. VII.5 представлены параметры коллайдеров с лептонными ($e\bar{e}$), барионными (pp , $p\bar{p}$) и лептон-барионными ($e p$, $\bar{e} p$) пучками.

4°. Расчет дифференциальных и полных сечений процессов взаимодействия частиц и измеряемых в экспериментах по рассеянию частиц является основной задачей теории. Дифференциальное сечение процесса рассеяния (перехода из начального состояния системы с волновой функцией ψ_n в конечное состояние с волновой функцией ψ_m) определяется совокупностью матричных элементов (*амплитуд рассеяния*) оператора рассеяния $\hat{S}$ (*матрицы рассеяния, S-матрицы*)

$$S_{mn} = \langle \psi_m | \hat{S} | \psi_n \rangle = \int \psi_m^* \hat{S} \psi_n dx.$$

Квадрат модуля амплитуды рассеяния $|S_{mn}|^2$ определяет *вероятность перехода* системы из начального в конечное состояние. Зная амплитуды процесса S_{mn} , можно вычислить все характеристики процесса.

5°. В основе самосогласованной физической картины мира находятся фундаментальные частицы как наблюдаемые при современных технологиях, так и гипотетические, характеристики которых предсказываются модельными теориями, но не доступны современной технике для измерения. В квантовой теоретической модели, разделяющей источники и переносчики взаимодействия, источниками взаимодействия являются *фундаментальные фермионы*, а переносчиками взаимодействия являются *фундаментальные бозоны*.

Таблица VII.5

Коллайдер (научный центр, год пуска), частицы	Энергия E_p , ГэВ	$\Delta E/E$, 10 ⁻³	Светимость L , 10 ³⁰ см ⁻² с ⁻¹	B , Тл	Длина L , м
<i>Лептонные пучки</i>					
ВЕРС (ШЕР, Пекин, 1989), $e\bar{e}$	2×2.2	0,58	10	0,903	240
ВЕРС-II (ШЕР, Пекин, 2007), $e\bar{e}$	2×2.1	0,52	1000	0,77	238
DAFNE (Frascati, Италия, 1999), $e\bar{e}$	2×0.7	0,40	200	1,7	98
ВЭПП-4м (ИЯФ, Новосибирск, 1994), $e\bar{e}$	2×6	1	20	0,6	366
ВЭПП-2000 (ИЯФ, Новосибирск, 2005), $e\bar{e}$	2×1.0	0,64	100	2,4	24
CESR-C (Cornell, Итака, США, 2002), $e\bar{e}$	2×8	0,6	35	0,3	768
КЕКВ (КЕК, Токио, Япония, 1999), $e\bar{e}$	8×3.5	0,7	11 305	0,25/0,75	2200
LEP (CERN, Швейцария, 1989), $e\bar{e}$	2×100	1,0	100	0,135	26 660
LEP-I (CERN, Швейцария,), $e\bar{e}$	2×90	—	—	—	26 660
LEP-II (CERN, Швейцария, 1999), $e\bar{e}$	2×196	—	—	—	26 660
PEP-II (SLAC, Станфорд, США, 1999), $e\bar{e}$	10,5	0,61/0,77	6777	0,18/0,75	2200
<i>Барионные пучки</i>					
SPS (CERN, Швейцария, 1981), $p\bar{p}$	2×315	0,35	0,33	1,4	6900
TEVATRON (FNAL, Батавия, США, 1987), $p\bar{p}$	2×980	0,14	50	4,4	6280
RHIC (Brookhaven, США, 2000) $p\bar{p}$	2×100	0,2	6	3,5	3834
LEP (CERN, Швейцария, 1994) $p\bar{p}$	2×8500	—	1000	—	26 659
LHC (CERN, Швейцария, 2007), $p\bar{p}$	2×7000	0,11	1000	8,3	26 659
<i>Лептон-барионные пучки</i>					
HERA (DESY, Гамбург, 1992), ep , $\bar{e}p$	e : 30 p : 920	0,91 0,2	75	0,274 4,65	6336
LEP (CERN, Швейцария, проект), ep , $\bar{e}p$	1800	—	10	—	26 659

К фундаментальным фермионам относят шесть типов (ароматов) лептонов $\{v_l, l\} = \{(v_e, e); (v_\mu, \mu); (v_\tau, \tau)\}$ и шесть типов (ароматов) кварков $q_i = \{(u, d); (c, s); (t, b)\}$, которые разделяются на три семейства (поколения) — первое I, второе II и третье III:

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \begin{pmatrix} v_l \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_e \\ e^- \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} v_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} v_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \\ q_i = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \end{array}$$

а также их античастицы:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \bar{v}_l \\ \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_e \\ e^+ \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} \bar{v}_\mu \\ \mu^+ \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} \bar{v}_\tau \\ \tau^+ \end{pmatrix}, \\ \bar{q}_i = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{s} \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{b} \end{pmatrix}, \end{array}$$

Теория допускает существование и других поколений.

К фундаментальным бозонам относят четыре калибровочных бозона электрослабого взаимодействия (фотон γ и три слабых промежуточных бозона W^+, W^-, Z^0) и восемь калибровочных бозонов (глюоны G) сильного (цветового) взаимодействия.

Теория предсказывает существование бозона Хиггса (хиггсона) H , X - и Y -бозона и гравитона g .

Из фундаментальных фермионов и бозонов с их античастицами конструируется структура других элементарных частиц и картина взаимодействия.

В таблицах VII.6 и VII.7 представлены фундаментальные фермионы, соответственно, лептоны и кварки, а в табл. VII.8 — фундаментальные бозоны, существование которых подтверждено экспериментом. В табл. VII.9 представлены гипотетические фундаментальные бозоны.

Примечание. В табл. VII.7 и VII.9 электрический заряд Q выражен в единицах элементарного заряда e .

Таблица VII.6

Характеристика, название, символ	Лептоны					
	I поколение		II поколение		III поколение	
Частица и ее символ	электрон e^-	e^- -нейтрино ν_e	μ^- -лептон μ^-	μ^- -нейтрино ν_μ	τ^- -лептон τ^-	τ^- -нейтрино ν_τ
Год открытия	1897	1953	1937	1962	1975	2000
Спин четность (σ^P)	1/2 ⁺	1/2	1/2 ⁺	1/2	1/2 ⁺	1/2
Лептонное число						
l_e	1	1	0	0	0	0
l_μ	0	0	1	1	0	0
l_τ	0	0	0	0	1	1
Электрический заряд Q	-1	0	-1	0	-1	0
Масса, МэВ						
теор.	—	0	—	0	—	0
эксп.	0,5109989	< 18 эВ	106,65336	< 0,25	1777	< 35
Время жизни	∞ (теор.) > 5 · 10 ²¹ лет (эксп.)	∞	2,19708(4) мкс	∞	0,304(9) пс	∞
Моды распада, доля (в %)	—	—	$e^+ \nu_e \nu_\mu$, 99	—	$e^+ \nu_e \nu_\tau$, 17 $\mu^+ \nu_\mu \nu_\tau$, 17 $\pi^+ \nu_\tau$, 10 $\rho^+ \nu_\tau$, 22	—

Таблица VII.7

Характеристика, название, символ	Кварки					
	I поколение		II поколение		III поколение	
Тип (аромат)	<i>d</i> (down)	<i>u</i> (up)	<i>s</i> (strange)	<i>c</i> (charm)	<i>b</i> (bottom, beauty)	<i>t</i> (top, truth)
Год открытия	1969	1969	1964	1974	1977	1995
Спин	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Барковское число <i>B</i>	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
Электрический заряд <i>Q</i>	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
Проекция слабого изоспина <i>T</i> ₃	-1/2	1/2	0	0	0	0
Странность <i>S</i>	0	0	-1	0	0	0
Очарование <i>C</i>	0	0	0	1	0	0
Прелесть <i>b</i> (боттомность)	0	0	0	0	1	0
Истинность <i>t</i> (топность)	0	0	0	0	0	1
Цвет						
К(R), красный	+	+	+	+	-	-
С(B), синий	+	+	+	+	+	+
З(G), зелёный	+	+	+	+	+	+
Гиперзаряд <i>Y</i>	1/3	1/3	-2/3	4/3	-2/3	4/3
Масса, ГэВ						
токовая	0,0075	0,0042	0,15	1,20	4,35	38,5
блочная	0,31	0,31	0,50	1,50	4,7	174(5)

Таблица VII.8

Название, символ (год открытия)	Спин S^P	Электри- ческий заряд Q	Масса, ГэВ	Ширина, ГэВ	Моды распада
Фотон, γ (1900—05; 1923)	1 ⁻	0	0 (теор.) $< 6 \cdot 10^{-25}$ (эксп.)	0	—
Заряженный промежуточный бозон, W^+ (1983) $u\bar{d} \rightarrow W^+$	1 ⁻	+1	80,39(4)	2,25(14)	$\nu_e, u\bar{d}; c\bar{s}; t\bar{b}$
Заряженный промежуточный бозон, W^- (1983) $d\bar{u} \rightarrow W^-$	1 ⁻	-1	80,39(4)	2,25(14)	$\nu_e, d\bar{u}; \bar{c}s; \bar{t}b$
Нейтральный промежуточный бозон, Z^0 (1983) $u\bar{d} \rightarrow Z^0, d\bar{d} \rightarrow Z^0$	1 ⁻	0	91,187(7)	2,490(7)	$\nu\bar{\nu}; \nu_e\bar{\nu}_e; u\bar{u}; d\bar{d}$
Глюоны, $G(1)$ (1979) $e\bar{e} \rightarrow G(1)$	1 ⁻	0	0	—	—

Таблица VII.9

Название, символ	Спин	Электрический заряд Q	Масса (оценка), ГэВ	Моды распада
Хиггс (хиггсон), H	0	0	120	$e\bar{e} \rightarrow HZ^0 \rightarrow H\nu\bar{\nu}$
X -бозон, X	1	$\pm 4/3$	10^{15}	$u\bar{u} \leftarrow X \rightarrow e\bar{d}$
Y -бозон, Y	1	$\pm 1/3$	10^{15}	$u\bar{d} \leftarrow Y \rightarrow \nu_e\bar{d}$
Гравитон, g	2	0	0	—

6°. Лептоны (по-гречески $\lambda\epsilon\pi\tau\omicron\varsigma$ — легкий, мелкий) — фундаментальные фермионы со спином $1/2$, участвующие во всех фундаментальных взаимодействиях кроме сильного. Возникновение термина лептон (1950 г.) связано с тем, что массы известных тогда лептонов (электрон, мюон, нейтрино) были существенно меньше масс других известных частиц. Открытие τ -лептона (1975 г.) с массой около двух протонных масс показало, что величина массы не является определяющей для свойств лептонов.

С каждым лептонным поколением связано присущее только ему аддитивное лептонное квантовое число (l_e, l_μ, l_τ), называемое также лептонным зарядом, которое равно $+1$ для каждого лептона данного поколения, равно -1 для каждого антилептона данного поколения и равно 0 для всех остальных частиц.

Эксперимент показал, что с высокой точностью во всех процессах взаимодействия элементарных частиц с участием лептонов выполняется закон сохранения лептонного числа. С теоретической точки зрения нет специальных оснований считать закон сохранения лептонного числа абсолютно строгим. В моделях великого объединения фундаментальных взаимодействий этот закон нарушен.

7°. Сильно взаимодействующие частицы, или адроны (по-гречески $\alpha\delta\rho\omicron\varsigma$ — сильный, массивный, крупный), состоят из фундаментальных фермионов — кварков. Кварки q_i и их античастицы $\bar{q}_i$ — антикварки — выступают как предельная степень дробления адронной материи.

Обозначения известных шести типов (ароматов) кварков u, d, s, c, b, t — отвечают английским словам up (верхний), down (нижний), strange (странный), charm (очарованный), beauty (красивый, прелестный) либо bottom (донный, низовой), truth (истинный) либо top (вершинный). Кварки u, s, t называют верхними, d, c, b — нижними.

Вся информация о кварках получена на основе изучения особенностей различных процессов с участием адронов, т. е. в условиях, в которых проявляются свойства связанных кварков. В свободном состоянии кварки не обнаружены. Это означает, что нельзя говорить о массе кварка в обычном для элементарных частиц смысле. Можно говорить лишь об эффективной массе связанных кварков, зависящей, вообще говоря, от условий, в которых осуществляются измерения (в частности, от квадрата переданного 4-импульса q^2). Значения

масс связанных кварков, которые называют *блоковыми* или *конституентными* (составляющими) *кварками*, в статическом пределе ($q^2 \rightarrow 0$) представлены в табл. VII.7.

С ростом квадрата переданного 4-импульса q^2 (с уменьшением расстояния между взаимодействующими частицами) эффективная масса кварка уменьшается. По этой причине значения масс так называемых *токовых кварков* отличается от масс блоковых кварков (см. табл. VII.7).

В пределах точности современного эксперимента кварки — точечные, бесструктурные образования внутри адронов (характерные размеры $< 10^{-18}$ м).

Обычные (неэкзотические) *барионы* B (по гречески бари́с — тяжелый) состоят из трех кварков, а обычные *мезоны* M (от греч. мезо́с — средний, промежуточный) — из кварка и антикварка, что символически записывается в виде:

$$B = q_i q_j q_k, \quad M = q_i \bar{q}_j.$$

Всем кваркам приписывается *барионное число* $B = 1/3$. У *барионов* $B = 1$, у *мезонов* $B = 0$.

Типы (ароматы) кварков при одинаковом барионном заряде B и спине σ характеризуются прежде всего значениями следующих внутренних квантовых чисел: *изотопического спина* (*изоспина*) T и его проекции T_3 , *странности* S (*strangeness*), *очарования* C (*charm*), *преlestи* (красоты, боттомности) b (*beauty*) и *истинности* (*топности*) t (*truth, topness*).

Электрический заряд кварка Q выражается через упомянутые внутренние квантовые числа и дается (в единицах элементарного заряда e) обобщенной *формулой Гелл-Манна—Нишиджимы*:

$$Q = T_3 + Y/2,$$

где $Y = B + S + C - b + t$ — *гиперзаряд*.

Из шести ароматов нижние кварки d, s, b имеют электрический заряд $-1/3$, а верхние u, c, t — заряд $+2/3$.

8°. Каждый тип (аромат) кварка q_i представлен тремя разновидностями q_i^α , у которых квантовые числа и масса одинаковы. Но есть различие в особой характеристике (отсутствующей у адронов), названной *цветом* (*цветовым зарядом*) и принимающей три различных значения ($\alpha = 1, 2, 3$). Цветовые состояния кварков произвольно называют красным (обозначают K либо R — red), синим (C, B — blue) и зеленым (G, G — green). Антикварки обладают антицветом ($\bar{K}, \bar{C}, \bar{G}$).

Цвет (цветовой заряд) является характеристикой кварка, обеспечивающей необходимую антисимметричность волновой функции адронов, построенных из одинаковых кварков, например $(q_i q_i q_i)$ (и тем самым соблюдения принципа Паули). С учетом цвета структуру бариона и мезона более точно записывают в виде

$$B_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} q_i^\alpha q_j^\beta q_k^\gamma; \quad M_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha=1}^3 q_i^\alpha \bar{q}_j^\alpha.$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{123} = 1$.

Согласно теории сильного взаимодействия, называемой *квантовой хромодинамикой* (КХД) взаимодействие между кварками обусловлено наличием у кварков цветовых зарядов (цвета). Взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена глюонами. Кварк одного цвета может перейти в кварк другого цвета, испустив цветной глюон. Кварки находятся в адронах в таких цветовых состояниях, что суммарный цветовой заряд адрона равен нулю. Поэтому адроны бесцветные или белые.

Существует гипотеза, согласно которой цветные частицы (кварки и глюоны и их цветные комбинации) в принципе не могут существовать в свободном состоянии. В то же время существование кварков в адронах (в связанном состоянии) экспериментально доказано. Явление удержания (пленения, невылетания) кварка в связанном состоянии именуют *конфайнментом*.

Первые, косвенные, свидетельства о существовании кварков были получены на основе классификации адронов (Мюррей Гелл-Манн и независимо Джордж Цвейг, 1964 г.). В дальнейшем в экспериментах по *глубоко-неупругому взаимодействию* лептонов с адронами были зарегистрированы прямые столкновения лептонов с отдельными кварками. Эти столкновения происходят в глубине адронов и длятся очень короткое время, в течение которого кварк не успевает обменяться глюоном с другими кварками и взаимодействует почти как свободная частица. Чем больше переданный импульс, т. е. чем на меньших расстояниях происходит столкновение лептона с кварком, тем свободнее выглядит кварк. Это свойство, являющееся следствием *асимптотической свободы*, означает, что кварки являются не *квазичастицами*, не какими-то коллективными возбуждениями адронной материи, а подобно лептонам являются истинно элементарными частицами.

Термин «кварк» был введен в 1964 г. М. Гелл-Манном. Он не имеет прямого смыслового значения.

9°. Глюоны (англ. glue — клей) G — восемь элементарных нейтральных безмассовых частиц со спином, равным единице, несущих специфические цветовые заряды (цвет). Восемь глюонов образуют *цветовой октет*:

$$K\bar{C}, C\bar{K}, K\bar{3}, 3\bar{K}, 3\bar{C}, C\bar{3}, \\ \frac{1}{2}(C\bar{C} - 3\bar{3}), \frac{1}{\sqrt{6}}(C\bar{C} + 3\bar{3} - 2K\bar{K}),$$

они отличаются друг от друга лишь своими цветами. Испускание и поглощение глюонов кварками лежит в основе сильного взаимодействия между кварками, глюоны «склеивают» их в адроны.

Глюоны выступают как кванты *векторного поля*, обеспечивающие калибровочную симметрию теории относительно *цветовой группы* $SU(3)_c$, подобно фотону в квантовой электродинамике (КЭД). Обладая *цветовым зарядом*, глюон может испустить или поглотить другой глюон (самодействие) и при этом изменить свой цвет, а остальные квантовые числа (электрический заряд, барионное число, аромат) остаются неизменными. Это своеобразное свойство глюонов приводит к тому, что с ростом передаваемого импульса (с уменьшением расстояния) эффективные цветовые заряды глюонов и кварков уменьшаются и цветовое взаимодействие ослабевает (так называемая асимптотическая свобода). С ростом расстояний эффективное *цветовое взаимодействие* растет. Это обстоятельство лежит в основе удержания кварков и глюонов (удержание цвета), благодаря которому глюоны и кварки не могут быть зарегистрированы как свободные частицы, а реальные адроны являются бесцветными.

Гипотеза глюонов была выдвинута в 1973 г. М. Гелл-Манном, С. Вайнбергом и А. Саламом.

В 1979 г. открытием *глюонных струй* в $e\bar{e}$ -столкновениях было получено косвенное подтверждение существования глюонов — переносчиков сильного (цветового) взаимодействия между кварками.

10°. Краткие сведения о *фундаментальных взаимодействиях* (гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное) приведены в табл. VII.10. Приведенные характеристики фундаментальных взаимодействий относятся к *протону*, который может участвовать во всех взаимодействиях.

Таблица VII.10

Взаимодействия				
	гравитационное	слабое	электромагнитное	сильное
Проявление	Вселенная, галактики, звезды и планетарные системы	β -радиоактивность, существование тяжелых элементов	Существование атомов, молекул; химические силы	Синтез и деление ядер
Статическое взаимодействие	$-G_N m_p^2 / r$	$g_F \exp(-m_W r) / (4\pi r)$, $m_W^{-1} = 10^{-17}$ м	$e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$	$-g \exp(-m_\pi r) / (4\pi r)$, $m_\pi^{-1} = 10^{-15}$ м
Квантовая картина взаимодействия: «сток» × «сток»				
Константа взаимодействия	$G_N \frac{m_p^2}{\hbar c} \approx 5,8 \cdot 10^{-39}$	$G_F m_p^2 \approx 1,0 \cdot 10^{-6} G_F \approx \frac{g_F^2}{m_W^2} \approx 10^{-10} // 10^{-17}$	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$	$\frac{g_S^2}{4\pi\hbar c} \approx 10$
Время (с) // радиус взаимодействия (м)	$10^{-16} // \infty$	$10^{-10} // 10^{-17}$	$10^{-21} // \infty$	$10^{-23} // 10^{-15}$
Взаимодействующие частицы	Все	Все, кроме фотона	С зарядом и структурные нейтральные	Адроны
Источник взаимодействия	Тензор энергии-импульса	Нейтральные и заряженные токи	Электрический заряд	Цветовой заряд
Переносчик взаимодействия (спин)	Гравитон $g(2)$	Промежуточные бозоны $W^\pm, Z^0(1)$	Фотон $\gamma(1)$	Восьмерка глюонов $G(1)$

Гравитационное взаимодействие универсально: в нем участвуют все элементарные частицы. Гравитационное притяжение частицы зависит от ее *полной энергии и импульса*. Источником гравитационного взаимодействия является *тензор энергии-импульса*. Формально гравитационное взаимодействие — самое слабое из четырех фундаментальных взаимодействий. Макроскопически гравитационное взаимодействие проявляется в небесной механике, оно определяет эволюцию Вселенной, галактик, звезд и планетарных систем.

11°. Окружающий нас мир по существу является проявлением электромагнитного взаимодействия. Источником электромагнитного поля являются электрические заряды. Нейтральные частицы, не несущие электрических зарядов, взаимодействуют с электромагнитным полем лишь благодаря своей сложной структуре или квантовым эффектам. В этом смысле электромагнитное взаимодействие не столь всеобщее, как гравитационное. Но именно электромагнитное взаимодействие связывает такие структурные элементы, как атомы и молекулы и оно в основном обуславливает все известные явления жизни на Земле.

«Химические» силы, связывающие молекулы, а также *ван-дер-ваальсовы силы*, определяющие взаимодействие молекул, являются остаточным эффектом от электромагнитного взаимодействия.

Электромагнитное взаимодействие можно иллюстрировать реакцией *фоторождения пиона*: $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ (частный случай реакции $\gamma p \rightarrow \text{мезон} + \text{барион}$). Фотон взаимодействует с *u*-кварком, передает ему свой импульс, и при достаточно высокой энергии фотона рождается новая кварк-антикварковая пара $d\bar{d}$, причем антикварк $\bar{d}$ соединяется с *u*-кварком в π^+ -мезон $\pi^+ = u\bar{d}$, а *d*-кварк вместе с оставшимися *d*- и *u*-кварками образует нейтрон $n = ddu$.

Зависимость полного сечения этой реакции σ от энергии γ кванта E_γ показана на рис. VII.4.2, а, а на рис. VII.4.2, б — кварковая диаграмма процесса. Сечение в максимуме составляет около 200 мкб. Все реакции с γ -квантами электромагнитные.

12°. Существование ядер можно связать с так называемым *ядерным (Юкавы) взаимодействием*. Такие явления, как термоядерный синтез, благодаря которому

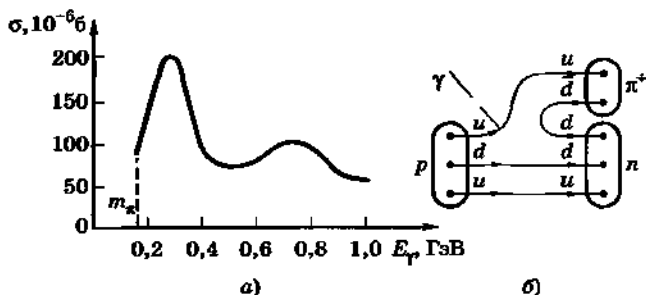
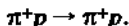


Рис. VII.4.2

светит Солнце, и деление ядер, происходящее в ядерных реакторах — различные проявления этого взаимодействия. Ядерное взаимодействие является остаточным от **сильного взаимодействия** адронов. После установления кварковой структуры адронов, стало ясным, что сильное взаимодействие адронов — результат взаимодействия составляющих их кварков.

Примером реакции, иллюстрирующей сильное взаимодействие, является упругое рассеяние π^+ -мезона на протоне:



Полное сечение этой реакции σ в низкоэнергетической области как функция энергии пиона E_π изображено на рис. VII.4.3, а. Максимум сечения составляет около 200 мб, т. е. в тысячу раз больше, чем сечение фоторождения пиона на протоне. На рис. VII.4.3, б пред-

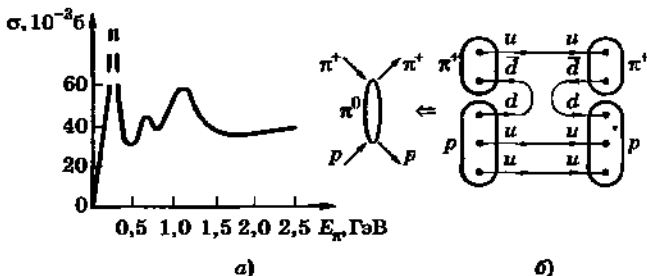
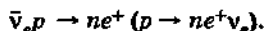


Рис. VII.4.3

ставлена кварковая диаграмма процесса и диаграмма этого процесса как обмен π -мезоном (взаимодействие Юкавы).

13°. Макроскопическим проявлением слабого взаимодействия является β -радиоактивность. В принципе слабое взаимодействие ответственно за существование тяжелых элементов на Земле и в других областях Вселенной. Примером слабого взаимодействия является обратный β -распад:



Этот процесс является следствием более фундаментального процесса $u \rightarrow d e^+ \nu_e$. Зависимость сечения этой реакции σ от энергии нейтрино E_ν изображено на рис. VII.4.4, а. На рис. VII.4.4, б представлена кварковая диаграмма процесса. Сечение реакции обратного β -распада составляет около 10^{-14} б, что в 10^{12} раз меньше сечения сильного взаимодействия при рассеянии пиона на протоне. Слабые реакции характерны тем, что в них участвуют нейтрино. Все реакции, в которых участвуют нейтрино, имеют столь малые сечения.

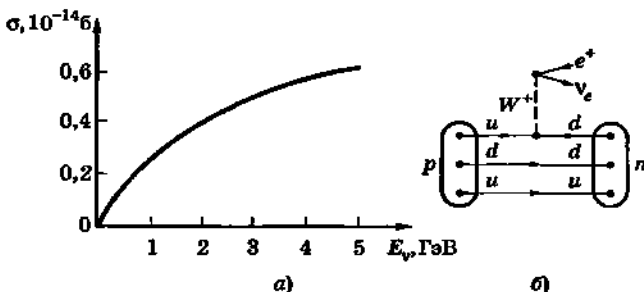


Рис. VII.4.4

14°. В релятивистской теории взаимодействие между частицами возникает в результате распространения поля, но из-за конечности скорости распространения поля взаимодействие не передается мгновенно. А значит, и энергия не может передаваться от одной системы к другой мгновенно. Чтобы удовлетворить этому прин-

дипу, в рамках квантовой теории взаимодействие представляют как совокупность определенных частиц, осуществляющих передачу энергии (и не только) от одной системы к другой. Первоначально только источники поля трактовались как «волны-частицы», а поля-посредники оставались чисто волновыми. Такой подход в хронологическом плане можно назвать «первично-квантованной» теорией. Трактовка же поля и частицы на равных основаниях воплотилась в методе *вторичного квантования*.

15°. Взаимодействие как обмен частицами можно интерпретировать на основании соотношения неопределенностей для нестационарных процессов:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar,$$

при этом процесс обмена рассматривается не как последовательность двух событий, изолированных в пространстве и времени, а как единый процесс, протекающий за время взаимодействия внутри системы.

Пример. Пусть d — радиус действия потенциала нуклон-нуклонного рассеяния. Если положить скорость $v \sim c$, то в течение времени $\Delta t \sim \frac{d}{c}$ система нуклон-нуклон находится в промежуточном состоянии, энергия которого не может быть определена точнее, чем

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c}{d}.$$

Для $d = 1,5 \cdot 10^{-15}$ м получаем $\Delta E \approx 140$ МэВ. В этих условиях понятие обмена не нарушает выводов «первично-квантованной» физики, если масса обменной частицы меньше $\frac{\Delta E}{c^2}$.

Это позволяет фиксировать границу радиуса взаимодействия, связанного с квантами обменного поля:

$$d \approx \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c = \frac{1}{m} \quad (\hbar = c = 1)$$

— комптоновская длина волны обменной частицы массой m .

В этом смысле наблюдение в космических лучах (1947 г.) частиц (π -мезонов) с массой $m_\pi \approx 140$ МэВ рассматривалось как подтверждение модели Юкавы нук-

лон-нуклонного (ядерного, сильного) взаимодействия, согласно которой потенциал взаимодействия имеет асимптотическую форму:

$$V(r) = g \exp \left(-\frac{m_{\pi} c r}{\hbar} \right).$$

Здесь g — размерная константа, уточняемая из эксперимента, а m_{π} играет роль величины, обратной радиусу взаимодействия (при $r \approx \frac{\hbar}{m_{\pi} c}$ потенциал $V(r)$ становится пренебрежимо малым).

Если сопоставить нуклон-нуклонное взаимодействие как обмен π мезонами с электромагнитным взаимодействием как обмен фотонами с массой $m_{\gamma} = 0$, то соотношение $d \approx \frac{\hbar}{m_{\gamma} c}$ привело бы к $d = \infty$, что соответствует

кулоновскому потенциалу взаимодействия $U(r) \sim \frac{1}{r}$.

Согласно кварковой теории нуклон-нуклонное взаимодействие — это остаток кварк-кваркового (цветного) взаимодействия в том же смысле, в каком потенциал взаимодействия между нейтральными атомами есть остаток электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами, входящими в состав атома.

Обменные частицы, испускаемые на время взаимодействия, не наблюдаются в эксперименте и принципиально ненаблюдаемы. По этой причине их называют виртуальными частицами (например, виртуальный фотон).

Реальная частица предстает перед экспериментатором как наблюдаемый импульс тока в измерительной аппаратуре или как цепочка ионизации в газе, жидкости, твердом теле, создающая след частицы.

3. ГРАВИТАЦИЯ. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1°. Гравитационное взаимодействие рассматривают как свойство пространства-времени — искривление пространства-времени. Гравитация проявляется

в относительном ускорении соседних пробных частиц. Причиной относительного ускорения является *кривизна*.

Кривизна характеризуется геометрическим объектом, называемым *тензором кривизны Римана* R . Тензор кривизны управляет отклонением между двумя близкими линиями, каждый отрезок которых является кратчайшим расстоянием между точками. Такие линии называют *геодезическими*. Только в евклидовом пространстве геодезические линии являются прямыми. Если бы в трехмерном пространстве рассматривалась сферическая поверхность радиуса a , то отклонение между двумя геодезическими линиями на этой поверхности характеризовалось бы параметром $R = a^{-2}$ — *гауссовой кривизной* поверхности. Тензор кривизны Римана R является аналогом гауссовой кривизны поверхности сферы в случае более высокой размерности пространства. Тензор R — математический объект, содержащий в себе все сведения об изгибах и деформациях пространства-времени. В данной системе координат тензору Римана соответствует $4^4 = 256$ чисел $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3$). При наличии метрики, т. е. при определении скалярного произведения 4-векторов, число линейно независимых компонент тензора Римана равно 20.

2°. Тензор Эйнштейна G определяется из тензора Римана R как некоторое усреднение по всем направлениям. Источником, генерирующим тензор Эйнштейна G , является *тензор энергии-импульса* T вещества и полей, так что

$$G = \frac{8\pi G_N}{c^4} T,$$

где G_N — *гравитационная постоянная* (постоянная Ньютона). С точностью до множителя $\frac{8\pi G_N}{c^4}$ тензоры G и T равны друг другу. Это равенство является *уравнением Эйнштейна*. Записанное в компонентах в произвольной системе координат, оно имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

Уравнение Эйнштейна показывает, как энергия-импульс вещества и полей приводит к появлению средней кривизны. Это же уравнение является уравнением распространения для остальной, анизотропной части кривизны; оно описывает:

- кривизну внешней части пространства-времени для статического источника;
- излучение гравитационных волн (возмущение кривизны пространства-времени) энергией-импульсом движущейся материи и распространение этих волн во Вселенной;
- содержит в себе уравнение движения (сила = масса $\times$ ускорение) вещества и полей, тензор энергии-импульса которых создает кривизну.

3°. Нерелятивистская теория гравитационного взаимодействия (теория тяготения Ньютона) является частным случаем теории Эйнштейна для слабых гравитационных полей.

В силу слабости гравитационного взаимодействия гравитационные волны пока не обнаружены. Квантовая теория гравитации еще не построена. С квантовой точки зрения гравитационное взаимодействие обусловлено обменом *гравитоном* — квантом гравитационного поля, спин которого равен двум. Наблюдение гравитонов недоступно при экспериментальных возможностях обозримого будущего.

4°. Отношение силы электростатического взаимодействия двух протонов с элементарным зарядом e и массой m_p к силе гравитационного взаимодействия между ними равно

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G_N m_p^2} = 10^{36}.$$

Это соотношение не изменяется и при учете релятивистских эффектов вплоть до расстояний, равных комptonовской длине волны протона. Величину

$\sqrt{G_N} m$ называют *гравитационным зарядом*. При таком определении гравитационного заряда статический закон гравитационного взаимодействия совпадает с законом Кулона для взаимодействия электрических зарядов. Гравитационный заряд пропорционален массе,

поэтому по второму закону Ньютона ускорение, вызванное гравитационной силой, не зависит от массы ускоряемого тела. Этот факт, проверенный с большой точностью, называют *принципом эквивалентности*.

5°. В релятивистской теории гравитационный заряд пропорционален не массе частицы, а энергии $\sqrt{G_N} \cdot E/c^2$. Свет отклоняется в гравитационном поле Солнца, хотя масса фотона равна нулю. Пропорциональность гравитационного заряда энергии обуславливает универсальность гравитационного взаимодействия и его отличие от других фундаментальных взаимодействий.

Гравитационное взаимодействие двух релятивистских частиц должно расти как квадрат их энергии в системе центра масс. При больших энергиях частиц гравитационное взаимодействие уже нельзя считать слабым. При энергии $E = Qc^2 \sqrt{G_N} \approx 10^{18}$ ГэВ гравитационный заряд частицы $\sqrt{G_N} \cdot E/c^2$ становится равным ее электрическому заряду Q , и при очень высоких энергиях гравитационное взаимодействие становится основным.

Характерным значением энергии, при котором гравитационное взаимодействие становится сильным, является *масса Планка*, равная

$$m_{Pl} = \sqrt{\hbar c / G_N} = 1,2210 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} = 2,1767 \cdot 10^{-8} \text{ кг.}$$

6°. Классическая теория электромагнитного взаимодействия основывается на системе *уравнений Максвелла*. Максвелловские уравнения, дополненные законом силы, действующей на заряд (*сила Лоренца*) и законом движения (*закон Ньютона*) вместе с классическим *уравнением гравитации* являются основой всей классической физики.

7°. В явно релятивистской форме свойства электромагнитного поля характеризуются 4-потенциалом $A_\alpha = (\varphi, \mathbf{A})$, компоненты которого — скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ — являются функциями координат и времени. Компоненты 4-потенциала однозначно определяют напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы, удовлетворяющие калибровочному (градиентному) преобразованию

$$A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha f,$$

при этом напряженность электрического поля E и индукция магнитного поля B не изменяются. В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному — любую постоянную. Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны калибровочному преобразованию.

8°. Если, по определению, ввести величину

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\beta\alpha},$$

называемую *тензором напряженности электромагнитного поля*, то систему *полевых уравнений Максвелла* можно записать в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} &= 0, \\ \partial^\beta F_{\alpha\beta} &= -j_\alpha, \end{aligned}$$

где $j_\alpha = (\rho, \mathbf{j})$ — 4-вектор плотности тока. Для 4-импульса $P_\alpha = mU_\alpha$ уравнение движения заряда в 4-векторной форме принимает вид

$$\partial_\tau P_\alpha = qF_{\alpha\beta}U^\beta,$$

где U^β — 4-скорость.

Уравнения Максвелла для тензора напряженности электромагнитного поля демонстрируют единство электрических и магнитных полей. Ни одно из них само по себе не является релятивистски инвариантным объектом. Но слитые воедино в напряженности электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$, они обретают смысл и значение, выходящие за рамки частных систем координат и системы отсчета.

9°. Уравнения динамики заряда и электромагнитного поля можно получить, исходя из *принципа наименьшего действия*, если знать *лагранжиан* электромагнитного поля, взаимодействующего с зарядами.

Лагранжиан свободного (невзаимодействующего) электромагнитного поля имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2) = \text{inv.}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно *калибровочного преобразования*.

Если бы лагранжиан свободного электромагнитного поля содержал так называемый *массовый член* (фотон имел бы массу m_γ), так что

$$L = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\alpha^2,$$

то не было бы инвариантности относительно калибровочных преобразований. *Калибровочная инвариантность* гарантирует нулевую массу фотона. Это представляет собой исходную точку *частной (специальной) теории относительности*, так как в противном случае фотон не имел бы постоянной скорости в вакууме в любой системе отсчета.

Калибровочную инвариантность свободного электромагнитного поля называют *локальной U(1)-калибровочной инвариантностью*. Обозначение U(1) потому, что преобразование, оставляющее инвариантным лагранжиан, можно представить в виде унитарной матрицы 1×1 . Локальный же характер преобразования связан с тем, что параметр преобразования меняется от точки к точке в пространстве-времени.

10°. *Квантовая электродинамика* (КЭД) — теория взаимодействия электрически заряженных лептонов (e , μ , τ) и их античастиц путем обмена *фотоном* (калибровочным квантом) — является самой точной из всех известных физических теорий. Здесь электромагнитное взаимодействие выступает в чистом виде.

Высокая точность расчетов в КЭД основана на использовании теории возмущений по малому безразмерному параметру

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

— *постоянной тонкой структуры* (постоянной электромагнитного взаимодействия), где e — элементарный

заряд. Эта постоянная действительно связана с тонкой структурой спектральных линий излучения атомов (откуда название). Значение α , известное с относительной погрешностью 10^{-9} , равно отношению электростатической энергии двух заряженных частиц на расстоянии комптоновской длины волны частицы к энергии покоя. Постоянная тонкой структуры α характеризует величину электрического заряда таким образом, который не зависит от произвольных макроскопических стандартов.

11°. Квантовая электродинамика является простейшим и наиболее изученным образцом квантовой теории поля. В рамках КЭД было впервые понято, что частицы и силы являются двумя проявлениями более сложных объектов — квантованных полей, описываемых полевыми операторами (представление вторичного квантования).

Так, 4-потенциал $A_\alpha(x)$, ставший оператором, состоящим из линейной комбинации оператора уничтожения и оператора рождения кванта электромагнитного поля — фотона, рождает или уничтожает фотон в точке x из фотонного вакуума — основного состояния фотонного поля.

Волновая функция электрона $\psi(x)$, ставшая оператором, уничтожает электрон или порождает позитрон в точке x , а сопряженная операторная функция $\bar{\psi}$ уничтожает позитрон или рождает электрон из электрон-позитронного вакуума.

12°. Лагранжиан КЭД представляет собой сумму локальных произведений полевых операторов:

$$\mathcal{L}_{em} = \bar{\psi} [(i\partial_\alpha - eA_\alpha(x))\gamma_\alpha - m]\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Здесь $F_{\alpha\beta}$ — оператор — тензор напряженности электромагнитного поля; e и m — заряд и масса электрона; $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ — взаимосопряженные электронные полевые операторные функции; $A_\alpha(x)$ — операторный 4-векторный потенциал; γ_α — четыре матрицы Дирака. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Слагаемое

$$\mathcal{L}_{em\ int} = -e\bar{\psi} A_\alpha(x)\gamma_\alpha\psi(x)$$

в лагранжиане КЭД описывает взаимодействие электронов и позитронов с фотонами; другие слагаемые:

$$\mathcal{L}'_{em} = \bar{\Psi} [i\partial_\alpha \gamma_\alpha - m] \Psi(x)$$

— свободное поле электронов и позитронов;

$$\mathcal{L}''_{em} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

— свободное поле фотонов.

Инвариантность лагранжиана $\mathcal{L}_{em}$ калибровочному преобразованию электромагнитного поля ответственна за безмассовость фотона, а инвариантность локальному калибровочному преобразованию электрон-позитронных полевых операторов,

$$\psi(x) \rightarrow \exp\{if(x)\}\psi(x); \quad \bar{\psi} \rightarrow \exp\{-if(x)\}\bar{\psi}(x),$$

ответственна за сохранение электрического заряда.

13°. Для расчетов и качественных рассуждений явлений в КЭД удобно использовать технику *диаграмм Фейнмана*. *Диаграмма Фейнмана* графически изображает процесс взаимодействия (рассеяния) частиц и задает алгоритм вычисления *амплитуды вероятности* процесса в релятивистски-инвариантной теории возмущений. *Фейнмановские диаграммы* дают релятивистски-инвариантное описание процессов. В соответствии с этим 4-импульс сохраняется не только при распространении частиц, но и при локальном взаимодействии.

Основными элементами *диаграмм* (графиков, графов) *Фейнмана* являются линии — *пропагаторы* (*функции распространения*, *функции Грина*), изображающие распространение полевых возмущений (частиц), и точки — *вершины* (*узловые точки*), изображающие их *локальные взаимодействия*.

Таким образом, сложные процессы взаимодействия на расстоянии сводятся к элементарным *локальным взаимодействиям*. Обычно распространению фермиона (*фермионный пропагатор*) сопоставляют прямую линию, а распространению бозона (*бозонный пропагатор*) — волнистую или пунктирную. Если в процессе участвуют несколько сортов частиц, то, чтобы отличить их друг от друга, используют другие линии, штриховые, пилообразные, двойные и т. д.

Движению частиц в квантовой теории ставят в соответствие процесс распространения волнового поля, поле же в каждой точке пространства в каждый момент времени является источником вторичных волн (*принцип Гюйгенса*). Пропагатор характеризует распространение такой волны между двумя пространственно-временными точками 1 и 2 (рис. VII.4.5). Он является функцией этих двух точек и изображается линией их соединяющей. Поле в точке 2 определяется суммой волн, испущенных из всевозможных точек 1. На рис. VII.4.5 изображено в методе диаграмм Фейнмана распространение свободного электрона (функция распространения электрона, электронная функция Грина или электронный пропагатор — сплошная линия 12); распространение свободного фотона (функции распространения фотона, фотонная функция Грина или фотонный пропагатор — волнистая линия 1'2').

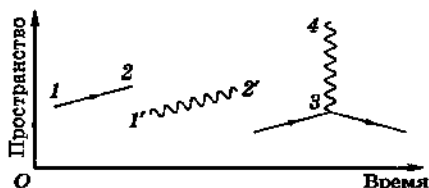


Рис. VII.4.5

Взаимодействие в квантовой теории рассматривают как испускание (рождение) и поглощение (уничтожение) частиц различного типа. Например, электромагнитное взаимодействие представляют как испускание или поглощение фотона. Элементарный акт такого взаимодействия графически изображают третьей диаграммой на рис. VII.4.5, в которой сплошные линии — *электронные пропагаторы*, волнистые — *фотонный пропагатор*, вершина 3 — эффект первого порядка — рассеяние электрона во внешнем поле (или испускание электроном фотона).

Третья диаграмма на рис. VII.4.5 изображает появление фотона в пространственно-временной точке 4, испущенного в точке 3, при распространении через точку 3 электрона и его локального взаимодействия с фотоном. Точка 3 непрерывной электронной линией (*электронного*

пропэгатора), из которой начинается (испускание) или заканчивается (поглощение) распространение фотона (фотонного пропэгатора), является вершиной диаграммы (узловой точкой). В каждой вершине диаграммы встречаются одна фотонная и две электронные линии. Линия электрона, согласно закону, сохранения заряда, нигде не может обрываться, поэтому число внешних электронных линий всегда должно быть четным. С помощью диаграмм рис. VII.4.5, как основных элементов, можно построить фейнмановские диаграммы для любого электродинамического процесса. Диаграммы с n вершинами называют диаграммами n -го порядка. В электродинамике вклад диаграммы n -го порядка в амплитуду процесса пропорционален множителю $(\alpha_{em})^n$ — n -й степени постоянной электромагнитного взаимодействия (постоянной тонкой структуры).

На рис. VII.4.6, а—г изображены диаграммы Фейнмана процессов второго порядка. Внешние линии изображают частицы (фотон или электрон) до и после взаимодействия, а внутренние элементы (вершины и линии) — механизм взаимодействия, который сводится на рис. VII.4.6, а к испусканию фотона одним электроном и поглощению его другим, а на рис. VII.4.6, б поглощению электроном одного фотона (падающего) и испусканию другого (рассеянного). Функция распространения между двумя вершинами (внутренние линии) отвечают движению частиц в виртуальном состоянии (виртуальные частицы). Одна и та же внешняя линия может изображать как начальную частицу, так и конечную античастицу (и наоборот). Например, диаграмма рис. VII.4.6, б может изображать аннигиляцию пары электрон-позитрон в два фотона. На рис. VII.4.6, в изображено взаимодействие фотона с электронно-позитронным вакуумом (собственная энергия фотона), а на VII.4.6, г — взаимодействие электрона с вакуумом электромагнитного поля (собственная энергия электрона).

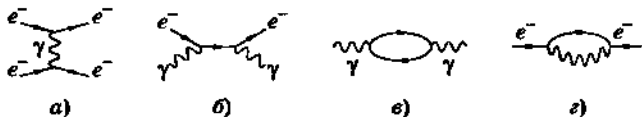


Рис. VII.4.6

Приведенные на рис. VII.4.6 диаграммы отвечают минимальному числу элементарных взаимодействий (числу вершин в диаграмме), приводящих к данному процессу. Но они не единственно возможные. Данный тип взаимодействия определяется внешними линиями (начальными и конечными частицами), внутренняя же часть диаграммы может быть более сложной. Например, для рассеяния фотона электроном можно привести в дополнение к диаграмме рис. VII.4.6, б диаграммы, изображенные на рис. VII.4.7, и многие другие.

На диаграмме рис. VII.4.7, а падающий электрон испускает виртуальный фотон, который поглощается конечным электроном. На диаграмме рис. VII.4.7, б виртуальный электрон испускает виртуальный фотон, который поглощается конечным электроном. На диаграмме рис. VII.4.7, в виртуальный фотон рождает электрон-позитронную пару, аннигилирующую в виртуальный фотон. Диаграмму рис. VII.4.7, в называют *петлевой*. Импульсы виртуальных частиц, образующих петли, не фиксированы и по ним проводится интегрирование. Образование виртуальных электрон-позитронных пар при распространении фотона в вакууме называют *поляризацией вакуума*. Так как постоянная электромагнитного взаимодействия мала, то диаграммы Фейнмана, содержащие большое число вершин, дадут лишь малые поправки, называемые *радиационными поправками*, по сравнению с вкладом основной диаграммы рис. VII.4.6, б.

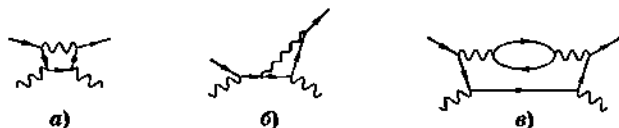


Рис VII.4.7

14°. *Поляризация вакуума* приводит в КЭД к экранировке электрического заряда электрона вакуумными позитронами. Электрон, поляризуя вакуум, притягивает к себе виртуальные позитроны и отталкивает виртуальные электроны. В результате, если смотреть на электрон с большого расстояния, его заряд оказывается

частично экранированным. Если же проникнуть вглубь облака виртуальных пар, то экранировка уменьшается и наблюдаемый заряд возрастет. Таким образом, наблюдаемый электрический заряд электрона является функцией расстояния: $e = e(r)$. Это относится и к величине постоянной тонкой структуры $\alpha = \alpha(r)$, которую по этой причине называют *бегущей константой*. Так как малые расстояния эквивалентны большому передаваемым импульсам q , то эффективная константа электромагнитного взаимодействия $\alpha(q)$ является растущей функцией q и только при $q = 0$ принимает значение «постоянной тонкой структуры», приблизительно равное $1/137$.

15°. Диаграммы Фейнмана используют также для изображения процессов, обусловленных другим типом взаимодействия.

Каждому элементу диаграммы Фейнмана — внешним линиям, вершинам, внутренним линиям соответствуют определенные функции, поэтому, начертив диаграмму Фейнмана, можно сразу написать аналитическое выражение для расчета амплитуды вероятности данного процесса.

Метод диаграмм Фейнмана был предложен Ричардом Фейнманом (1948 г.) и сыграл важную роль в развитии квантовой электродинамики. Диаграммы Фейнмана широко применяются в квантовой теории поля, квантовой механике и статистической физике.

4. СИЛЬНОЕ (ЦВЕТНОЕ) ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1°. В *сильном взаимодействии* участвуют только адроны. Существование ядер можно связать с так называемым *ядерным (Юкавы) взаимодействием*. Оно является остаточным от сильного и описывается как обмен π мезонами между нуклонами.

Реакцию упругого рассеяния π^+ мезона на протоне: $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ в низкоэнергетической области можно представить диаграммой *взаимодействия Юкавы* (см. рис. VII.4.3).

2°. Большинство из нескольких сотен адронов крайне нестабильны — это *резонансы*: они распадаются на более легкие адроны посредством сильного взаимодействия с характерным временем 10^{-23} с.

Квазистабильные адроны живут гораздо дольше (10^{-16} с) и распадаются посредством слабого и электромагнитного взаимодействия.

Конечными продуктами распада *квазистабильных мезонов* являются более легкие мезоны, лептоны и фотон и, если распадающиеся мезоны достаточно массивны, то пара барион + антибарион.

Самые легкие барионы (протон p и нейтрон n) называют *нуклонами* (от латинского *nucleus* — ядро).

В таблицах VII.11 и VII.12 представлены кварковые структуры, массы и моды (каналы) распада стабильных (квазистабильных) адронов — барионов и адронов — мезонов соответственно.

Более тяжелые квазистабильные барионы (лямбда Λ , сигма Σ , кси Ξ , омега Ω , ...) называют *гиперонами* (от греческого *υπερ* — сверх). Конечными продуктами распада гиперонов являются лептоны, фотон, мезоны и обязательно нуклон.

В состав ядер входят нейтроны и протоны. Остальные адроны рождаются в столкновениях частиц высокой энергии, источником которых являются *ускорители* и *космические лучи*.

Любой из адронов элементарен в том смысле, что его нельзя разбить на составные части. Но вместе с тем, используя пучки частиц высокой энергии, можно «увидеть» внутри адронов составляющие их структурные элементы — *кварки*.

3°. Нуклоны состоят из самых легких кварков u и d : $p = uud$, $n = ddu$. Согласно нерелятивистской кварковой модели, орбитальные угловые моменты кварков в нуклонах равны нулю. Суммарный спин двух u -кварков в протоне равен единице, геометрически складываясь со спином d -кварка, дает спин протона, равный $1/2$. Аналогично с заменой $u \leftrightarrow d$ устроен нейтрон. Разность масс u - и d -кварков гораздо меньше, чем массы адронов, которые состоят из этих кварков. Если пренебречь этой разностью, то нуклоны можно считать одинаковыми. Говорят, что нуклоны образуют *дублет* (от фр. *double* — двойной).

В общем случае совокупность частиц какой-либо системы, обладающих сходными свойствами, называется *мультиплетом* (от латинского *multiplex* — многократный).

Таблица VII.11

Барьон	Изоспин T	Проекция изоспина T ₃	Масса, МэВ/c ² , время жизни	Основные моды распада	Относительная вероятность, %
$p = uud$ протон	1/2	+1/2	938,27199(38), $> 3 \cdot 10^{32}$ лет	—	—
$n = udd$ нейтрон	1/2	-1/2	939,56533(38), 896(10) с	$p e^{-} \bar{\nu}_e$	100
$\Lambda^0 = uds$ лямбда-гиперон	0	0	1115,63(5), 0,2631(30) нс	$p \pi^{-}$ $n \pi^0$	64,1(5) 35,7(5)
$\Sigma^{+} = uus$ сигма-плюс-гиперон	1	+1	1189,37(6), 0,0799(4) нс	$p \pi^0$ $n \pi^{+}$	51,57(30) 48,30(30)
$\Sigma^0 = uds$ сигма-ноль-гиперон	1	0	1192,55(9), 0,074(7) нс	$\Lambda^0 \gamma$	100
$\Sigma^{-} = dds$ сигма-минус-гиперон	1	-1	1197,43(6), 0,1479(11) нс	$n \pi^{-}$	99,848(6)
$\Xi^0 = uss$ кси-ноль-гиперон	1/2	+1/2	1314,9(6), 0,290(10) нс	$\Lambda^0 \pi^0$	100
$\Xi^{-} = dss$ кси-минус-гиперон	1/2	-1/2	1321,32(13), 0,1639(15) нс	$\Lambda^0 \pi^{-}$	100
$\Omega^{-} = sss$ омега-минус-гиперон	0	0	1672,43 (32) 0,0822 (12) нс	$\Lambda^0 K^{-}$ $\Sigma^0 \pi^{-}$ $\Sigma^{-} \pi^0$	67,8(7) 23,6(7) 8,6(4)
$\Lambda_c^{+} = udc$ лямбда-плюс-гиперон	0	0	2284,9(6) 0,200(10) пс	$p + \dots$ $n + \dots$	50 50
$\Sigma_c^{+} = usc$ сигма-плюс-гиперон	1	0	2453,8(9)	$\Lambda_c^{+} \pi^0$	100

Таблица VII.12

Мезон (год открытия)	Изоспин T	Проекция изоспина T_3	Масса, МэВ/c ² , время жизни	Основные моды распада	Относительная вероятность, %
$\pi^+ = u\bar{d}$ пи-плюс (1947)	1	+1	139,56755(33), 26,029(23) пс	$\mu^+ \nu_\mu$	100
$\pi^0 = 2^{-1/2}(u\bar{u} - d\bar{d})$ пи-ноль (1950)	1	0	134,9734(25), 0,084(6) фс	$\gamma\gamma$	98,798(32)
$\eta^0 = 3^{-1/2}(d\bar{d} + u\bar{u} - s\bar{s})$ эта-ноль (1961)	0	0	548,8(6), 0,609(107) ас	$\gamma\gamma$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \gamma$ $\mu^+ \nu_\mu$	38,9(4) 31,90(34) 23,7(5) 4,91(13) 62,51(16)
$K^- = s\bar{u}$ ка-минус (1947)	1/2	-1/2	493,646(9), 12,371(28) пс	$\pi^- \pi^0$ $\pi^- \pi^+ \pi^-$ $e^- \bar{\nu}_e \pi^0$ $\mu^- \bar{\nu}_\mu \pi^0$	21,17(15) 5,589(28) 4,82(5) 3,18(6)
$K_S^0 = 2^{1/2}(d\bar{s} - s\bar{d})$ ка-ноль (1955)	1/2	-1/2	497,671(30), 89,22(20) пс	$\pi^+ \pi^-$ $\pi^0 \pi^0$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$	68,61(26) 31,39(26) 21,5

Окончание таблицы

Мезон (год открытия)	Изоспин T	Проекция T изоспина T ₃	Масса, МэВ/c ² , время жизни	Основные моды распада	Относительная вероятность, %
$K_L^0 = 2^{1/2}(d\bar{s} + s\bar{d})$ на-ноль (1956) $m(K_L^0) = m(K_S^0) =$ $= 3,521(14)$ мкэВ	1/2	-1/2	497,671(30), 51,8(4) нс	$\pi^+e^-\nu$ (ν_e) $\pi^+\mu^+\bar{\nu}_\mu$ (ν_μ) $p^0p^0p^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$	38,6(4) 27,01(34) 21,7(7) 12,37(18)
$D^+ = c\bar{d}$ дэ-плюс (1976)	1/2	+1/2	1869,4(5), 1,057(15) пс	$K^-\pi^+\pi^+$ $K^-\pi^+\pi^+\pi^0$ $\bar{K}^0\pi^+\pi^+\pi^-$ $\bar{K}^0l^+\nu_l$	9,0(6) 6,4 (1,1) 7,0(9) 6,8(8)
$D^0 = c\bar{u}$ дэ-ноль (1976)	1/2	-1/2	1864(1), 0,415(4) пс	$K^-\pi^+\pi^0$ $K^-\pi^+\pi^-\pi^+$ $K^-\pi^+$ $K^-\pi^+\nu_l$	13,8(9) 7,6(4) 3,85(9) 3,50(17)
$D_s^+ = c\bar{s}$ дэ-плюс (1976)	0	0	1959,0(1,4) 0,457(17) пс	$K^+K^-\pi^+$ $\phi\pi^+$ $K^+\bar{K}^0$ $\phi l^+\nu_l$	4,4(1,2) 3,5(0,9) 3,6(1,1) 2,0(0,5)

Из тех же кварков u и d может быть построен мультиплет других адронов. Например, если спины трех кварков параллельны, то они образуют квартет дельта-барионов со спином $3/2$: $\Delta^{++} = uuu$, $\Delta^+ = uud$, $\Delta^0 = udd$, $\Delta^- = ddd$. Это самые легкие из барионных резонансов. За время примерно 10^{-23} с они распадаются на нуклоны N и π -мезоны: $\Delta \rightarrow \pi N$. Известно большое число тяжелых барионных резонансов, также состоящих из u - и d -кварков. В них кварки находятся в возбужденном состоянии. В этом отношении резонансы похожи на возбужденные состояния атомов. Если адрон состоит из кварков одного типа, то, согласно принципу запрета Паули, полный набор квантовых чисел у этих кварков должен быть различным.

4°. Если все барионы состоят из трех кварков, то другой тип адронов — мезоны — состоят из кварка и антикварка. Например, самые легкие из мезонов — π -мезоны — имеют следующую структуру: $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $\pi^- = d\bar{u}$. Кварк и антикварк в π -мезоне находится в состоянии с нулевым орбитальным моментом и с противоположно направленными спинами, так что суммарный спин π -мезона равен нулю.

Если спины кварка и антикварка параллельны, то они, находясь в состоянии с нулевым орбитальным моментом, образуют мезоны со спином, равным единице: ρ^+ , ρ^0 , ρ^- . Эти мезоны являются резонансами и за время 10^{-23} с распадаются на два π мезона: $\rho \rightarrow 2\pi$, ρ -мезоны являются самыми легкими из мезонных резонансов, в которых пара кварк + антикварк находится в возбужденном состоянии.

5°. Распад Δ^{++} и ρ^+ -резонансов за счет сильного взаимодействия представлен в виде кварковых диаграмм на рис. VII.4.8, а, б. Стрелка, направленная слева направо (по времени), изображает кварк, а стрелка, направленная справа налево (вспять по времени), — антикварк. Кварковые диаграммы отличаются от обычных фейнмановских диаграмм, так как на бесконечность уходят не свободные, а плененные в адронах кварки. Кроме того, сильные взаимодействия между кварками

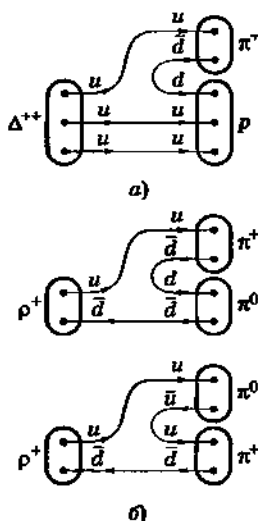


Рис. VII.4.8

на кварковых диаграммах обычно не обозначают. В частности, не указывают взаимодействие, приводящее к рождению пары кварк + антикварк.

6°. Если пренебречь разностью масс u - и d -кварков и различием их электрических зарядов, то кварковый лагранжиан обладает дополнительной симметрией, которую называют *изотопической*. В рамках этой симметрии u - и d -кварки рассматриваются как два состояния (верхнее и нижнее) спинора в *изотопическом пространстве*.

Идея изотопического пространства принадлежит Вернеру Гейзенбергу, который вскоре после открытия нейтрона создал формальный язык для изучения ядер. Нейтрон и протон рассматриваются как одна частица — нуклон, имеющий 5

степеней свободы: 3 пространственных $\mathbf{r}$, одну спиную σ , принимающую два значения, и еще одну новую степень свободы, названную пятой степенью свободы T , с помощью которой различают нейтрон и протон. Эта величина носит название *изотопического спина* с 1936 г., хотя для нее более подходило бы название *изобарического спина*. Со временем словосочетание *изотопический спин* сократилось до *изоспин*.

В изотопическом пространстве кварк u отвечает проекции изоспина, равной $1/2$, а d -кварк — проекции $-1/2$ на некоторую ось, обычно называемую осью 3 (или z). Преобразование изоспина, относительно которого инвариантен лагранжиан, осуществляется комплексными матрицами U размерностью 2×2 , удовлетворяющими условию унитарности ($UU^\dagger = I$, где $U^\dagger$ — эрмитово-сопряженная матрица, а I — единичная матрица) и унимодулярности ($\det U = 1$). Такие матрицы размерностью 2×2 являются простейшими представлениями группы $SU(2)$. Здесь буква S указывает на то, что преобразования специальные (унимодулярные), бук-

ва U , — что они унитарные, а цифра 2, — что простейшим представлением группы являются двухрядные матрицы, а простейшим пространством представления — двухкомпонентный спинор. Группа $SU(2)$ и более сложные унитарные унимодулярные группы $SU(n)$, где $n > 2$, играют важную роль в физике элементарных частиц.

Унитарную унимодулярную матрицу U определяют в общем случае тремя действительными параметрами α_k ($k = 1, 2, 3$) и представляют в виде

$$U = \exp \left\{ \frac{1}{2} i \alpha_k \tau_k \right\} = I + \frac{1}{2} i \alpha_k \tau_k + \dots,$$

где по индексу k подразумевается суммирование, а τ_k — три матрицы Паули. Если построить матрицы:

$$\tau_+ = \frac{1}{2} (\tau_1 + i \tau_2), \quad \tau_- = \frac{1}{2} (\tau_1 - i \tau_2),$$

то, действуя на спинор, матрица τ_+ ставит его нижнюю компоненту на место верхней, а матрица τ_- ставит верхнюю на место нижней. Матрица $\frac{1}{2} \tau_3$ дает значение проекции изоспина на ось 3 в изотопическом пространстве.

Группа $SU(2)$ является одной из простейших неабелевых групп. В случае u - и d -кварков симметрия, обусловленная сходством их свойств, связана с параметрами преобразования группы α_k , которые не зависят от пространственно-временных координат, поэтому симметрия является глобальной.

Для произвольного изотопического мультиплета, имеющего изоспин T , число частиц в мультиплете выражается простой формулой $n = 2T + 1$. В соответствии с этим изоспин дублета нуклонов равен $T = (n - 1)/2 = (2 - 1)/2 = 1/2$, а изоспин квартета Δ изобар равен $1/2(4 - 1) = 3/2$.

Относящееся сперва к нуклонам понятие изоспина было распространено на π -мезоны. Изоспин триплета π -мезонов равен единице. Мультиплеты реальных π -мезонов и Δ -изобар были открыты в конце 1940-х — начале 1950-х г. Гипотеза же о существовании кварков была высказана в 1964 г. после изучения свойств так называемых *странных частиц* и $SU(3)$ -симметрии.

7°. Первые *странные адроны* были открыты в 1940-х гг. в космических лучах, а с 1950-х гг. их получают и исследуют с помощью ускорителей.

В семействе адронов странных частиц больше, чем нестранных, хотя они играют существенно меньшую роль в ядерной физике, чем нуклоны и π мезоны. Последнее связано с тем, что странные адроны нестабильны и массивны, так что для их рождения требуются частицы высоких энергий. Странность (отсюда и название) поведения этих частиц заключается в том, что при столкновении адронов достаточно высокой энергии эти частицы рождаются обильно за счет *сильного взаимодействия*, а распадаются на нестранные адроны примерно в 10^{10} раз медленнее за счет *слабого взаимодействия*.

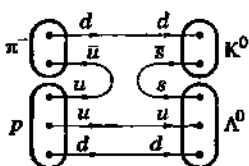


Рис. VII.4.9

Это обусловлено тем, что каждый странный адрон содержит в своем составе хотя бы один *странный кварк* (s -кварк). На рис. VII.4.9 изображена кварковая диаграмма процесса рождения странных частиц в сильных взаимодействиях $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0$.

Рождение пары странных частиц связано с появлением в кварковой диаграмме «*странной заколки*» — $s\bar{s}$ (диаграмма этой пары кварк + антикварк похожа на заколку для волос). В данном случае один конец заколки $\bar{s}$ принадлежит K -мезону, другой s — Λ -гиперону. K -мезон является самым легким из *странных мезонов* (см. табл. VII.12), Λ -гиперон — самым легким из *странных барионов* (см. табл. VII.11). Странные и нестранные адроны вместе образуют общие семейства: *октеты* и *синглеты* мезонов, *октеты* и *декуплеты* барионов. *Синглет* содержит одну частицу, *октет* — 8, *декуплет* — 10. Структуру этих семейств легко понять на основе $SU(3)$ -симметрии, которая на кварковом языке сводится к симметрии между u -, d - и s -кварками.

В природе $SU(3)$ -симметрия нарушена сильнее, чем $SU(2)$, так как s -кварк гораздо массивнее u - и d -кварков. Следствием этого является сильное различие по массам адронов, входящих в один мультиплет. В 1953 г. М. Гелл-Манн (независимо от К. Нишиджимы)

ввел понятие *странности* — нового квантового числа, открыл *закон сохранения странности* и распространил на странные частицы формализм изоспина. В 1961 г. (независимо от Ю. Неемана) он дал современную формулировку SU(3)-симметрии мезонов и барионов.

8°. Строение мультиплета удобно изображать на плоскости $T_3 Y$, где T_3 — третья компонента изоспина, а Y — гиперзаряд. Гиперзаряд, по определению, равен удвоенному среднему электрическому заряду Q (в единицах элементарного заряда e) частиц, входящих в мультиплет: $Y = 2 \langle Q \rangle$. Это определение справедливо как для изотопических мультиплетов адронов, так и для изотопических мультиплетов спиральных состояний лептонов и кварков в калибровочной теории электрослабого взаимодействия.

Изображение мультиплета $T_3 Y$ называют *весовой диаграммой* неприводимого представления. На рис. VII.4.10 изображен октет псевдоскалярных ($J^P = 0^-$) (а) и октет векторных ($J^P = 1^-$) (б) мезонов.

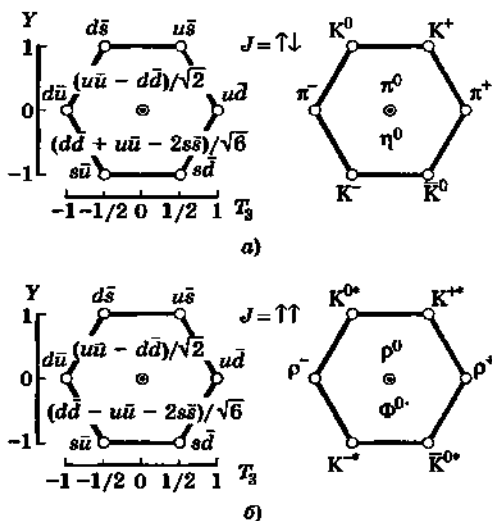


Рис. VII.4.10

Структура частиц, расположенных в вершинах шестиугольника очевидна, комбинация же в центре требует пояснений. Из трех кварков и антикварков можно построить 9 комбинаций. Три из них истинно нейтральны:

$u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$. В результате сильных взаимодействий эти три состояния могут переходить друг в друга, так что определенное значение масс имеют три суперпозиции этих состояний. В случае строгой SU(3)-симметрии произошло бы отщепление SU(3)-инвариантной суперпозиции: $\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$. Для псевдоскалярных мезонов

она отвечала бы SU(3)-синглетному η' -мезону, для векторных — SU(3)-синглетному ω -мезону. Из двух оставшихся суперпозиций одна имеет единичный изоспин (π^0 для псевдоскаляров и ρ^0 для векторов): $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$, а дру-

гая — нулевой изоспин: $\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$. Ее вид оп-

ределяется требованием ортогональности первым двум суперпозициям. Она отвечает η -мезону для псевдоскаляров и Φ мезону для векторов. Коэффициенты в суперпозициях определены из нормировки.

9°. Аналогом матриц Паули в случае SU(2)-симметрии являются эрмитовы матрицы Гелл-Манна λ_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) в случае SU(3)-симметрии:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Гелл-Манна имеют нулевой след и подчиняются коммутационным условиям:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i\kappa_{ijk}\lambda_k,$$

где κ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, а по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование.

вание; причем $\kappa_{123} = 2$; $\kappa_{147} = 1$; $\kappa_{156} = -1$; $\kappa_{246} = 1$; $\kappa_{257} = 1$; $\kappa_{345} = 1$; $\kappa_{367} = -1$; $\kappa_{458} = \sqrt{3}$; $\kappa_{678} = \sqrt{3}$.

10°. Нарушенная в природе SU(3)-симметрия приводит к смешиванию SU(3)-синглетные мезоны и восьмые компоненты SU(3)-октетов. Для векторных мезонов смешивание гораздо сильнее, чем для псевдоскалярных. В результате смешивания физическими состояниями являются $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$ и $\Phi = s\bar{s}$ ($m_\omega = 783$ МэВ,

$m_\Phi = 1020$ МэВ). На рис. VII.4.11 изображен октет барионов с $J^P = (1/2)^+$ с упрощенной кварковой структурой. Комбинация в центре $\{ud\}s$, симметричная относительно замены $u \leftrightarrow d$, имеет единичный изоспин и описывает Σ^0 -гиперон, а антисимметричная по $u \leftrightarrow d$ комбинация $[ud]s$ имеет нулевой изоспин и описывает Λ^0 -гиперон. На рис. VII.4.12 изображен декуплет барионов с $J^P = (3/2)^+$. Известен ряд других SU(3)-мультиплетов.

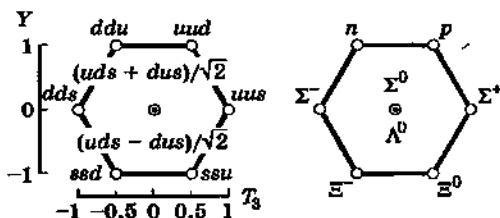


Рис. VII.4.11

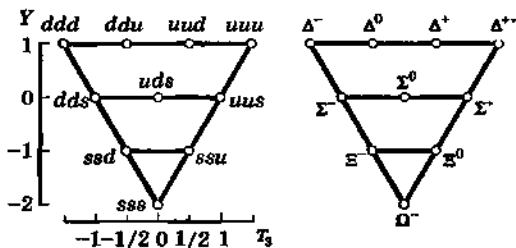


Рис. VII.4.12

11°. В 1974 г. на протонном синхротроне в Брукхейвене и электронно-позитронном коллайдере в Стэнфорде был открыт новый мезон с массой около $3,1 \text{ ГэВ}/c^2$. Группа С. Тинга, обнаружившая частицу в Брукхейвене, назвала ее J , а стэнфордская группа во главе с Б. Рихтером назвала вновь открытую частицу ψ . За новым мезоном закрепилось двойное название J/ψ (жи-пси-мезон); $J/\psi = c\bar{c}$ — векторный мезон, являющийся основным состоянием пары из c -кварка и $\bar{c}$ -кварка. Так как J/ψ содержит и c - и $\bar{c}$ -кварки, то он получил название мезона со «скрытым очарованием».

На ускорителе SPEAR (США, 1976) были обнаружены частицы с «открытым очарованием», т. е. содержащие только c -кварк (или $\bar{c}$ -кварк) вместе с легким антикварком $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ (кварком u , d , s) — D^0 - и D^+ -мезоны (табл. VII.13).

Таблица VII.13

Мезон	Масса, $\text{МэВ}/c^2$, время жизни, пс	Основные моды распада	Относительная вероятность, %
$J/\psi = c\bar{c}$ векторный 1S_1 -состояние	3096,916(11)	Адроны e^+e^- $\mu^+\mu^-$	86 7 7
$D^0 = c\bar{u}$ скалярный 1S_1 -состояние	1864,1(1,0), 0,415(4)	$K^-\pi^+\pi^0$ $K^-\pi^+\pi^+$ $K^-\pi^+$ $K^-l^+\nu_l$	18,9(9) 7,6(4) 3,85(9) 3,50(17)
$D^+ = c\bar{d}$ скалярный 1S_1 -состояние	1869,4(5), 1,057(15)	$K^+\pi^+\pi^+$ $K^+\pi^+\pi^0$ $\bar{K}^0\pi^+\pi^+\pi^-$ $\bar{K}^0l^+\nu_l$	9,0(6) 6,4(1,1) 7,0(9) 6,8(8)
$D_s^+ = c\bar{s}$ векторный 3S_1 -состояние	1969,0(1,4), 0,467(17)	$K^+K^-\pi^+$ $\Phi\pi^+$ K^+K^0 $\Phi l^+\nu_l$	4,4(1,2) 3,6(9) 3,6(1,1) 2,0(0,6)
$D^{*0} = c\bar{u}$ векторный 3S_1 -состояние	2006,7(5)	$D^0\pi^0$ $D^0\gamma$	61,9(2,9) 38,1(2,9)
$D^{*+} = c\bar{d}$ векторный 3S_1 -состояние	2010,0(5)	$D^0\pi^+$ $D^+\pi^0$ $D^+\gamma$	68,1(1,4) 30,6(5) 1,7(5)
$D_s^{*+} = c\bar{s}$ векторный 3S_1 -состояние	2112,9(1,5)	$D_s^+\gamma$ $D_s^+\pi^0$	94,2(2,5) 5,8(2,5)

12°. Основные состояния очарованных барионов являются составной частью двух $SU(4)$ -мультиплетов, в которых каждый из барионов содержит три кварка одного из четырех ароматов (u, d, s, c). Первый из мультиплетов содержит барионы с $J^P = (1/2)^+$, а второй — барионы с $J^P = (3/2)^+$ (табл. VII.14, VII.15).

Таблица VII.14

Барион	Масса, МэВ/ c^2 , время жизни, пс	Основные моды распада
$\Lambda_c^+ = udc$	2284,9(6), 0,200(10)	$pK^-\pi^+$
$\Sigma_c^{++} = uuc$	2453,1(6)	$\Lambda_c^+ \pi^+$
$\Sigma_c^+ = udc$	2453,8(9)	$\Lambda_c^+ \pi^0$
$\Sigma_c^0 = ddc$	2452,4(7), 0,098(23)	$\Lambda_c^+ \pi^-$
$\Xi_c^+ = usc$	2465,4(1,6), 0,34(6)	$\Lambda K^-\pi^+\pi^+$
$\Xi_c^0 = dsc$	2470,4(2,0), 0,098(23)	$\Xi^-\pi^+\pi^+\pi^-$
$\Xi_c^{*+} = usc$	2573,7(3,3)	$\Xi^+\gamma$
$\Xi_c^{*0} = dsc$	2577,4(3,5)	$\Xi^0\gamma$
$\Omega_c^0 = ssc$	2704(4), 0,063(20)	$\Sigma^+K^-K^-\pi^+$

Таблица VII.15

Барион	Масса, МэВ/ c^2	Основные моды распада	Δm , МэВ/ c^2
$\Sigma_c^{*++} = uuc$	$2519,4 \pm 1,5$	$\Lambda_c^+ \pi^+$	234,5 (1,0)
$\Sigma_c^{*0} = ddc$	$2522,0 \pm 1,4$	$\Lambda_c^+ \pi^-$	232,6 (1,0)
$\Xi_c^{*0} = usc$	$2644,6 \pm 2,3$	$\Xi_c^0 \pi^+$	174,3 (5)
$\Xi_c^{*0} = dsc$	$2642,8 \pm 2,2$	$\Xi_c^+ \pi^-$	178,2 (5)

13°. В 1977 г. была открыта частица Υ -мезон (ипсилон-мезон), состоящая из b -кварков («преlestных»), аналогов «нижних» d - и s -кварков, вот почему иногда букву b относят к слову bottom — нижний. Υ -мезон представляет собой низшее состояние пары $b\bar{b}$. Найдены возбужденные уровни этой системы, которые называют *ипсилонием* (или *боттомием*). Открыты также мезоны, содержащие одиночные b -кварки. В табл. VII.16 представлены характеристики B -мезонов.

Таблица VII.16

Мезон (год открытия)	Масса, МэВ/с ² , время жизни	Основные моды распада
$\Upsilon = b\bar{b}$ ипсилон (1977)	9460,4, $1,3 \cdot 10^{-20}$ с	e^+e^- $\mu^+\mu^-$
$B_d^0 = d\bar{b}$	5277,6(1,4), 1,2 пс	D^0 + др.
$B_u^+ = u\bar{b}$	5279,4(1,5), 1,5 пс	D^+ + др.
$B_s^0 = s\bar{b}$	5369,6(2,4), 1,46(6) пс	J/ψ lv_l
$B_c = c\bar{b}$	6400(400), 0,46 пс	J/ψ lv_l

В 1995 г. в экспериментах на протон-антипротонном коллайдере Тэватрон (Фермилаб, США, с энергией в системе центра масс 1,8 ТэВ) был открыт t -кварк, называемый истинным (truth) или верхним (top), с массой $m_t = 174 \pm 5$ ГэВ.

14°. В сильном взаимодействии цветовые заряды играют похожую роль, что и электрические заряды частиц в электромагнитном взаимодействии. Роль фотонов при этом играют электрически нейтральные безмассовые векторные частицы глюоны. Обмениваясь друг с другом глюонами, кварки «склеиваются» друг с другом и образуют адроны. Основное отличие глюонов от фотонов в том, что фотон один и он электрически нейтрален, а глюонов восемь и они несут цветовые заряды. Благодаря этому, глюоны сильно взаимодействуют друг с другом, испуская и поглощая друг друга. В результате распространение глюонов в вакууме совер-

шенно не похоже на распространение фотонов, а цветное взаимодействие не похоже на электромагнитное.

15°. *Лагранжиан КХД* похож на *лагранжиан КЭД*. Отличие в том, что вместо константы электромагнитного взаимодействия (элементарного электрического заряда e) входит *константа сильного взаимодействия g* , в том, что кварковые спиноры несут еще и цветовые заряды, по которым проводится суммирование, и что глюонный векторный потенциал представляет собой матрицу в цветовом пространстве. Для глюонов тензор напряженностей выражается через глюонный векторный потенциал сложнее, чем для фотонов. Для фотонов компоненты векторного потенциала — числа, и коммутатор векторного потенциала равен нулю. В случае же глюонов коммутатор глюонного векторного потенциала отличен от нуля. Именно он определяет характер нелинейного самовоздействия глюонов.

На рис. VII.4.13, а показана диаграмма кварк-кваркового рассеяния с учетом глюонных петель (поляризация глюоном глюонного вакуума), а на рис. VII.4.13, б — диаграмма кварк-кваркового рассеяния с учетом кварк-антикварковой пары (поляризация глюоном кваркового вакуума).

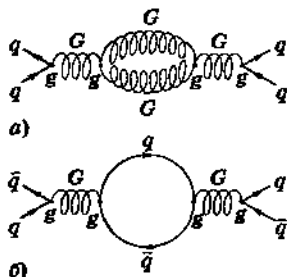


Рис. VII.4.13

Если учесть вклад нелинейного взаимодействия глюонов в поляризацию глюоном глюонного вакуума (рис. VII.4.13, а), то оказывается, что эта поляризация в отличие от поляризации глюоном кваркового вакуума (рис. VII.4.13, б) приводит не к экранировке, а к антиэкранировке цветового заряда. Внутри глюонного облака, окружающего кварк, цветовой заряд последнего меньше. Это означает, что в пределе бесконечно малых расстояний между кварками взаимодействие между ними выключается. На малых расстояниях кварки почти свободны (асимптотически свободны), между ними действует цветовой потенциал типа кулоновского, $\alpha_s(r)/r$, где бегущая константа $\alpha_s(r)$ логарифмически падает с уменьшением расстояния или ростом переданного импульса.

Обратной стороной *асимптотической* свободы является рост цветовых зарядов с увеличением расстояния между кварками. При расстояниях $r \sim 10^{-15} \text{ м} \sim \frac{1}{\Lambda_{\text{КХД}}}$,

где значение $\Lambda_{\text{КХД}}$ находят из эксперимента, цветовое взаимодействие становится по настоящему сильным. Это усиление приводит к невозможности развести кварки на большие расстояния. На малых расстояниях ($r \ll$

$\ll \frac{1}{\Lambda_{\text{КХД}}}$) цветовой потенциал между тяжелым кварком и антикварком ($m \gg \Lambda_{\text{КХД}}$) напоминает потенциал Кулона. При таком законе цветовые силовые линии расходятся от заряда изотропно, так что их поток через единицу поверхности уменьшается обратно пропорционально площади поверхности. При больших расстояниях между кварками ($r \gg \Lambda_{\text{КХД}}$) из-за сильного нелинейного взаимодействия глюонов силовые линии сдавливаются окружающим вакуумом в трубку радиусом, пропорциональным $\frac{1}{\Lambda_{\text{КХД}}}$. При этом силы взаи-

модействия между кварками не зависят от расстояния между ними, а потенциал пропорционален этому расстоянию. Аналитической теории глюонной нити пока нет, но числовые расчеты с упрощенными уравнениями КХД указывают на существование такой нити.

Глюонная нить между тяжелым кварком и антикварком могла бы удлиняться до бесконечности, при этом энергия затрачиваемая на растаскивание кварков, перерабатывалась бы в массу нити. Но существуют легкие кварки ($m \ll \Lambda_{\text{КХД}}$), поэтому нить рвется на куски размером $10^{-15} \text{ м} \sim \frac{1}{\Lambda_{\text{КХД}}}$, представляющие новые мезоны. В месте разрыва рождается легкая кварк-антикварковая пара.

Из-за глюонных и кварк-антикварковых облаков нельзя говорить о массе кварка, не оговорив при этом, на каких расстояниях она измеряется. В силу асимптотической свободы облака редуют на расстояниях поряд-

ка 10^{-16} м, кварки снимают свою «шубу». Именно такие кварки называют *токовыми*. Кварки же, укутанные в глюонные шубы, называют *блоковыми*. Полагая, что масса нуклонов складывается из масс трех блоковых кварков, получаем, что массы глюонных шуб u - и d -кварков равны примерно 300 МэВ, что значительно больше их токовых масс. Это позволяет рассмотреть мир, в котором токовые массы легких кварков равны нулю. При этом массы всех барионов и почти всех мезонов не изменяются. Исключение составляют лишь самые легкие — π -мезоны, массы которых пропорциональны $[(m_u + m_d) \Lambda_{\text{КХД}}]^{1/2}$. Такое выделенное положение π -мезонов связано с тем, что они играют ключевую роль в спонтанном нарушении киральной симметрии.

16°. Безмассовые частицы обладают особой сохраняющейся величиной, называемой *спиральностью* — проекцией спина частицы на ее импульс, т.е.

$$h = \frac{\sigma \cdot p}{|\sigma||p|},$$

которая не может быть лоренц-инвариантным способом определена для частиц с ненулевой массой. Если спин направлен против импульса, *спиральность* называется *левой* L , если по импульсу, то — *правой* R . Безмассовые частицы движутся со скоростью света и поэтому никакими движениями координатной системы изменить направление спиральности безмассовой частицы нельзя. Для массивной частицы это сделать можно.

Испускание и поглощение векторных глюонов цветными зарядами кварков не меняет спиральности последних. Поэтому для безмассовых кварков *лагранжиан КХД* разбивается на симметричные слагаемые, одно из которых содержит *левые кварки* u_L, d_L , а другое — *правые* — u_R, d_R . Каждое из этих слагаемых обладает своей изотопической симметрией, так что полный лагранжиан инвариантен относительно произведения $SU(2)_L \times SU(2)_R$.

На уровне лагранжиана нет различия между обычной изотопической $SU(2)$ -симметрией и киральной симметрией $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Однако в реальном мире адронов это различие значительно. Обычная изотопи-

ческая симметрия реализуется линейно: повороты изоспина кварков и изоспина составных нуклонов происходят синхронно. С киральной симметрией это не так, поскольку нуклоны массивны и не имеют определенной спиральности. Это случай, когда лагранжиан имеет определенную симметрию, а физическое состояние ее не имеет. Говорят о *спонтанном нарушении глобальной симметрии*.

17°. Спонтанное нарушение симметрии всегда сопровождается появлением безмассовых бозонов — *голдстоуновских бозонов*. Название происходит от фамилии Д. Голдстоуна, который в 1961 г. выдвинул идею спонтанного нарушения симметрии и ввел гипотетическую безмассовую частицу. Такими бозонами и были бы три безмассовых π -мезона в мире, где u - и d -кварки безмассовы. В реальном мире, где массы u - и d -кварков малы, но не равны нулю, и киральная симметрия лагранжиана является приближенной, π -мезоны являются псевдоголдстоуновскими бозонами: их массы хотя и не равны нулю, но малы по сравнению с массами других адронов.

5. СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1°. Открытие в 1896 г. Анри Беккерелем испускания проникающего излучения солями урана положило начало исследованию как сильного, так и слабого взаимодействия. Беккерель наблюдал β -лучи, т. е. электроны, испускаемые при радиоактивном распаде тория. С открытия β -распада (1896 г.) началась история исследования слабого взаимодействия, первый этап которой закончился в 1931 г., когда Вольфганг Паули выдвинул гипотезу, что наряду с электронами при β -распаде ядер испускаются легкие нейтральные частицы — нейтрино, как их назвал Энрико Ферми.

2°. В 1933—34 гг. Ферми создал количественную теорию β распада. Согласно этой теории, распад нейтрона происходит в результате взаимодействия двух токов. Один, как теперь говорят, *адронный*, переводит нейтрон в протон. Другой ток, *лептонный*, рождает пару: $e^- \bar{\nu}_e$. Взаимодействие этих токов получило название *четырехфермионного взаимодействия*, так как в нем участвуют 4 фермиона.

Константа четырехфермионного взаимодействия — константа Ферми — размерная:

$$G_F = 1,4 \cdot 10^{-62} \text{ Дж} \cdot \text{м}^3$$

(в единицах $\hbar = c = 1$: $G_F = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2} = 10^{-5} m_p^{-2}$, где m_p — масса протона, ГэВ). В ядерном масштабе константа Ферми мала, поэтому малы вероятности β -распада, пропорциональные G_F^2 .

После открытия мюонов, π -мезонов и странных адронов выяснилось, что как распады этих частиц, так и β -распад ядер вызваны слабым четырехфермионным взаимодействием с константой G_F . Из соображений размерности сечение распада должно быть пропорционально $G_F^2 E^2$, где E — энергия, выделяемая при распаде, вероятность же распада в единицу времени пропорциональна $G_F^2 E^5$. Таким образом, широкий разброс времен жизни мезонов и барионов объясняется различием в значении E . Например, τ -лептон и очарованные мезоны примерно в 20 раз массивнее μ -лептона, в соответствии с этим их времена жизни в 10^5 — 10^7 раз меньше и составляют примерно 10^{-13} с.

Слабое взаимодействие ответственно за все медленные распады. Универсальный характер слабого взаимодействия подтвердили исследования новых типов частиц.

3°. *Лагранжиан фермиевского (четырёхфермионного) взаимодействия*, описывающий слабый распад $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, имеет вид произведения двух токов — адронного $\bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n$ и лептонного $\bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu$:

$$L_F = -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu.$$

Он был получен по аналогии с лагранжианом электромагнитного взаимодействия с заменой плотности электромагнитного тока $\bar{\psi} \gamma_\alpha \psi(x)$, связанной с электронным полем $\psi(x)$, на адронный ток $\bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n = (\text{упрощение записи}) = \\ &= \bar{p} \gamma_\alpha n = (\text{упрощение записи}) = \bar{p} n \end{aligned}$$

и заменой 4-вектор потенциала поля фотонов A_α на лептонный ток $\bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \Psi_\nu$:

$$A_\alpha \rightarrow \bar{\Psi}_e \gamma_\alpha \Psi_\nu = (\text{упрощение записи}) = \\ = \bar{e} \gamma_\alpha \nu_e = (\text{упрощение записи}) = \bar{e} \nu_e.$$

Кроме того, электрический заряд e в электромагнитном лагранжиане заменяется на *постоянную Ферми* $\frac{1}{\sqrt{2}} G_F$. В упрощенной записи (обозначение операторов рождения и уничтожения частиц заменены символами частиц и опущена запись матриц Дирака) лагранжиан β -распада имеет вид

$$L_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}} G_F (\bar{p} n) \times (\bar{e} \nu_e).$$

4°. Токи, меняющие электрический заряд участвующих в них частиц, называют *заряженными*, например, токи $\bar{e} \nu_e$ и $\bar{p} n$. В обоих токах заряд уменьшается на единицу: из нейтрального нейтрино получается отрицательно заряженный электрон, из положительно заряженного протона — нейтральный нейтрон. При такой интерпретации полагается, что оператор ν_e уничтожает нейтрино, а оператор $\bar{e}$ рождает электрон (аналогично для нуклонов). Но оператор ν_e не только уничтожает нейтрино, но и рождает антинейтрино, так что отрицательно заряженный ток $\bar{e} \nu_e$ рождает отрицательно заряженную пару: $e + \bar{\nu}_e$. Он же уничтожает пару $\bar{e} + \nu_e$.

Наряду с токами $\bar{e} \nu_e$ и $\bar{p} n$ существуют сопряженные положительно заряженные токи $\bar{\nu}_e e$ и $\bar{n} p$, увеличивающие электрический заряд участвующих в них частиц. Эти токи рождают положительно заряженные пары и уничтожают отрицательно заряженные.

Лагранжиан β -распадного взаимодействия сохраняет электрический заряд, так как он является произведением положительно заряженного тока $\bar{p} n$ и отрицательно заряженного тока $\bar{e} \nu_e$.

Слабые ядерные взаимодействия наблюдались впервые в 1964 г. в реакции, идущей под действием пучка нейтронов из ядерного реактора. Они обусловлены взаимодействием тока $\bar{p}n$ с сопряженным током $\bar{n}p$, что означало существование взаимодействия единого слабого заряженного тока со своим сопряженным током. Если бы весь заряженный ток состоял только из слагаемых $\bar{p}n + \bar{\nu}_e e$, то в произведении $(\bar{p}n + \bar{\nu}_e e) \times (\bar{n}p + \bar{e} \nu_e)$ было бы четыре слагаемых. В электронном β -распаде проявляется слагаемое $(\bar{p}n) \times (\bar{n} \nu_e)$. В позитронном β -распаде проявляется сопряженное слагаемое $(\bar{\nu}_e e) \times (\bar{n}p)$. В слабых ядерных реакциях — диагональное слагаемое $(\bar{p}n) \times (\bar{n}p)$. Другое диагональное слагаемое $(\bar{\nu}_e e) \times (\bar{e} \nu_e)$ описывает рассеяние электронных нейтрино на электронах (впервые наблюдалось в 1976 г.).

Предложенная Ферми схема описания слабого взаимодействия «ток $\times$ ток» полностью подтвердилась, только место нуклонов в токе заняли кварки, а лептонов стало больше.

5°. Все слабые реакции, обусловленные заряженными токами, могут быть выражены как результат взаимодействия полного заряженного тока j и сопряженного ему тока j^+ .

Установлено, что ток j является суммой трех лептонных $(\bar{e} \nu_e, \bar{\mu} \nu_\mu, \bar{\tau} \nu_\tau)$ и девяти кварковых $(\bar{d}u, \bar{s}u, \bar{b}u, \bar{d}s, \bar{s}s, \bar{b}s, \bar{d}t, \bar{s}t, \bar{b}t)$ слагаемых:

$$j = \bar{e} \nu_e + \bar{\mu} \nu_\mu + \bar{\tau} \nu_\tau + \\ + V_{du} \bar{d}u + V_{su} \bar{s}u + V_{bu} \bar{b}u + V_{ds} \bar{d}s + V_{ss} \bar{s}s + \\ + V_{bs} \bar{b}s + V_{dt} \bar{d}t + V_{st} \bar{s}t + V_{bt} \bar{b}t,$$

где $V_{du}, V_{su}, \dots, V_{bt}$ — числовые коэффициенты. В выражении для полного заряженного тока заметно различие между лептонами и кварками. Во-первых, лептоны образуют токи только со своими нейтрино, в то время как любой из верхних кварков образует ток с каждым из

нижних, независимо от поколения. Во-вторых, лептонные пары входят с единичными коэффициентами, что означает одинаковость их взаимодействия, коэффициенты же при *кварковых токах*, вообще говоря, не равны друг другу.

6°. В основе современной теории слабого взаимодействия лежит идея, что при «правильном» взгляде на кварковый ток он должен выглядеть аналогично лептонному. Если ограничиться только двумя поколениями фундаментальных фермионов: электронным и мюонным, то идея в том, чтобы в таком мире полный ток написать в виде

$$j = \bar{e} v_e + \bar{\mu} v_\mu + \bar{d}' u + \bar{s}' c,$$

где $\bar{d}'$ и $\bar{s}'$ — «повернутые кварки», представляющие собой комбинации:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}.$$

При этом четыре коэффициента $V_{du}, V_{su}, V_{dc}, V_{sc}$ выражаются через один параметр — угол θ_c , получивший название *угол Кабиббо* (предложен Н. Кабиббо, 1963 г.). С точностью до поправок, связанных с существованием третьего поколения, эксперименты подтвердили такую структуру слабого тока и дали значение $|\sin \theta_c| = 0,22$.

Для слабых токов «истинными частицами» являются повернутые состояния d' и s' , не имеющие определенных масс. Определенные и разные массы имеют состояния d и s . В мире, где есть три поколения фундаментальных фермионов, имеем

$$j = \bar{e} v_e + \bar{\mu} v_\mu + \bar{\tau} v_\tau + \bar{d}' u + \bar{s}' c + \bar{b}' t.$$

Здесь уже повернуты три кварка: $d, s, b \rightarrow d', s', b'$, и вместо матрицы поворота 2×2 нужна матрица 3×3 , общий вид которой громоздок. Можно показать, что элементы этой матрицы выражаются через 4 независимых параметра: 3 угла в трехмерном пространстве $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и фазовый множитель $\exp(i\delta)$.

7°. Фундаментальной особенностью слабого взаимодействия является его зеркальная асимметричность. Экспериментально была обнаружена полная *зеркальная асимметрия* (нарушена P -четность) в β -распаде ядер, в распадах мюонов, пионов, каонов и гиперонов.

Несохранение P -четности в слабом взаимодействии означает, что лагранжиан этого взаимодействия должен состоять из двух слагаемых: *скалярного* и *псевдоскалярного*. За счет скалярного слагаемого псевдоскалярный K^+ -мезон с сохранением P -четности распадается на 3 пиона, а за счет псевдоскалярного слагаемого тот же K^+ -мезон с нарушением P -четности распадается на 2 пиона. В большинстве других распадов оба слагаемых дают одни и те же конечные частицы, но в разных орбитально-спиновых состояниях. Интерференция этих состояний и дает зеркально-асимметричные эффекты: например, продольную поляризацию спина β -распадного электрона в направлении, противоположном его импульсу, или корреляцию импульса β -электрона со спином распадающегося нейтрона. При P -отражении такие корреляции меняют свой знак, и поэтому в зеркале видны процессы, которых нет в природе. Для того, чтобы лагранжиан слабого взаимодействия давал сумму скаляра и псевдоскаляра, слабые токи должны представлять собой разность *полярного* и *аксиального векторов*. Такой ток называли *V-A-током*. Для электрон-нейтринного тока его полярно-векторная часть V имеет вид $\bar{e} \gamma_\alpha \nu_e$, его аксиально-векторная часть A : $\bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e$, где

$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, а γ_α — матрицы Дирака. Величина $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$,

действуя на четырехкомпонентный спинор ψ , описывающий безмассовую частицу, выделяет из него компоненту ψ_L , имеющую левую *спиральность*. Величина

$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ выделяет правоспиральную компоненту ψ_R .

Все частицы входят в V - A -ток своими левыми спиральными компонентами ψ_L , а все античастицы — правыми $\bar{\psi}_R$.

Обычно о V - A -токе говорят как о *левом токе*, имея в

виду при этом входящие в него частицы, а не античастицы. Все эксперименты говорят об универсальности $V-A$ -структуры заряженных токов.

Лагранжиан заряженных токов имеет вид

$$L_w^{\text{ch}} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F j_\alpha j_\alpha^+,$$

где

$$j_\alpha = 2(\bar{e}_L \gamma_\alpha \nu_{eL} + \bar{\mu}_L \gamma_\alpha \nu_{\mu L} + \bar{\tau}_L \gamma_\alpha \nu_{\tau L} + \\ + \bar{d}'_L \gamma_\alpha u_L + \bar{s}'_L \gamma_\alpha c_L + \bar{b}'_L \gamma_\alpha t_L).$$

8°. P -отражение является одним из трех дискретных преобразований. Два других — обращение времени T и зарядовое сопряжение C — тесно связаны с P -отражениями. В квантовой теории поля существует фундаментальная *теорема Людерса—Паули* (1955 г.) или *СРТ-теорема*, согласно которой лагранжиан физической системы должен быть *СРТ*-инвариантен. Таким образом, нарушение P -симметрии должно сопровождаться нарушением C -симметрии, или T -симметрии, или обеих вместе.

В слабых распадах с нарушением P -симметрии найдено полное нарушение C -симметрии. Например, если распадные электроны имеют преимущественно левую поляризацию, то распадные позитроны в C -сопряженных распадах имеют преимущественно правую поляризацию. Особенно ярко нарушение как P -, так и C -симметрии проявляется в свойствах безмассовых нейтрино, представляющих собой как бы идеальные винты: все нейтрино имеют левую спиральность, все антинейтрино — правую. До 1964 г. все исследованные распады (в пределах точности эксперимента) удовлетворяли требованиям комбинированной CP -симметрии, но в 1964 г. Дж. Кронин, Дж. Кристенсен, В. Фитч и Р. Терли обнаружили распад долгоживущего K -мезона на 2 пиона:

$$K_{\text{long}}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-.$$

Поскольку в основном K_{long}^0 -мезоны распадаются на CP -нечетные состояния трех пионов, а состояние

$\pi^+\pi^-$ — CP -четно, то открытие распада $K_{\text{long}}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ означало нарушение CP -симметрии.

В отличие от P - и C -асимметрии все известные CP -асимметричные эффекты малы (около 10^{-3} в амплитуде) и ограничены только распадами K_{long}^0 -мезона.

9°. В 1973 г. были обнаружены безмюонные нейтринные реакции типа $\nu_\mu p \rightarrow \nu_\mu p \pi^+\pi^-$, обусловленные взаимодействием *нейтральных токов*. В этих реакциях мюонные нейтрино, сталкиваясь неупруго с нуклонами, не превращались в мюоны, а оставались мюонными нейтрино. Был сделан вывод о существовании взаимодействия нейтрального нейтринного тока типа $\bar{\nu}_\mu \nu_\mu$ и нейтральных кварковых токов типа $\bar{u}u$ и $\bar{d}d$.

Константа этого взаимодействия оказалась примерно такой, как у заряженных токов. Поиски других нейтральных токов привели к открытию в 1978 г. слабого электронного тока $\bar{e}e$. Этот P -нечетный ток проявился в эффекте вращения плоскости поляризации лазерного луча, проходящего через пары атомарного висмута. Оптическая активность паров висмута означает существование не сохраняющего P -четность слабого взаимодействия между атомными электронами и u - и d -кварками.

Взаимодействие тока $\bar{e}e$ с токами $\bar{u}u$ и $\bar{d}d$ наблюдалось (1978 г.) в рассеянии продольно-поляризованных электронов с *дейтронами* — ядрами дейтерия.

В 1982 г. было обнаружено взаимодействие тока $\bar{e}e$ с токами $\bar{\mu}\mu$ и $\bar{\tau}\tau$. Наблюдалась слабая зарядовая асимметрия в реакциях $\bar{e}e \rightarrow \bar{\mu}\mu$ и $\bar{e}e \rightarrow \bar{\tau}\tau$.

Все выявленные до сих пор нейтральные токи не изменяют аромата участвующих в них частиц, т. е. переводят частицу в саму себя: электрон в электрон, мюон в мюон и т. д.

Из 12 фундаментальных фермионов можно образовать 12 диагональных нейтральных токов: $\bar{\nu}_e \nu_e$, $\bar{\nu}_\mu \nu_\mu$, $\bar{\nu}_\tau \nu_\tau$, $\bar{u}u$, $\bar{c}c$, $\bar{t}t$, $\bar{e}e$, $\bar{\mu}\mu$, $\bar{\tau}\tau$, $\bar{d}d$, $\bar{s}s$, $\bar{b}b$.

Лагранжиан взаимодействия нейтральных токов имеет вид

$$L_W^n = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F j_\alpha^n j_\alpha^{n+},$$

причем спиральная структура нейтрального тока j_α^n более сложная, чем структура заряженного тока.

Суммарный нейтральный ток j_α^n состоит из слагаемых двух типов: $\bar{\psi}_L \gamma_\alpha \psi_L$ — *левых токов* и $\bar{\psi}_R \gamma_\alpha \psi_R$ — *правых токов*. Левые токи верхних частиц ($\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, c, t$) входят с коэффициентом $\left(\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W\right)$, где Q — заряд частицы (в единицах элементарного заряда e), а θ_W — *угол Вайнберга*.

Левые токи нижних частиц (e, μ, τ, d, s, b) входят с коэффициентом $\left(-\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W\right)$. Коэффициенты при правых токах одинаковы для верхних и нижних частиц и равны $-Q \sin^2 \theta_W$. Экспериментально найдено, что $\sin^2 \theta_W \sim 0,22$.

Существование нейтральных токов было предсказано теорией *электрослабого взаимодействия*. Открытие нейтральных токов было триумфом этой теории.

6. ЭЛЕКТРОСЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1°. Фундаментом теории *электрослабого взаимодействия* является калибровочная симметрия $SU(2) \times U(1)$. Здесь $SU(2)$ — *группа слабого изоспина*, а $U(1)$ — *группа слабого гиперзаряда*.

Две характерные черты отличают электрослабую теорию от собственно *электродинамики* и *хромодинамики*. Во-первых, калибровочная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия спонтанно нарушена, вследствие чего слабые калибровочные бозоны — промежуточные бозоны W и Z^0 (см. табл. VII.8) — массивны. Во-вторых, теория явно зеркально-асимметрична: левые компоненты фермионов, $\psi_L = (1 + \gamma_5) \frac{\psi}{2}$, образуют изотопические дублеты относительно группы $SU(2)$, в то время как правые компоненты этих же фермионов, $\psi_R = (1 - \gamma_5) \frac{\psi}{2}$, представляют собой изотопические синглеты.

2°. Ненарушенная локальная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия требует существования четырех безмассовых векторных бозонов — двух заряженных, W^+ и W^- , и двух нейтральных, W^0 и B^0 . При этом три W -бозона представляют собой триплет относительно группы $SU(2)$, а B^0 -бозон — синглет относительно этой группы.

W -бозоны — калибровочные поля группы слабого изоспина $SU(2)$, их взаимодействие характеризуется константой калибровочного взаимодействия g_2 ; B^0 -бозон — калибровочное поле группы слабого гиперзаряда $U(1)$, его взаимодействие характеризуется константой g_1 .

Поля W^0 - и B^0 -бозонов являются фундаментальными в структуре ненарушенной $SU(2) \times U(1)$ -симметрии.

3°. Реальные поля фотона A и нейтрального Z^0 -бозона представляют собой взаимно-ортогональные суперпозиции W^0 - и B^0 -бозонов

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ W^0 \end{pmatrix},$$

где θ_W — угол Вайнберга (угол слабого смешивания). Суперпозиции A и Z выделены тем, что при спонтанном нарушении симметрии одна из них A остается безмассовой, а другая Z приобретает массу (так же, как W^+ и W^-). Такой вид полей A и Z можно найти, если исходить из того, что в результате спонтанного нарушения $SU(2) \times U(1)$ -симметрии остается ненарушенной симметрия $U(1)_{em}$, связанная с законом сохранения электрического заряда Q .

4°. Так как источником триплета полей W является слабый изоспин T , а источником поля B^0 является слабый гиперзаряд $\frac{Y}{2}$, то для ковариантной производной имеем

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i \left(g_1 \frac{Y}{2} B_\alpha^0 + g_2 T W_\alpha \right).$$

Если выделить поле A , источником которого является заряд Q , и ортогональное ему поле Z , то в результате амплитуда испускания полей Z , W^+ , W^- соответствующими зарядами имеет вид

$$ig_1g_2(g_1^2 + g_2^2)^{-1/2}QA + i(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}(T_3 - Q \sin^2 \theta_W)Z + ig_2(T^-W^+ + T^+W^-).$$

Это выражение является центральной **формулой электрослабой теории**: оно содержит всю информацию об электромагнитном взаимодействии (первое слагаемое), о нейтральных токах (второе слагаемое) и о заряженных токах (третье слагаемое). Из него следует, что константа электромагнитного взаимодействия выражается через константы g_1 и g_2 :

$$e = g_1g_2(g_1^2 + g_2^2)^{-1/2} = g_2 \sin \theta_W.$$

Константа g_2 характеризует испускание и поглощение $W^\pm$ -бозонов аналогично тому, как константа e характеризует испускание и поглощение фотонов. Константа $g_2 > e$ и, следовательно, слабое взаимодействие по существу сильнее электромагнитного. То, что в наблюдавшихся до сих пор процессах слабое взаимодействие значительно слабее электромагнитного, связано с массивностью W -бозонов.

Рассмотрим, например, взаимодействие токов $\bar{e}_L \gamma_\alpha \nu_{eL}$ и $\bar{\mu}_L \gamma_\alpha \nu_{\mu L}$, дающее распад мюона. На рис. VII.4.14 показано, как это взаимодействие происходит путем обмена W -бозоном (а) и то же взаимодействие изображено как взаимодействие двух токов в точке (б).

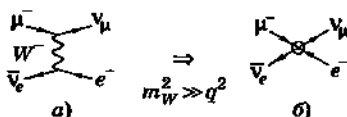


Рис. VII.4.14

Точечное взаимодействие является хорошим приближением, если квадрат 4-импульса, переносимого W -бозоном q^2 , мал по сравнению с квадратом его массы m_W^2 .

Можно сказать, что в этом случае массивный виртуальный бозон проходит от точки испускания до точки поглощения расстояние, которое пренебрежимо мало по сравнению с длинами волн частиц, участвующих в процессе.

Сравнивая диаграммы рис. VII.4.14, а и б, можно выразить константу Ферми G_F через g_2 и m_W :

$$G_F = \frac{g_2^2}{2^{5/2} m_W^2} = \frac{e^2}{2^{5/2} m_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\pi \alpha}{2^{1/2} m_W^2 \sin^2 \theta_W},$$

где α — постоянная тонкой структуры. Важно, что $\sin \theta_W$ определяет как связь g_1 и g_2 , так и вид нейтральных токов.

5°. Из слагаемого с W -бозоном в амплитуде испускания полей Z , W^+ , W^- следует вид тока, который был назван *нейтральным*. Для левых компонент все верхние частицы имеют $T_3 = +1/2$, а все «нижние» частицы $T_3 = -1/2$. Левые токи для верхних и нижних частиц имеют соответственно вид $\left(\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W\right) \bar{\Psi}_L \gamma_\alpha \Psi_L$ и

$$\left(-\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W\right) \bar{\Psi}_L \gamma_\alpha \Psi_L.$$

Изоспин правых частиц равен нулю, поэтому для правых токов следует выражение

$$Q \sin^2 \theta_W \bar{\Psi}_R \gamma_\alpha \Psi_R.$$

Слабое взаимодействие нейтральных токов осуществляется путем обмена виртуальными Z -бозонами, причем константа испускания W -бозона больше константы испускания Z -бозона. Их отношение равно $1/\cos \theta_W$. Отношение масс Z - и W -бозонов также равно $1/\cos \theta_W$. Эффективная четырехфермионная константа для нейтральных и заряженных токов одна и та же

$$G_F = \frac{g_2^2}{2^{5/2} m_W^2} = \frac{g_1^2 + g_2^2}{2^{5/2} m_Z^2}.$$

Из-за того, что слабые изотопические фермионные дублеты состоят из «повернутых» кварков d' , s' , b' , заряженные токи содержат переходы между кварками

различных поколений. В нейтральных токах электрослабой теории этого нет. Для всех нижних кварков слабые токи имеют одинаковую форму и входят в полный нейтральный ток в виде суммы

$$\bar{d}' d' + \bar{s}' s' + \bar{b}' b' = \bar{d} d + \bar{s} s + \bar{b} b.$$

Это равенство следует из унитарности матрицы поворота, связывающей штрихованные и не штрихованные кварки, т. е. нейтральные токи диагональны по ароматам. Это относится и к электромагнитному току.

Строгая калибровочная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия справедлива лишь в случае безмассовых калибровочных бозонов и безмассовых фермионов. Это связано с тем, что массовые члены в лагранжиане $m\bar{\psi} = m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$ связывают между собой левые изодублеты и правые изосинглеты и потому нарушают как сохранение изоспина, так и сохранение гиперзаряда. В природе спонтанно нарушена не только локальная, но и глобальная $SU(2) \times U(1)$ -симметрия.

6°. При спонтанном нарушении *глобальной киральной симметрии* КХД возникают безмассовые *голдстоуновские бозоны*. При спонтанном нарушении *локальной симметрии* происходит обратное явление: безмассовые калибровочные поля становятся массивными, «поглощая» голдстоуновские бозоны. Из безмассового векторного поля, имеющего два спиновых состояния, и безмассового скалярного поля возникает массивная векторная частица с тремя проекциями спина, так что число степеней свободы сохраняется. Это явление в теории поля было открыто в 1964 г. П. Хиггсом и получило название *механизма Хиггса*.

Конкретная реализация механизма Хиггса в стандартной теории электрослабого взаимодействия основана на использовании изотопического дублета скаляр-

ных частиц (изоспинор) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$ и соответствующих

античастиц $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi^- \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$.

Обладая как изоспином, так и гиперзарядом, эти скалярные поля взаимодействуют калибровочно-инвариантным образом с четырьмя калибровочными полями: W^+ , W^- , W^0 , B^0 .

Кроме того, скалярное поле ϕ взаимодействует с фермионами также с сохранением изоспина и гиперзаряда. При этом оно переводит изосинглетные правые фермионы в изодублетные левые. Такие взаимодействия фермионов со скалярами (их называют *взаимодействием Юкавы*) есть у всех шести лептонных и кварковых пар: по два у каждой пары, если нейтрино рассматривать наравне с остальными частицами, не предполагая их безмассовости.

Как калибровочные, так и взаимодействия Юкавы скалярных частиц $SU(2) \times U(1)$ -локально-инвариантны и непосредственно спонтанного нарушения симметрии не дают. Нарушение $SU(2) \times U(1)$ -симметрии связано с нелинейным взаимодействием между полями ϕ , которое можно записать в виде потенциала

$$V(\phi) = \lambda^2(|\phi|^2 - \eta^2)^2.$$

Здесь

$$|\phi|^2 = \bar{\phi}_i \phi_i = \bar{\phi}^+ \phi^+ + \bar{\phi}^0 \phi^0$$

— *изоскаляр*, λ — безразмерный параметр, значения которого неизвестно, параметр η имеет размерность массы. Чтобы получить правильную константу Ферми G_F , нужно выбрать

$$\eta = 2^{-3/4} G_F^{-1/2} = 174 \text{ ГэВ}.$$

Параметр η является единственным размерным параметром теории; через него выражаются массы всех частиц.

При спонтанном нарушении симметрии лагранжиан симметрией обладает, а физическое состояние нет. В частности, симметрией лагранжиана не обладает основное физическое состояние — состояние с минимальной энергией — *вакуум*.

Из выражения для потенциала нелинейного взаимодействия между полями ϕ видно, что энергия обращается в нуль при $|\phi| = \eta$. Это значит, что в вакууме существует постоянное скалярное поле — *вакуумный конденсат* скалярного поля. Но так как скалярное по-

ле обладает изоспином и гиперзарядом и не инвариантно группе $SU(2) \times U(1)$, то и вакуум не инвариантен относительно этой группы. Симметрия спонтанно нарушена.

Взаимодействию скалярного поля ϕ с калибровочными полями: W^+ , W^- , W^0 , B^0 соответствует член в лагранжиане

$$|D_\alpha \phi|^2 = (D_\alpha \phi)_j^* (D_\alpha \phi)_j,$$

где ковариантная производная

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i \left(g_1 \frac{Y}{2} B_\alpha^0 + g_2 T W_\alpha \right)$$

действует на изоспинор ϕ , а по изотопическому индексу $j = 1, 2$ проводится суммирование.

Используя изотопическую симметрию исходного лагранжиана, можно выбрать поле ϕ таким, чтобы вакуумное среднее было только у нижней, электрически

нейтральной компоненты изоспинора $\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$, т. е.

образование конденсата не нарушает сохранение электрического заряда.

Если подставить в лагранжиан взаимодействия скалярного поля ϕ с калибровочными полями W^+ , W^- , W^0 , B^0 вместо ϕ вакуумное среднее $\langle \phi \rangle$, то возникает член, дающий массу W^+ -бозона: $\frac{1}{2} g_2^2 \eta^2 \bar{W} W$, откуда следует, что

$$m_W = \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \eta.$$

Соответственно для массового члена Z -бозона получаем $\frac{1}{4} (g_1^2 + g_2^2) \eta^2 \bar{Z} Z$, откуда следует

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}.$$

Поскольку конденсат $\langle \phi \rangle$ электрически нейтрален, действие на него оператора заряда Q дает нуль и фотон массы не приобретает. Фотон остался безмассовым, потому

что электрический заряд сохраняется ввиду нейтральности конденсата, а промежуточные бозоны стали массивными, поскольку изоспин не сохраняется, т. е. конденсат обладает изоспином.

Источником возникновения массы у фермионов являются юкавские взаимодействия типа

$$f(\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi).$$

Когда скалярное поле ϕ приобретает вакуумное среднее η , фермионы приобретают массу $m = f\eta$. Чтобы воспроизвести спектр масс лептонов и кварков, юкавские константы f должны быть малы и различны (от 0,1 до 10^{-6}).

Из четырех скалярных полей ϕ^+ , ϕ^0 , ϕ^- , ϕ^0 в результате спонтанного нарушения симметрии три «поглощаются» векторными бозонами, остается только одно нейтральное скалярное поле χ , представляющее собой кванты поля на

фоне постоянного конденсата: $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}$. Эти скаляр-

ные бозоны называют *хиггсовыми бозонами* (H-бозоны), или *хиггсонами*. Хиггсоны пока не обнаружены, но уверенность, что они существуют, основана на идеях симметрии и самосогласованности.

7°. Если оставить в стороне вопросы о массах частиц и скалярных бозонов, то современная картина фундаментальных взаимодействий (сильное, слабое и электромагнитное) представляет их обусловленными существованием группы локальной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -симметрии с ее тремя константами связи — «зарядами» g_3 , g_2 , g_1 и 12-ю калибровочными полями: восьмью глюонами, тремя промежуточными бозонами и фотоном.

На достаточно малых расстояниях все эти взаимодействия похожи друг на друга и приводят к потенциалу типа кулоновского g^2/r . Для сильного взаимодействия асимптотическая свобода наступает на расстояниях много меньше 10^{-16} м.

Для электрослабого взаимодействия кулоновский потенциал вступает в силу на расстояниях много мень-

ших комптоновской длины волны W - и Z -бозонов, т. е. много меньше 10^{-18} м.

На расстояниях примерно 10^{-19} м три константы связи близки друг другу:

$$\alpha_s = \frac{1}{4\pi} g_3^2 \approx \frac{1}{10}, \alpha_W = \frac{1}{4\pi} g_2^2 \approx \frac{1}{27}, \alpha_{em} = \frac{1}{4\pi} e^2 \approx \frac{1}{129}.$$

Значение α_{em} возросло по сравнению с макроскопическим стандартным значением $\approx \frac{1}{137}$ в связи с понижением вакуумной экранировки при уменьшении расстояния.

Из-за эффекта поляризации вакуума с ростом переданного импульса величины α_s и α_W уменьшаются, а α_{em} увеличивается. На рис. VII.4.15 изображены логарифмические зависимости обратных величин α_s^{-1} , α_W^{-1} , $\frac{3}{8} \alpha_{em}^{-1}$ от логарифма переданного импульса $\lg q$. Зависимости приблизительно линейные. Наибольший наклон — у линии α_s^{-1} , он обусловлен поляризацией глюонного вакуума. Большая величина наклона α_s^{-1} по

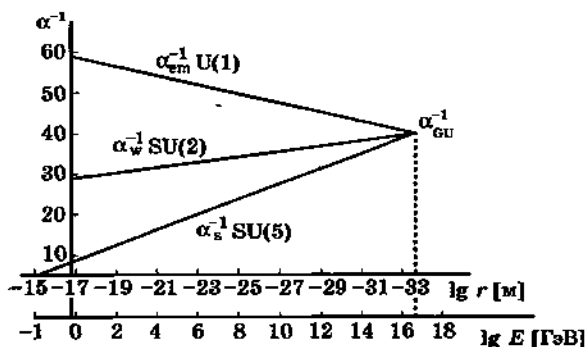


Рис. VII.4.15

рифмические зависимости обратных величин α_s^{-1} , α_W^{-1} , $\frac{3}{8} \alpha_{em}^{-1}$ от логарифма переданного импульса $\lg q$. Зависимости приблизительно линейные. Наибольший наклон — у линии α_s^{-1} , он обусловлен поляризацией глюонного вакуума. Большая величина наклона α_s^{-1} по

сравнению с наклоном α_W^{-1} связана с тем, что глюонов больше, чем промежуточных бозонов, и они, поэтому дают больший эффект антиэкранировки. В α_{em} преобладает эффект экранировки, и поэтому величина α_{em}^{-1} уменьшается с ростом q . При значении $q_{GU} \approx 10^{14} - 10^{15}$ ГэВ обратные константы α_i^{-1} стремятся к одному значению $\alpha_{GU}^{-1} \approx 40$. Индекс GU происходит от слов grand unification — великое объединение трех фундаментальных взаимодействий.

В 1974 г. Г. Джорджи и Ш. Глэшоу предложили в качестве минимальной группы симметрии великого объединения группу $SU(5)$, содержащую произведение $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ как подгруппу.

I. СИСТЕМЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ИХ РАЗМЕРНОСТИ И ЕДИНИЦЫ

1°. Физическая величина — одно из основных понятий физики, смысл которого с развитием физики подвергался ряду обобщений (*скалярная, векторная, тензорная*). Конкретный род физических величин связан с определенным способом сравнения состояний физических тел и полей. *Физическая величина эквивалентна произведению числового значения (т. е. числа) на принятую для данной физической величины единицу.*

2°. В системе физических величин и связывающих их уравнений выбирают определенное число величин, по соглашению считающихся обладающими независимой *размерностью*, которые образуют набор *основных величин* для всей системы в целом. В терминах *основных величин* определяют все другие величины как *производные величины* и выражают их с помощью алгебраических соотношений через степени *основных величин*.

Единицей физической величины называют условно выбранную физическую величину, имеющую тот же смысл, что и рассматриваемая.

Согласованную систему единиц физических величин строят на основе выбранного множества *основных единиц*, достаточно хорошо определенных через *наблюдаемые физические величины*. В этой системе все *производные единицы* выражают с помощью алгебраических соотношений в виде произведений различных степеней *основных единиц*.

Согласованную систему единиц физических величин называют *абсолютной*, если ее основными величинами являются *длина, масса, время*.

3°. Выражение какой-либо *физической величины* в виде произведения степеней *основных величин* (если отвлечься от их векторного или тензорного характера и всех числовых множителей, включая знак) называют *размерным произведением* или просто *размерностью* величины по отношению к выбранному множеству *основных величин* или *основных размерностей*. Показатели степеней, в которые возводятся различные *основные величины* или *размерности*, называют *показателями размерности*.

Физические величины, в размерных показателях которых все показатели размерности равны нулю, считают *безразмерными величинами*.

Основные единицы физических величин представляют собой хорошо определенные выборки *основных величин*. *Основная величина* и соответствующая ей *основная единица* имеют одинаковую *размерность*.

Производная единица физической величины представляет собой произведение различных степеней *основных единиц*. При этом показатели степеней оказываются совпадающими с теми, что входят в произведение степеней *основных величин* в алгебраическом выражении для рассматриваемой производной величины, но опускаются числовые множители. *Производные единицы* и их символы выражаются алгебраически через *основные единицы* и их символы с помощью алгебраических знаков умножения и деления. Некоторые из этих алгебраических выражений для производных единиц заменяют специально выбранными символами, которые, в свою очередь, используют для образования других производных единиц и комбинаций символов.

4°. В таблице П1 приведены множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименование.

5°. В России в качестве предпочтительной используется «Международная система единиц» с принятым сокращенным названием СИ (SI). Эта система основана на семи *основных единицах физических величин*, перечисленных в таблице П2.

В государственных и международных стандартах приводятся следующие определения *основных единиц*.

Метр — единица длины — расстояние, проходящее в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299792458$ долю секунды.

Килограмм — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

Секунда — единица времени, равная продолжительности 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия ^{133}Cs .

Ампер — единица силы тока, равная силе неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин — единица термодинамической температуры, равная $\frac{1}{273,16}$ части термодинамической тройной точки воды.

Моль — единица количества вещества, равная такому его количеству, в котором содержится столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C .

Кандела — единица силы света, равная силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении

$$\frac{1}{683} \frac{\text{Вт}}{\text{ср}}.$$

6°. В таблице ПЗ приведены производные единицы физических величин в СИ, имеющие собственные наименования.

7°. Единицу СИ для измерения плоского угла (радиан) и единицу СИ для измерения телесного угла (стерадиан) рассматривают либо как *основные единицы*, либо как *производные или дополнительные*.

Радиан — угол между двумя радиусами окружности, вырезающими дугу, длина которой равна радиусу. Радиан принимается за единицу измерения углов при так называемом круговом, или радианном, измерении углов.

Стерadian — телесный угол, вырезающий на сфере, описанной вокруг вершины угла, поверхность, площадь которой равна квадрату радиуса сферы.

В физике радиан и стерадиан относят, вообще говоря, к классу *производных величин* (см. табл. ПЗ). В некоторых специальных областях физики, например в электродинамике или при исследовании процессов рассеяния частиц, стерадиан формально относят к *основным единицам*. В этом случае символ «ср» нельзя заменять числом 1.

8°. В теории электричества и магнетизма используют две различные системы уравнений, которые строятся на основе трех и четырех основных величин. Указанные системы называют трех- и четырехразмерными системами уравнений.

В трехразмерных системах уравнений различают три различные системы, связывающие три основные величины: *длину, массу и время*.

1. *Электростатическая система* уравнений основана на определении электрического заряда в качестве производной физической величины с помощью закона Кулона для силы, действующей между двумя зарядами, и, кроме того, рассматривает диэлектрическую проницаемость в качестве безразмерной величины (относительная диэлектрическая проницаемость), значение которой в вакууме равно единице. Как следствие этого, в некоторых уравнениях, связывающих указанные величины, появляется в явном виде корень квадратный из скорости света (т. е. $\sqrt{c}$).

2. *Электромагнитная система* уравнений основана на определении силы электрического тока в качестве производной физической величины с помощью закона Ампера для силы, действующей между двумя элементами тока, и, кроме того, рассматривает магнитную проницаемость в качестве безразмерной величины (относительная магнитная проницаемость), значение которой в вакууме равно единице. Как следствие этого, в некоторых уравнениях, связывающих указанные величины, появляется в явном виде корень квадратный из скорости света (т. е. $\sqrt{c}$).

3. *Симметричная система* уравнений основана на использовании электрических величин (включая

силу электрического тока согласно системе 1) и магнитных величин (согласно системе 2). В результате комбинации двух систем величин в некоторых уравнениях, связывающих электрические и магнитные величины, появляется в явном виде скорость света в вакууме.

Уравнения в трех перечисленных системах записывают обычно в *нерационализированной* форме, т. е. в них часто появляются множители 4π и 4π , когда отсутствует круговая или сферическая симметрия. Эти же уравнения иногда записывают в *рационализированной* форме, когда указанные выше множители появляются лишь в условиях круговой или сферической симметрии.

В четырехразмерных системах уравнений, по крайней мере, одна из основных величин имеет электрическую природу.

Международная система единиц относится к четырехразмерной системе, в которую входят 4 основные величины: *длина, масса, время и сила электрического тока*. В этой системе магнитная проницаемость μ и диэлектрическая проницаемость ϵ в явном виде появляются в качестве размерных физических величин. Магнитная проницаемость вакуума (*магнитная постоянная*) μ_0 и диэлектрическая проницаемость ваку-

ума (*электрическая постоянная*) $\epsilon_0 = \mu_0^{-1}$ с оказываются

равными $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (точно) и $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,854187817... \cdot 10^{-12}$ (точно), где $c = 299\,792\,458$ м/с (точно) — скорость света в вакууме.

9°. Кроме единиц СИ, в научных работах по физике используют систему единиц «сантиметр — грамм — секунда» (СГС, CGS), построенную на трех основных величинах: *длина, масса и время*. Единицами величин являются сантиметр (см, *cm*), грамм (г, *g*), секунда (с, *s*). Система основных единиц СГС расширена за счет единицы термодинамической температуры — кельвина (К, *K*), единицы количества вещества — моля (моль, *mol*) и единицы силы света — канделы (кд, *cd*).

В таблице П4 приведены производные единицы физических величин СГС, имеющие собственные наименования.

10°. В физике применяют три абсолютные системы единиц электрических и магнитных величин на основе системы СГС.

1. Система электростатических единиц СГС (СГСЭ, е.с.у.) образует согласованную систему единиц в комбинации с трехразмерной электростатической системой уравнений (п. 8°).

2. Система электромагнитных единиц СГС (СГСМ, е.м.у.) образует согласованную систему единиц в комбинации с трехразмерной электромагнитной системой уравнений (п. 8°).

3. Система смешанных единиц СГС, называемая системой гауссовых единиц СГС, состоит, с одной стороны, из электрических единиц, аналогичных системе СГСЭ, а, с другой стороны, из магнитных единиц, аналогичных системе СГСМ, и образует согласованную систему единиц в комбинации с трехразмерной гауссовой системой уравнений (п. 8°). Гауссова система СГС наиболее употребительна.

11°. В таблице П5 собраны производные единицы гауссовой системы СГС электрических и магнитных величин, имеющие собственные наименования, а в таблице П6 — некоторые производные единицы гауссовой системы СГС электрических и магнитных величин, не имеющие собственных наименований.

В таблице П7 приведены некоторые характеристические уравнения между величинами, относящимися к нерационализированной трехразмерной смешанной системе (гауссовой системе), и соответствующие четырехразмерные уравнения, представленные в рационализированной форме (СИ). Гауссовы величины отмечены здесь звездочкой $*$, если они отличаются от соответствующих величин в СИ. В третьем столбце таблицы П7 приведены некоторые соотношения между гауссовыми величинами X^* и соответствующими величинами X в СИ.

Входящий во многие выражения в таблицах П5—П7 параметр c называют в системе СГСМ *электродинамической постоянной*, он равен скорости света в вакууме $c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$ см/с.

12°. В таблице П8 представлены внесистемные единицы, кратные соответствующим единицам СИ с коэффициентом пропорциональности в виде точного числа.

Таблица П1

Множителъ	Приставка		Множителъ	Приставка	
	наименование	обозначение: русское, международное		наименование	обозначение: русское, международное
10^{18}	экса	Э, Е	10^{-1}	деци	д, d
10^{15}	пета	П, Р	10^{-2}	сантим	с, с
10^{12}	тера	Т, Т	10^{-3}	милли	м, m
10^9	гига	Г, G	10^{-6}	микро	мк, μ
10^6	мега	М, М	10^{-9}	нано	н, n
10^3	кило	к, k	10^{-12}	пико	п, p
10^2	гекто	г, h	10^{-15}	фемто	ф, f
10	дека	да, da	10^{-18}	атто	а, a

Таблица П2

Основная величина	Размерность	Основная единица	
		наименование	символ: русский, международный
Длина	L	метр	м, m
Масса	M	килограмм	кг, kg
Время	T	секунда	с, s
Сила электрического тока	I	ампер	А, A
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К, K
Количество вещества	N	моль	моль, mol
Сила света	J	кандела	кд, cd

Таблица ПЗ

Физическая величина	Производная единица			
	наименование	символ: русский, международный	выражение через основные единицы	выражение через другие единицы СИ
Плоский угол	радиан	рад, rad	$\text{м} \cdot \text{м}^{-1}$	—
Телесный угол	стерадиан	ср, sr	$\text{м}^2 \cdot \text{м}^{-2}$	—
Частота	герц	Гц, Hz	с^{-1}	—
Сила	ньютон	Н, N	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	Дж/м
Давление	паскаль	Па, Pa	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	$\text{Н}/\text{м}^2$
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж, J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$	$\text{Н} \cdot \text{м}$
Мощность, поток излучения	ватт	Вт, W	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$	Дж/с
Количество элект- ричества, элект- рический заряд	кулон	Кл, C	$\text{с} \cdot \text{А}$	$\text{А} \cdot \text{с}$
Электрический потенциал, ЭДС	вольт	В, V	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$	Вт/А
Электрическая емкость	фарада	Ф, F	$\text{кг}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$	Кл/В
Электрическое сопротивление	ом	Ом, Ω	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$	В/А
Электрическая проводимость	сименс	См, S	$\text{кг}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$	А/В
Магнитный поток	вебер	Вб, Wb	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$	$\text{В} \cdot \text{с}$
Магнитная индукция	тесла	Тл, T	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$	Вб/м ²
Индуктивность	генри	Гн, H	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$	Вб/А
Световой поток	люмен	лм, lm	—	кд · ср
Освещенность	люкс	лк, lx	—	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \times$ $\times \text{ср}$
Активность радиоактивного источника	беккерель	Бк, Bq	с^{-1}	—
Поглощенная доза излучения	грей	Гр, Gy	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	Дж/кг

Таблица П4

Физическая величина	Производная единица			
	наименование	символ: русский, международный	выражение через основные единицы	значение в единицах СИ
Плоский угол	радиан	рад, rad	$\text{см} \cdot \text{см}^{-1}$	—
Телесный угол	стерадиан	ср, sr	$\text{см}^2 \cdot \text{см}^{-2}$	—
Сила	дина	дин, din	$\text{см} \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$	10^{-5} Н
Энергия, работа, количество теплоты	эрг	эрг, erg	$\text{см}^2 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$	10^{-7} Дж
Динамическая вязкость	пуаз	П, P	$\frac{\text{см}^{-1} \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-1}}{1}$	$10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{с}$
Кинематическая вязкость	стокс	Ст, St	$\text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	$10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$
Ускорение свободного падения	гал	Галл, Gal	$\text{см} \cdot \text{с}^{-2}$	$10^{-2} \text{ м}/\text{с}^2$
Яркость	стильб	сб, sb	$\text{см}^{-2} \cdot \text{кд}$	$10^4 \text{ кд}/\text{м}^2$
Освещенность	фот	ф, ph	$\frac{\text{см}^{-2} \times}{\times \text{кд} \cdot \text{ср}}$	$\frac{10^4 \text{ кд} \times}{\times \text{ср}/\text{м}^2}$

Таблица П5

Физическая величина	Производная единица			
	наименование	символ: русский, международный	выражение через основные единицы	значение в единицах СИ
Магнитная индукция В*	гаусс	Гс, Gs	$\frac{\text{см}^{-1/2} \times}{\times \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}}$	10^{-4} Тл
Напряженность магнитного поля Н*	эрстед	Э, Oe	$\frac{\text{см}^{-1/2} \times}{\times \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}}$	$\frac{10^3 \text{ А}}{4\pi \text{ м}}$
Магнитный поток Ф*	максвелл	Мкс, Mx	$\frac{\text{см}^{3/2} \times}{\times \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}}$	10^{-8} Вб
Магнитодвижущая сила F _m *	гильберт	Гб, Gb	$\frac{\text{см}^{-1/2} \times}{\times \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}}$	$\frac{10}{4\pi} \text{ А}$
Индуктивность	сантиметр	см, cm	см	10^{-9} Гн
Электрическая емкость	сантиметр	см, cm	см	$\frac{10^9}{\text{с}^2} \text{ Ф}$

Таблица П6

Физическая величина	Производная единица	
	выражение через основные единицы	значение в единицах СИ
Электрический заряд	$\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{10}{c}$ Кл
Электрический дипольный момент	$\text{см}^{5/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{1}{10c}$ Кл · м
Электрическое смещение (индукция)	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{10^5}{4\pi c}$ Кл/м ²
Вектор поляризации (поляризованность)	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{10^5}{c}$ Кл/м ²
Поток электрического смещения	$\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$\frac{10}{4\pi c}$ Кл
Напряженность электрического поля	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$10^{-6}c$ В/м
Электрический потенциал, ЭДС, напряжение	$\text{см}^{1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	$10^{-8}c$ В
Сила электрического тока	$\text{см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-2}$	$\frac{10}{c}$ А
Электрическое сопротивление	$\text{см}^{-1} \cdot \text{с}$	$10^{-9}c^2$ Ом
Удельное электрическое сопротивление	С	$10^{-11}c^2$ Ом · м
Магнитный дипольный момент	$\text{см}^{5/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	10^{-8} А · м ²
Намагниченность	$\text{см}^{-1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	10^3 А/м
Магнитное сопротивление	см^{-1}	$\frac{10^9}{4\pi}$ А/Вб
Векторный потенциал	$\text{см}^{1/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}$	10^{-6} Тл · м

Таблица П7

Гауссова система СГС	СИ	Отношение
$\nabla \cdot \mathbf{D}^* = 4\pi\rho^*$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$D^*/D = (4\pi/\epsilon_0)^{1/2}$
$\nabla \cdot \mathbf{B}^* = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$B^*/B = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$
$c\nabla \times \mathbf{E}^* = -\partial\mathbf{B}^*/\partial t$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$	$E^*/E = (4\pi/\epsilon_0)^{1/2}$
$c\nabla \times \mathbf{H}^* = 4\pi\mathbf{j}^* + \partial\mathbf{D}^*/\partial t$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$	$H^*/H = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$

Продолжение таблицы

Гауссова система CGS	СИ	Отношение
$F = q^*(E^* + v \times B^*/c)$	$F = q(E + v \times B)$	$q^*/q = (4\pi/\epsilon_0)^{-1/2}$
$w = (E^* \cdot D^* + B^* \cdot H^*)/(8\pi)$	$w = (E \cdot D + B \cdot H)/2$	$\rho^*/\rho = (4\pi/\epsilon_0)^{-1/2}$
$S = (E^* \times H^*)/(4\pi)$	$S = E \times H$	$j^*/j = (4\pi/\epsilon_0)^{-1/2}$
$E^* = -\nabla\varphi^* - (1/c)\partial A^*/\partial t$	$E = -\nabla\varphi - \partial A/\partial t$	$I^*/I = (4\pi/\epsilon_0)^{-1/2}$
$B^* = \nabla \times A^*$	$B = \nabla \times A$	$\varphi^*/\varphi = (4\pi/\epsilon_0)^{1/2}$
$\epsilon E^* = D^*$	$\epsilon_0 \epsilon E = D$	$A^*/A = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$
$E^* = D^* - 4\pi P^*$	$\epsilon_0 E = D - P$	$P^*/P = (4\pi/\epsilon_0)^{1/2}$
$B^* = \mu H^*$	$B = \mu_0 \mu H$	$J^*/J = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$
$B^* = H^* + 4\pi J^*$	$B = \mu_0(H + J)$	$R^*/R = 4\pi\epsilon_0$
$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^*2}$	$a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$	$\sigma^*/\sigma = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$
$\hbar c R_\infty = \frac{e^*2}{2a_0}$	$\hbar c R_\infty = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$	$C^*/C = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$
$\mu_{B^*} = \frac{e^* \hbar}{2mc}$	$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$	$L^*/L = 4\pi/\mu_0$
$\gamma^* = g \left(\frac{e^*}{2mc} \right)$	$\gamma = g \left(\frac{e}{2m} e/2m \right)$	$\chi_a^*/\chi_e = \chi_m^*/\chi_m = \pi/4$
$\omega_{L^*} = \left(\frac{e^*2}{\hbar c} \right) B^*$	$\omega_L = \left(\frac{e^2}{2m} \right) B = \frac{\mu_B B}{\hbar}$	$e^*/e = (4\pi/\epsilon_0)^{-1/2}$
$\alpha = \frac{e^*2}{\hbar c}$	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$\mu_{B^*}/\mu_B = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$
$r_e = \frac{e^*2}{mc^2}$	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$	$\gamma_p^*/\gamma_p = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$

Таблица П8

Физическая величина	Производная единица СГС		
	наименование	символ: русский, международный	значение в единицах СИ
Длина	ангстрем	Å, Å	10^{-10} м
	ферми	Ф, fm	10^{-15} м
Площадь	барн	б, b	10^{-28} м ²
Давление	бар	бар,	10^6 Па
	торр	Торр	101325/760 Па
Количество теплоты	калория	кал, cal	4,184 Дж
Активность радиоактивного источника	кюри	Ки, Ci	$3,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$
Экспозиционная доза рентгеновских или гамма-лучей	рентген	R, R	$2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
Поглощенная доза излучения	рад	рад, rad	10^2 Дж/кг

II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

В таблицах П9 и П10 использованы значения фундаментальных физических постоянных, рекомендованных рабочей группой по фундаментальным постоянным при Комитете данных для науки и техники (CODATA; 1998) Международного совета научных организаций (ICSU) для использования в сфере научных и технологических разработок (см. УФН, 2003, т. 173, сс. 339—344.) Числа в круглых скобках указывают стандартную погрешность в последних цифрах значения величины, приведенного в таблицах.

Таблица П9

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
<i>Универсальные постоянные</i>			
Скорость света в вакууме	c	$299\,792\,458\text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$	(точно)
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} =$ $= 12,5663706144... \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{А}^{-2}$	(точно)
Электрическая постоянная	ϵ_0	$10^7/(4\pi c^2) =$ $= 8,854187817... \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$	(точно)
Характеристический импеданс вакуума	Z_0	$376,730313461... \text{ Ом}$	(точно)
Гравитационная постоянная	G $G/(\hbar c)$	$6,673(10) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ $6,707(10) \cdot 10^{-39} (\text{ГэВ}/c^2)^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$ $1,5 \cdot 10^{-8}$
Постоянная Планка	h	$6,62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $4,13566727(16) \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$	$7,8 \cdot 10^{-8}$ $3,9 \cdot 10^{-8}$
$\hbar/2\pi$	$\hbar$	$1,054571596(82) \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ $6,58211889(26) \text{ эВ} \cdot \text{с}$	$7,8 \cdot 10^{-8}$ $3,9 \cdot 10^{-8}$
Планковская масса $(\hbar c/G)^{1/2}$	m_P	$2,1767(16) \cdot 10^{-8} \text{ кг}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
Планковская длина $\hbar/m_P c$	l_P	$1,6160(12) \cdot 10^{-35} \text{ м}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
Планковское время l_P/c	t_P	$5,3906(40) \cdot 10^{-44} \text{ с}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
<i>Электромагнитные постоянные</i>			
Элементарный заряд	e $e/\hbar$	$1,602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ $2,417989491(95) \cdot 10^{14} \text{ А} \cdot \text{Дж}^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$ $3,9 \cdot 10^{-8}$
Квант магнитного потока $\hbar/(2e)$	Φ_0	$2,067833636(81) \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$
Квант проводимости $2e^2/\hbar$	G_0	$7,748091696(28) \cdot 10^{-5} \text{ См}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$
Постоянная Джозефсона $2e/\hbar$	K_J	$483597,898(19) \cdot 10^9 \text{ Гц} \cdot \text{В}^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$

Продолжение таблицы

Величина	Сим-вол	Значение	Относит. погрешность
<i>Электромагнитные постоянные</i>			
Постоянная Кландинга h/c^2	R_K	25812,807572(95) Ом	$3,7 \cdot 10^{-9}$
Магнетон Бора $eh/(2m_e)$	μ_B	$927,400899(37) \cdot 10^{-26}$ Дж·Тл ⁻¹ $5,788381749(43) \cdot 10^{-5}$ эВ·Тл ⁻¹	$4,0 \cdot 10^{-8}$ $7,3 \cdot 10^{-8}$
Ядерный магнетон $eh/(2m_p)$	μ_N	$5,05078317(20) \cdot 10^{-27}$ Дж·Тл ⁻¹ $3,152451238(24) \cdot 10^{-8}$ эВ·Тл ⁻¹	$4,0 \cdot 10^{-8}$ $7,6 \cdot 10^{-9}$
<i>Атомные и ядерные постоянные</i>			
Постоянная тонкой структуры	α	$7,297352533(27) \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$
Постоянная Ридберга $\alpha^2 m_e c/(2h)$	R_∞ $R_\infty c$ $R_\infty hc$	$10973731,568549(83) \text{ м}^{-1}$ $3,289841960368(25) \cdot 10^{15}$ Гц $2,17987190(17) \cdot 10^{-18}$ Дж $13,60569172(53)$ эВ	$7,6 \cdot 10^{-12}$ $7,6 \cdot 10^{-12}$ $7,8 \cdot 10^{-8}$ $3,9 \cdot 10^{-8}$
Радиус Бора $a/(4\pi R_\infty)$	a_0	$0,5291772083(19) \cdot 10^{-10}$ м	$3,7 \cdot 10^{-9}$
Квант циркуляции	$h/(2m_e)$	$3,636947516(27) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-9}$
<i>Электрослабое взаимодействие</i>			
Постоянная связи Ферми	$G_F/(\hbar c)^2$	$1,16639(1) \cdot 10^{-5}$ ГэВ ⁻²	$8,6 \cdot 10^{-6}$
Угол Вайнберга θ_W	$\sin^2 \theta_W$	0,2224(19)	$8,7 \cdot 10^{-3}$
<i>Электрон (e⁻)</i>			
Масса электрона	m_e	$9,10938188(72) \cdot 10^{-31}$ кг $5,485799110(12) \cdot 10^{-4}$ а.е.м.	$7,9 \cdot 10^{-8}$
энергетический эквивалент		$8,18710414(64) \cdot 10^{-14}$ Дж $0,510998902(21)$ МэВ	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Удельный заряд электрона	$-e/m_e$	$-1,758820174(71) \times 10^{11}$ Кл·кг ⁻¹	$4,0 \cdot 10^{-8}$

Продолжение таблицы

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
Электрон (e^-)			
Комптоновская длина волны электрона $h/(m_e c)$	λ_C	$2,426310215(18) \cdot 10^{-12}$ м	$7,3 \cdot 10^{-9}$
	λ_C	$386,1592642(29) \cdot 10^{-15}$ м	$7,3 \cdot 10^{-9}$
Классический радиус электрона $\alpha^2 a_0$	r_e	$2,817940285(31) \cdot 10^{-15}$ м	$1,1 \cdot 10^{-8}$
Магнитный момент электрона	μ_e	$-928,476362(37) \times$ $\times 10^{-26}$ Дж $\cdot$ Тл $^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$
	μ_e/μ_B	$-1,0011596521869(41)$	$4,0 \cdot 10^{-12}$
	μ_e/μ_N	$-1838,2819660(39)$	$2,1 \cdot 10^{-9}$
Электронный g -фактор $-2(1 + a_e)$	g_e	$-2,0023193043737(82)$	$4,1 \cdot 10^{-12}$
Гиромагнитное отношение для электрона $2 \mu_e /\hbar$	γ_e	$1,760859794(71) \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$ Тл $^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Мюон (μ^-)			
Масса мюона	m_μ	$1,88353109(16) \cdot 10^{-29}$ кг	$8,4 \cdot 10^{-8}$
		$0,1134289168(34)$ а.е.м.	$3,0 \cdot 10^{-8}$
энергетический эквивалент	$m_\mu c^2$	$1,69283332(14) \cdot 10^{11}$ Дж	$3,0 \cdot 10^{-8}$
		$105,6583568(52)$ МэВ	$4,9 \cdot 10^{-8}$
Комптоновская длина волны мюона $h/(m_\mu c)$	$\lambda_{C,\mu}$	$11,73444197(35) \cdot 10^{-16}$ м	$2,9 \cdot 10^{-8}$
	$\lambda_{C,\mu}$	$1,867594444(55) \cdot 10^{-15}$ м	$2,9 \cdot 10^{-8}$
Магнитный момент мюона	μ_μ	$-4,49044813(22) \times$ $\times 10^{-26}$ Дж $\cdot$ Тл $^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$
	μ_μ/μ_B	$-4,84197085(15) \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-8}$
	μ_μ/μ_N	$-8,89059770(27)$	$3,0 \cdot 10^{-8}$
Мюонный g -фактор $-2(1 + a_\mu)$	g_μ	$-2,0023318320(13)$	$6,4 \cdot 10^{-10}$

Продолжение таблицы

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
<i>Тау-частица (τ)</i>			
Масса тау-частицы	m_τ	$3,16788(52) \cdot 10^{-27}$ кг	$1,6 \cdot 10^{-4}$
энергетический эквивалент		1777,05(29) МэВ	$1,6 \cdot 10^{-4}$
Комптоновская длина волны тау-частицы	$\lambda_{C, \tau}$	$0,69770(11) \cdot 10^{-15}$ м	$1,6 \cdot 10^{-4}$
$\hbar/(m_\tau c)$	$\lambda_{C, \tau}$	$0,111042(18) \cdot 10^{-15}$ м	$1,6 \cdot 10^{-4}$
<i>Протон (p)</i>			
Масса протона	m_p	$1,67262158(13) \cdot 10^{-27}$ кг	$7,9 \cdot 10^{-8}$
энергетический эквивалент	$m_p c^2$	$1,00727646688(13)$ а.е.м. $1,50327731(12) \cdot 10^{-10}$ Дж 938,271998(38) МэВ	$1,3 \cdot 10^{-10}$ $7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$
Удельный заряд протона	e/m_p	$9,57883408(38) \cdot 10^7$ Кл · кг ⁻¹	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_{C, p}$	$1,3214098447(10) \cdot 10^{-15}$ м	$7,6 \cdot 10^{-9}$
$\hbar/(m_p c)$	$\lambda_{C, p}$	$0,2103069089(16) \cdot 10^{-15}$ м	$7,6 \cdot 10^{-9}$
Магнитный момент протона	μ_p	$1,410606633(58) \times 10^{-26}$ Дж · Тл ⁻¹	$4,1 \cdot 10^{-8}$
	μ_p/μ_B	$1,521032203(15) \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$
	μ_p/μ_N	2,792847337(29)	$1,0 \cdot 10^{-8}$
Протонный g-фактор $2\mu_p/\mu_N$	g_p	5,585694675(57)	$1,0 \cdot 10^{-8}$
Гиромагнитное отношение для протона $2\mu_p/\hbar$	γ_p	$2,67522212(11) \cdot 10^8$ с ⁻¹ · Тл ⁻¹	$4,1 \cdot 10^{-8}$
	$\gamma_p/(2\pi)$	42,5774825(18) МГц · Тл ⁻¹	$4,1 \cdot 10^{-8}$

Продолжение таблицы

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
<i>Нейтрон (n)</i>			
Масса нейтрона	m_n	$1,67492716(13) \cdot 10^{-27}$ кг $1,00866491578(55)$ а.е.м.	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $5,4 \cdot 10^{-10}$
энергетический эквивалент	$m_n c^2$	$1,50534946(12) \cdot 10^{-10}$ Дж 939,565330(38) МэВ	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$
Комптоновская длина волны нейтрона $h/(m_n c)$	$\lambda_{C, n}$	$1,319590898(10) \cdot 10^{-15}$ м	$7,6 \cdot 10^{-9}$
	$\lambda_{C, n}$	$0,2100194142(16) \cdot 10^{-15}$ м	$7,6 \cdot 10^{-9}$
Магнитный момент нейтрона	μ_n	$-0,96623640(23) \times$ $\times 10^{-26}$ Дж $\cdot$ Тл ⁻¹	$2,4 \cdot 10^{-7}$
	μ_n/μ_B	$-1,04187563(25) \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
	μ_n/μ_N	$-1,91304272(45)$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
Нейтронный g-фактор $2\mu_n/\mu_N$	g_n	$-3,82608545(90)$	$2,4 \cdot 10^{-7}$
Гиромангнитное отношение для нейтрона $2 \mu_n /\hbar$	γ_n	$1,83247188(44) \cdot 10^8$ с ⁻¹ $\cdot$ Тл ⁻¹	$2,4 \cdot 10^{-7}$
	$\gamma_n/(2\pi)$	$29,1646958(70)$ МГц $\cdot$ Тл ⁻¹	$2,4 \cdot 10^{-7}$
<i>Дейтрон (d = pn)</i>			
Масса дейтрона	m_d	$3,34358309(26) \cdot 10^{-27}$ кг $2,01355321271(35)$ а.е.м.	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $1,7 \cdot 10^{-10}$
энергетический эквивалент	$m_d c^2$	$3,00506262(24) \cdot 10^{-10}$ Дж 1875,612762(75) МэВ	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$
<i>Гелион (h = pnn)</i>			
Масса гелиона	m_h	$5,00641174(39) \cdot 10^{-27}$ кг $3,01493223469(86)$ а.е.м.	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $2,8 \cdot 10^{-10}$
энергетический эквивалент	$m_h c^2$	$4,49953848(35) \cdot 10^{-10}$ Дж 2808,39132(11) МэВ $\cdot$ м	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$

Окончание таблицы

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
<i>Альфа-частица ($\alpha = \text{ppn}$)</i>			
Масса альфа-частицы	m_α	$6,64465598(52) \cdot 10^{-27}$ кг $4,0015061747(10)$ а.е.м.	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $2,5 \cdot 10^{-10}$
энергетический эквивалент	$m_\alpha c^2$	$5,97191897(47) \cdot 10^{-10}$ Дж 3727,37904(15) МэВ	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$

Таблица П10

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
<i>Физико-химические постоянные</i>			
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02214199(47) \times 10^{23}$ моль $^{-1}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Атомная постоянная массы	m_u	$1,66053873(13) \cdot 10^{-27}$ кг	$7,9 \cdot 10^{-8}$
энергетический эквивалент	$m_u c^2$	$1,49241778(12) \cdot 10^{-10}$ Дж 931,494013(37) МэВ	$7,9 \cdot 10^{-8}$ $4,0 \cdot 10^{-8}$
Постоянная (число) Фарадея $N_A e$	F	96485,3415(39) Кл · моль $^{-1}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Универсальная газовая постоянная	R	$8,314472(15)$ Дж × моль $^{-1}$ · К $^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Постоянная Больцмана R/N_A	k	$1,3806503(24) \times 10^{-23}$ Дж · К $^{-1}$ $8,617342(15) \cdot 10^{-5}$ эВ · К $^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$ $1,7 \cdot 10^{-6}$
Объем моля идеального газа RT/p $T = 273,15$ К, $p = 101,325$ кПа $T = 273,15$ К, $p = 100$ кПа	V_m	$22,413996(39) \times 10^{-3}$ м 3 · моль $^{-1}$ $22,710981(40) \times 10^{-3}$ м 3 · моль $^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$ $1,7 \cdot 10^{-6}$

Окончание таблицы

Величина	Символ	Значение	Относит. погрешность
Физико-химические постоянные			
Число Лошмидта N_A/V_m	n_0	$2,6867775(47) \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Постоянная Стефана—Вольцмана $(\pi^2/60)k^4/(\hbar^3 c^2)$	σ	$5,670400(40) \times 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$	$7,0 \cdot 10^{-6}$
Первая радиационная постоянная $2\pi\hbar c^2$	c_1	$3,74177107(29) \times 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$	$7,8 \cdot 10^{-6}$
Вторая радиационная постоянная $\hbar c/k$	c_2	$1,4387752(25) \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Постоянная Вина $b = \lambda_{\text{max}} T$	b	$2,8977686(51) \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Принятые международные значения некоторых величин			
Молярная масса ^{12}C	$M(^{12}\text{C})$	$12 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$	(точно)
Молярная единица массы $M(^{12}\text{C})/12$	M_u	$1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$	(точно)
Постоянная Джоузефсона*	K_{J90}	$483597,9 \text{ ГГц} \cdot \text{В}^{-1}$	(точно)
Постоянная Клитцинга**	$R_K 90$	$25812,807 \text{ Ом}$	(точно)
Атмосфера (норм.)	P_0	101325 Па	(точно)
Стандартное ускорение свободного падения	g_n	$9,80665 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$	(точно)
* Это значение позволяет реализовать представление вольты на основе эффекта Джоузефсона.			
** Это значение позволяет реализовать представление ома на основе квантового эффекта Холла			

А

- Аберрации систем электронно-оптических 476
- — оптических 667
- Абсорбция 316
- Автоколебания 154
- Адиабата 185
- ударная (Гюгонно) 537, 581
- — в магнитной гидродинамике 537
- , уравнение дифференциальное 209
- Адроны 936, 957
- Адсорбция 316
- Аксиомы теории размерностей 345
- Активность 226
- адсорбата поверхностная 317
- вещества радиоактивного 873
- оптическая 697
- химическая 226
- Альфа-распад 871, 877
- Альфа-частица 877
- Амплитуда вероятности 952
- волны 559, 590
- — комплексная 561
- колебания 125, 136
- рассеяния 780, 930
- Анализ гармонический 128
- поляризации света 692
- рентгеноструктурный 647
- спектральный 646, 704
- Аналогия оптико-механическая 114
- Анастигмат 670
- Анизотропия оптическая 679
- Аннигиляция 954
- Антиферромагнетизм 498

Античастица 919

- Апертура интерференции 620
- объектива числовая 673
- Апланат 665, 669
- Апохромат 665, 672
- Ароматы кварковые и лептонные 932, 936
- Асимметрия зеркальная 979
- Ассоциация молекул 279
- Астигматизм 670
- Ахромат 667, 671

Б

- Барионы 937, 958
- Барьер потенциальный 771
- —, коэффициент прозрачности 774
- Бета-распад 879
- обратный 943
- Бетатрон 467
- Биеция 127
- Биспинор 923
- Бозон 256, 818
- голдстоуновский 974, 986
- калибровочный 932
- фундаментальный 930
- Бомба атомная 908
- водородная 910
- Боттомность (прелесть) 937

В

- Вакуум 243
- , основное состояние 951, 971, 987
- Валентность 829
- Вектор волновой 561
- плотности потока вероятности 755

- Вектор Пойнтинга 523, 591
 — системы сил главный 33
 — состояния 920
 — Умова 564
 — четырехмерный (4-вектор) 920, 949
 Беличина адсорбции 317
 — интенсивная 172
 — канонически сопряженная 117
 — парциальная мольная 217
 — физическая 345
 — экстенсивная 172, 216
 Беспротности плотность 248, 742
 — —, условие нормировки 248, 742
 Вероятность перехода 790
 — состояния системы 247, 742
 — — термодинамическая 269
 Вершина диаграммы Фейнмана 952
 Вес тела 49
 Вещество активное оптически 697
 — — — поверхностно 292
 — кристаллическое 301
 — растворенное 168, 297
 — термометрическое 169
 Взаимодействие гравитационное 940, 945
 — обменное 498
 — сильное 935, 940, 956
 — слабое 940, 974
 — спин-орбитальное 806
 — спин-решеточное 199, 815
 — спин-спиновое 199, 815
 — Ферми 974
 — фундаментальное 939
 — цветовое 935, 940, 956
 — электромагнитное 940
 — электрослабое 965, 982
 — Юкавы (ядерное) 941
 Вибратор (осциллятор) 129
 Видность полос интерференционных 621
 Виртуальность 920
 Влагосодержание пара 284
 Возгонка (сублимация) 224, 313, 316
 Возмущение малое в квантовой механике 790
 Волна акустическая 554
 Волна Альвена 583
 — бегущая 557
 — вторичная 628
 — де Бройля 742
 — инфразвуковая 575
 — магнитогидродинамическая 532
 — — — поверхностная 553
 — поперечная 553
 — продольная 553
 — — — плоская 557
 — — — синусоидальная 559
 — стоячая 569
 — сферическая 558
 — ударная в газах 580
 — ультразвуковая 575
 — упругая 553
 — — — в кристалле 310
 — цилиндрическая 562
 — электромагнитная 586
 — — — монохроматическая 588
 — — — отраженная 604
 — — — плоская 588
 — — — поляризованная линейно 590
 — — — — циркулярно 590
 — — — эллиптически 590
 — — — преломленная 605
 — — — сферическая 591
 Волны когерентные 616
 Волчок асимметричный 843
 — симметричный 843
 — сферический 843
 Восприимчивость диэлектрическая 381
 — —, связь с диэлектрической проницаемостью 385
 — —, формула Дебая—Ланжевена 382
 — магнитная 491
 — —, связь с магнитной проницаемостью 496
 Вращение молекулы внутреннее 843
 — плоскости поляризации 697
 — — — магнитное 698
 — свободное (инерционное) 86
 — — — стационарное 87
 Время жизни атома излучающего 597
 — — — изотопа радиоактивного 872

Время жизни состояния квантового 793

— — частицы 928

— — ядра 872, 899

— затухания колебания 137

— когерентности 618

— реверберации 575

— релаксации 171, 287

— — в жидкостях 288

— — — твердых телах 315

— собственное 543

Вырождение газа идеального 258

— — —, параметр 258

— — —, температура 259

— состояния 747

— уровней обменное 803

Высота пьезометрическая 339

— скоростная 339

Выход люминесценции квантовый 737

— — энергетический 739

— фотоэффекта квантовый 727

— реакции ядерной 897

Вязкость вторая (объемная) 335

— —, дисперсия 336

— газов 288

— динамическая (первая) 335

— жидкостей 290

— кинематическая 335

Гамильтониан частицы в поле свободной 758

— электрона в поле ядра атома 775

Гамма-излучение 872, 884

— —, конверсия внутренняя 885

Гамма-пространство 246

Гармоники 128, 576

Генератор Ван-де-Граафа 374

Гиперзаряд 937, 965

— слабый 982

Гиперон 957

Гипотеза эргодическая 247

Гирскоп 92

Гистерезис диэлектрический 388

— магнитный 502

— при циклических деформациях 157

Глюоны 932, 939

Гравитация 940, 945

Гравитон 947

Граница бета-спектра верхняя 882

— — фотоэффекта красная 727

График Кюри (график Ферми) 883

Громкость звука 576

Группа преобразований 917

— симметрий 917

Г

Газ Ван-дер-Ваальса 178

— вырожденный 258, 393

— идеальный 172

— квантовый 393

— разреженный 243

— реальный 277

—, сжижение 285

— электронный в металле 260, 393

— фотонный 259

Гамильтониан (функция Гамильтона) 103, 753

— ротатора 767

— частицы в поле центральных сил 758

— — — — электромагнитном 753

Д

Давление 168

— активное 225

— в капиллярах 294

— волны звуковой 568

— звуковое 564

— осмотическое 297

— парциальное 175

— поверхностное 293

— света 732

— статическое 339

Двигатель вечный второго рода 196

— — первого рода 181

Движение абсолютное 24

— броуновское 276

— —, формула Эйнштейна 276

— в поле кулоновском 775

- Движение в поле центральной силы 779
 — вращательное молекулы двухатомной 843
 — в системах неинерциальных 55
 — газа дозвуковое 349 —
 — — сверхзвуковое 349
 — жидкости безвихревое (потенциальное) 330
 — — вихревое 331
 — — в трубах 354
 — — вязкой ламинарное 352
 — — — турбулентное 352
 — — идеальной 334
 — — неустановившееся 330
 — — плоское 340
 — — установившееся 330
 — инфинитное 89
 — колебательное 124
 — молекулы двухатомной 841
 — относительное 24
 — переносное 24
 — плоское 9, 24, 340
 — прямолинейное 9
 — равномерное 13
 — равнопеременное 17
 — тела переменной массы 43
 — финитное 89
 — электрона в периодическом поле 785
 Действие (функция действия) 106
 — по Гамильтону 109
 — — Лагранжу 109
 Декремент затухания логарифмический 137
 Деление ядра 902
 Дельта-функция Дирака 250
 Десорбция 316
 Дефект квантовый 800
 — массы системы 548
 — — ядра 859
 Дефектоскопия ультразвуковая 579
 Деформация 318
 Диаграмма векторная колебания 126
 — весовая 965
 — кварковая 961
 Диаграмма ϵ — T 212
 — термодинамическая 172
 — Фейнмана 952
 Диамагнетизм 492
 — Ландау 493
 Диаметр молекул эффективный 236
 Диафрагма апертурная 663
 — поля зрения 664
 Динамика 6
 — релятивистская 546, 949
 Диоптрия 657
 Диполь магнитный 459
 — электрический 364
 — — жесткий 379
 — — индуцированный 379
 Дисперсия волн де Бройля 742
 — — электромагнитных 591, 699
 — — — аномальная 592, 700
 — — — нормальная 592, 700
 — вращательная 699
 — второй вязкости 336
 — прибора спектрального линейная 667
 — — — угловая 666
 — света 699
 — — аномальная 592, 700
 — — нормальная 592, 700
 — —, электронная теория 700
 Диссипация энергии 72
 Диссоциация молекулы 831
 — электролитическая 404
 Дисторсия 670
 Дифракция радиоволн 647
 — рентгеновских лучей 647
 — света 628
 — — в параллельных лучах (Фраунгофера) 636
 — —, метод расчета графический 631
 — — на многомерных структурах 644
 — —, обратная задача 647
 — — Френеля (сферических волн) 633
 Диффузия в газах 239
 Дихроизм (плехроизм) 690
 Длина волны 560
 — — де Бройля 742
 — — комптоновская частицы 921

- Закон Ома для плотности тока
 в электролите 407
 — — — участка цепи 400
 — отражения 565, 606
 — Паскаля 327
 — Папена 410
 — полного тока для магнети-
 ков 496
 — — — — — токов проводимос-
 ти 460
 — — — обобщенный 518
 — преломления (Снеллиуса)
 472, 565, 606
 — равномерного распределе-
 ния энергии по степеням
 свободы 253
 — распада радиоактивного 872
 — распределения молекул по
 скоростям 231
 — растворимости Генри 298
 — Рауля 298
 — Рэлея 712
 — сложения скоростей в меха-
 нике нерелятивистской 25
 — — — — — релятивистской
 544
 — смещения Вина 720
 — — Содди—Фаянса 874
 — соответственных состояний
 278
 — сохранения 121
 — — заряда барионного 916
 — — — лептонного 936
 — — — электрического 359,
 522, 915, 952
 — — импульса 42, 915
 — — — поля электромагнит-
 ного 524
 — — положения центра масс
 915
 — — потока магнитного 530
 — — массы 34
 — — момента импульса 85, 915
 — — — — —, связь со свойствами
 пространства 85, 914
 — — спина изотопического
 916
 — — странности 965
 — — циркуляции скорости
 340
 — — энергии 58, 915
 — — — механической 72
 Закон сохранения энергии,
 связь со свойством времени
 121
 — — — в электромагнитном
 поле 523
 — Стефана—Больцмана 260,
 719
 — термодинамики второй 197
 — — —, статистический смысл
 268
 — — первый 181
 — — третий 200, 230
 — трех вторых 447
 — тяготения всемирного 46
 — Фарадея—Максвелла 477
 — Фика второй 241
 — — первый 239
 — фотоэффекта внешнего 726
 — Шарля 173
 — эквивалентности для фото-
 химических реакций 734
 — электролиза второй 406
 — — объединенный (Фарадея)
 406
 — — первый 405
 Закономерности динамические
 246
 — статистические 246
 Законы сохранения, связь со
 свойствами пространства,
 85, 914
 Законы Вольты 429
 Замедлитель нейтронов 909
 Запрет интеркомбинационный
 для атомов 809
 — — — молекул 829
 Заряд барионный 937
 — гравитационный 947
 — лептонный 936
 — цветовой 937
 — электрический индуциро-
 ванный 375
 — — поляризационный (свя-
 занный) 363, 383
 — — свободный 363
 — — точечный 359
 — — удельный 466
 — — элементарный 359
 — — электрона эффективный 787
 — ядра в атоме 856
 Затухание аперриодическое 135

- Захват нейтрона радиацион-
ный 901
— электронный (Е-захват) 879
Защита электростатическая
375
Звук музыкальный 575
— слышимый 575
Зеркало плоское 650
— сферическое 653
— электронное 473
Значение переменной динами-
ческой среднее 748
— собственное оператора 746
— тока эффективное (дейст-
вующее) 512
— электродвижущей силы эф-
фективное (действующее)
512
Зона активная цепной реакции
907
— —, критические размеры
908
— Бриллюэна первая 786
— волновая 594
— Френеля 630
— энергетическая 394
— — валентная 789
— — запрещенная 786
— — проводимости 789
— — — в металле 394
— — разрешенная 786
Зрачки прибора оптического
663

И

- Излучатель ультразвука 577
Излучение 594
— антистоксово 738
— атома вынужденное 792
— — спонтанное 792
— Бавилова—Черенкова (че-
ренковское) 594, 603, 890
— волн
электромагнитных 594
— дипольное 596
— — магнитное 599
— — электрическое 596
— квадрупольное электриче-
ское 599
— магнитотормозное 602

- Излучение оптическое 594
— равновесное 715
— рентгеновское 594, 826
— стоксово 738
— тепловое 602
— тормозное 602
— черное 720
Изобара 185
Изобары ядерные 856
— —, пара 857
— —, триада 857
Изображение 649
— астигматическое 670
— действительное 649
— мнимое 650
—, освещенность 677
— перевернутое 654
— прямое 654
— стигматическое 649
—, яркость 677
Изомерия молекул 835
— ядер 860, 886
Изоморфизм 303
Изопроцесс в термодинамике
171
Изоспин 937, 962
—, проекция 937
— слабый 962
Изотерма 185
— газа реального 283
Изотоп 856
Изотропность пространства
123, 914
— —, связь с законом сохране-
ния момента импульса 124,
915
Изохора 185
Импульс обобщенный 100
— релятивистский 546
— Ферми 262
— четырехмерный (4-мерный)
920, 949
Импульс 4-вектор 920, 949
Инвариант Аббе нулевой 652
— релятивистский 539, 541,
548, 551, 920
— 4-импульс 920
Инвариантность 914, 916, 918
— калибровочная 950
Инверсия временная 917
— зарядовая 918
— пространственная 918

Индикатриса оптическая 660
 — рассеяния света 713
 Индуктивность контура 481
 — взаимная 485
 Индукция магнитная 450
 — электрическая (смещение электрическое) 366
 — электромагнитная 477
 — электростатическая 375
 Интеграл Бернулли 338
 — Бернулли—Эйлера 339
 — движения 103
 — Коши в гидродинамике 339
 — кулоновский атома гелия 804
 — — молекулы двухатомной 833
 — обменный атома гелия 804
 — — молекулы двухатомной 833
 — состояний (фазовый) 252
 — Фурье 129, 705
 Интенсивность вихря 332
 — волны звуковой 564
 — — электромагнитной 590
 — излучения электромагнитного 596
 — пучка частиц 779
 Интервал между событиями 52, 540
 Интерференция лучей поляризованных 694
 — света 622
 Ион 404, 796
 Ионизация кратность 408
 — потенциал 408
 — энергия (работа) 408
 Ионизация 407
 — диссоциативная 855
 — термическая 854
 — ударная (столкновительная) 408
 — ударом ионным 854
 — — электронным 854
 Искривление изображения 670
 Испарение жидкости 295
 — твердого тела 313
 Истинность (топность) 937
 Источник волн 553
 — света косинусный 677
 — — точечный 676

Источник тока фотоэлектрический 730
 — энергии в электрической цепи (ЭДС) 398

К

Кавитация 579
 Канал (мода) ядерной реакции 897
 Капилляр 294
 Катастрофа ультрафиолетовая 721
 Католюминесценция 736
 Каустика 668
 Квант действия 722
 Квантование вторичное 944
 — пространственное 805, 865
 Кварки 932, 934, 936
 Кинематика 6
 Кипение жидкости 295
 Класс симметрии 301
 Колебания 154
 — ангармонические 155
 — — в решетке 304
 — внутримолекулярные 841
 — вынужденные 129, 137
 — — электромагнитные 510
 — — недиссипативной системы 151, 158
 — затухающие 134, 149
 — изохронные 133
 — квазипериодические 129
 — крутильные 134, 323
 — магнитоstrictionные 504
 — малые 130
 — механические 124
 — модулированные 129
 — нелинейные 129
 — осциллятора кулевые 765
 — параметрические 155
 — периодические 125
 — поляризованные линейно 148
 — — циркулярно 148
 — — эллиптически 147
 — свободные 129, 509
 — — диссипативной системы 156
 — — консервативной системы 130, 155

- Колебания субгармонические 159
 — — электромагнитные 509
 — — незатухающие 509
 Колебательные системы автономные 154
 — — неавтономные 154
 Количество теплоты 58
 — — приведенное 198
 Коллайдер 470, 927, 931
 Кольца дифракционные 633
 — Ньютона 625
 Кома 669
 Коммутатор операторов 748
 Конвекция 343
 Конверсия внутренняя гамма излучения 885
 Конденсат вакуумный 987
 — в гелии II 299
 Конденсатор 377
 Конденсаторы, соединение 378
 Конденсация пара 284
 Конденсор 665
 Константа взаимодействия бегущая 956, 971
 — калибровочного 983
 — — сильного 971
 — — электромагнитного 776, 984
 — подобия 347
 — равновесия термодинамическая 227
 — связи, бегущая 956, 990
 — Ферми 975, 985
 Контур колебательный 507
 Конфайнмент кварков 938
 Конфигурация электронная 809
 Концентрация 297
 — лесовая 174
 — молярная 175
 — раствора эквивалентная 407
 Координаты нормальные 143
 — обобщенные 96, 179
 — — циклические 103
 Коэффициент бародиффузии 241
 — Ван-дер-Ваальса 178
 — виральный 279
 — восстановления при ударе 78
 — вязкости 288
 Коэффициент вязкости динамической 335
 — — кинематической 335
 — — магнитной 530
 — давления термический 212
 — — термодинамический 212
 — Джоуля—Томсона 210
 — диссоциации 405
 — диффузии 240, 277, 530
 — затухания колебаний 135, 508
 — ионизации 410
 — квазиупругой силы 131
 — конверсии внутренней 885
 — отражения в акустике 567
 — — в оптике 607
 — Пельтье 441
 — поглощения звука 574
 — — света линейный 709
 — — массовый 892
 — полезного действия термодинамический 191
 — прозрачности анализатора 692
 — — в акустике 568
 — — — оптике 607
 — Пуассона 319
 — размагничивания 497
 — размножения нейтронов 906
 — расширения изобарный 211
 — — объемный термический 173
 — — теплового твердых тел 304
 — — самодиффузии 240
 — сжимаемости термодинамический 211
 — скорости 357
 — сопротивления температурный 397
 — температуропроводности 306, 343
 — теплоотдачи 343
 — теплопередачи 307
 — теплопроводности 238, 307
 — — металлов электронный 309
 — термодиффузии 240
 — Томсона 445
 — трения внутреннего 239, 335
 — — истинный 55
 — — качания 55

Коэффициент трения обобщенный 149

- — скольжения 54
- упаковочный 859
- упругости 319
- холодильный 196
- Эйнштейна излучения вынужденного 793
- — спонтанного 793
- — поглощения 793
- экстинкции 715
- эмиссии электронной вторичной 449

Коэффициенты Фурье 704**Кратность вырождения 249, 251, 747, 777**

- ионизации 408

Кривая видности 675

- намагничивания техническая 501
- резонансная 139
- — контура 513
- — —, полуширина относительная 515
- Столетова 503
- сублимации 316

Кривизна 946**Кривизна 946****Кривизна 946****Кристалл 301**

- атомный (валентный) 302
- двоякопреломляющий 687
- двусный 681
- жидкий 286
- ионный 302
- металлический 301
- молекулярный 303
- немагнитный 680
- одноосный 681
- с водородной связью 303
- , симметрия 301

Кристаллизация 315**Кристаллохимия 303****Критерий Грасгофа 350**

- Нуссельта 350

— Пекле 350**— подобия 347****— Прайдтля 350****— Рэлея 672****Кружок рассеяния 667****Кручение 322****Л****Лавина 414****Лагранжиан (функция Лагранжа) 98, 924**

- заряженных токов 980

— взаимодействия слабого 979

- — фермиевского 975

- — цветового (КХД) 971

- — электромагнитного 951

- квантовой электродинамики (КЭД) 951

- — хромодинамики (КХД) 971, 973

- кварковый 962

- поля электромагнитного свободного 950

- — электрон-позитронного свободного 952

Лептоны 932

- классификация 936

Летучесть 225**Линза магнитная 474**

- оптическая 655

- электростатическая 473

Линия вихревая 332

- геодезическая 52, 946

- действия силы 32

- индукции магнитной 451

- каустическая 668

- комбинационная 851

- мировая 52, 540

- напряженности 362

- силовая электростатического поля 362

- спектральная 707

- —, уширение доплеровское 708

- —, — ударное 708

- —, — ширина 707

- —, — естественная 708

- тока 331

- удара 73

Лупа 664**Луч 560, 586**

- световой 648

- —, закон обратимости 649

- — необыкновенный 687

- — обыкновенный 687

- — сопряженный 650

Лучи каналовые 412
 — катодные 412
 — космические 929
 λ -переход в гелии 299
 Λ -раздвоение 845

М

Магнетики 490
 Магнетон Бора 489
 — ядерный 810, 863
 Магнитодизлектрик 480
 Магнитострикция 503
 Макросостояние термодинамической системы 269
 Масса 34
 — гравитационная 35
 — инертная 35
 — кварков 936
 — критическая вещества делящегося 908
 — молярная 169
 — Планка 948
 — покоя 547
 — приведенная 101
 — фотона 725, 988
 — электрона эффективная 420, 787
 Массообмен 167
 Матрица 761
 —, операции алгебраические 762
 — рассеяния (S-матрица) 930
 — самосопряженная (эрмитова) 762
 Матрицы Гелл—Манна 966
 — Дирака 923
 — Паули 923
 Маятник крутильный 134
 — математический 132
 — — двойной плоский 145
 — пружинный 132
 — — двойной 152
 — физический 133
 — —, длина приведенная 134
 —, центр качания 134
 — циклоидальный 132
 Маятники связанные 148
 Мезоны 861, 937, 959
 Мениск 292
 Метод аналогии 348

Метод векторных диаграмм 126
 — ВКВ (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна) 783
 — Гамильтона—Якоби 119
 — графический сложения вторичных волн 631
 — затемненного поля 674
 — квантования вторичного 944
 — Лагранжа в гидродинамике 328
 — моделирования 348
 — статистический 166
 — термодинамический 166
 — Томаса—Ферми 801
 — ускорения заряженных частиц 467, 470
 — Хартри—Фока 801
 — Эйлера в гидродинамике 329
 Механизм Хиггса 986
 Микроскоп 664
 Микроскопия ультрафиолетовая 673
 — электронная 477
 Микросостояние системы 256
 Множитель Ланде 813
 — Лоренца релятивистский 465
 Модель атома векторная 805
 — — статистическая 802
 — двухжидкостная 299
 — молекулы векторная 836
 — ядра капельная 866
 — — обобщенная (коллективная) 869
 — — оболочечная 867
 — — одноуклонная 863
 Модуль сдвига 321
 — упругости 818
 — — всесторонней объемной 320
 — Юнга 319
 Молекула атомная 831
 — ионная 829
 Молизация 405
 Молиия 414
 Момент гироскопический 94
 — дипольный электрический 364
 — — —, матричный элемент 792

Момент дипольный электрический постоянный 379
 — — — ядра 864
 — импульса гироскопа собственный 93
 — — точки (кинетический) 79
 — — электрона орбитальный 487
 — — — собственный (спин) 489
 — инерции тела 66, 74
 — — — главный 76
 — — — центральный 76
 — — центробежный 75
 — квадрупольный электрический ядра 864
 — крутящий 322
 — магнитный атома орбитальный 487
 — — электрона орбитальный 487
 — — — спиновой 490
 — силы 32
 — системы сил главный 83
 — трения 55
 Монокристалл 301
 Мостик Уитстона 403
 Мощность 61
 Мультиплет 957
 — адронный 961
 — зеемановский 812
 Мультиплетность термина спектрального 808
 — уровня энергетического 807
 Мультипольность гамма-излучения 885
 Мю-пространство 247

Н

Нагреватель 190
 Наклеп 320
 Намагниченность 453, 491
 —, насыщение 494, 502
 — остаточная 502
 — спонтанная в ферромагнетиках 498, 500
 Напор скоростной 339
 — температурный 343
 Направление намагничивания легчайшего 500

Направление намагничивания трудного 500
 Напряжение 318, 326, 399
 — в гидроаэростатике 326
 — зажигания разряда 409, 413
 — касательное 318
 — на участке цепи 399
 — нормальное 318
 — пробивное конденсатора 378
 Напряженность поля гравитационного 49
 — — магнитного 453
 — — — критическая в сверхпроводниках 505
 — — —, циркуляция 460
 — — массовых сил 325
 — — электрического 361
 — — —, циркуляция 368
 Нарушение симметрии спонтанное 973
 Насыщение ферромагнетиков техническое 501
 Натяжение поверхностное жидкости 291
 Невесомость 51
 Нейтрино 974
 Нейтрон 856, 904, 958
 Нейтронография 647
 Ненаблюдаемость (неизмеримость) 914
 Неравенство Клаузиуса 203
 Несохранение четности 979
 Нить вихревая 332
 Нуклид 857
 Нуклон 856, 967
 Нутация гироскопа 95

О

Обертон 576
 Область сиботаксическая 289
 Обмен виртуальный 950
 Оболочка нуклонная 868
 — электронная атома 796, 819
 Объектив оптического прибора 664
 Объем молекул собственный 277
 — молярный 169
 — парциальный 175
 — удельный 169

Однородность времени 121, 915
 — —, связь с законом сохранения энергии 122
 — пространства 122, 915
 — —, связь с законом сохранения импульса 128
 Окуляр 664
 Опалесценция критическая 285, 714
 Оператор 745
 — Гамильтона (гамильтониан) 753
 — — (набла) 68
 — Даламбера 556
 — импульса 749
 — координаты 748
 — Лапласа 51, 335
 — — для сферы 750
 — Лежандра 750
 — момента импульса 749
 — полевой 951
 — — рождения 951
 — — уничтожения 951
 — рассеяния 930
 — самосопреженный (эрмитов) 746
 — энергии 752
 Операторы коммутирующие 745
 Операция совмещения кристалла 301
 — четности (C-, P-, T-) 918
 Оптика просветленная 611
 — электронная 471
 — — геометрическая 471
 — —, законы подобия 475
 — —, связь со световой оптикой 471
 Орбита 89
 —, параметр 89
 —, эксцентриситет 89
 — электронная в атоме 799
 Ортоводород 846
 Ортосостояние атома гелия 805
 Ортотерм 846
 Освещенность 677
 Остов атомный 799
 Осциллятор 129
 — ангармонический 129
 — гармонический 129
 — — квантовомеханический 764

Ось вращения мгновенная 19
 — инерции тела главная 76
 — — — — центральная 76
 — оптическая кристалла 681
 — — линзы главная 655
 — — — — побочная 655
 — симметрии 301
 — — тела динамической 77
 Отверстие объектива относительное 664
 Отношение гиромагнитное нейтрона и протона 862
 — — электрона орбитальное 487
 — — — спиновое 490
 — термодиффузионное 240
 Отражение полное внутреннее звука 567
 — пространственное 301, 917
 — света диффузное 611
 — — зеркальное 606
 — — поверхностью сферической 651
 — — полное внутреннее 607
 — — с потерей полуволны 609
 Очарование 937

П

Падение свободно 48
 Пакет волновой 591
 Пар 277
 Пара вращения 29
 Параводород 846
 Парадокс Гиббса 202
 Парамагнетизм Паули 495
 Параметр волновой 634
 — вырождения 258
 — газа критический 279, 284
 — делимости ядра 903
 — состояния термодинамический 168
 Парасостояние атома галлия 805
 Паратерм 846
 Переменные Лагранжа 329
 — Эйлера 329
 Переход квантовый 789
 — — безызлучательный 829
 — —, вероятность 790
 — — дипольный электрический 809

- Переход квантовый запрещенный 794
 — фазовый 223
 — второго рода 224
 — первого рода 224
 — электронно-дырочный (p - n -переход) 437
 Перигелий 90
 Период волны 560
 — колебаний 125
 — затухающих 186
 — свободных электромагнитных 510
 — обращения тела 20
 — — частицы в магнитном поле 466
 — полураспада 872
 — — приведенный 883
 — решетки дифракционной 641
 — — кристаллической 302
 Пирометрия оптическая 723
 Пи-теорема (π -теорема) 346
 Плавление 224, 313
 Плазма 414
 Пластина в полволны 694
 — — целую волну 694
 — — четверть волны 613, 694
 — зонная 631
 — плоскопараллельная 650
 Плоскость кристалла главная 687
 — системы оптической 659
 — — — главная 659
 — — — кардинальная 661
 — — — сопряженная 654
 — — — узловая 661
 — — — фокальная 659
 — колебаний 555
 — поляризации 555
 — —, вращения 697
 — сдвига 321
 — симметрии 301
 Плотность вероятности 248
 — — обнаружения квантовой частицы 742
 — потока вероятности 755
 — — диффузионного 240
 — среды оптическая 606
 — тела 35
 — тепловой мощности тока 396
 Плотность тока 382
 — — поляризации 518
 — — смещения 518
 — —, 4-вектор 949
 — энергии поля магнитного 486
 — — — электрического 391
 Поверхность волновая 559
 — гидрофильная 293
 — гидрофобная 293
 — разрыва в гидродинамике 580
 — — — магнитной 534, 580
 — рассматривающая идеально 677
 — эквипотенциальная в электростатике 370
 Поворот изображения электронного 474
 — — —, разность хроматическая 476
 Поглощение акустических волн 573
 — гамма-лучей резонансное 887
 — лучей рентгеновских 828
 — света 709
 — — металлическое 615
 Подвижность дырки 420
 — иона в электролите 407
 — электрона проводимости 420
 Подсистема квазизамкнутая 250
 Показатель адиабаты 183
 — политропы 185
 — преломления абсолютный 605, 614
 — — — комплексный 605, 701
 — — — кристалла, главный 683
 — — — одноосного 685
 — — относительный 565, 606
 Поле гравитационное 49
 — —, напряженность 49
 — —, потенциал 50
 — — калибровочное 939
 — квантованное 951
 — магнитное 450
 — — внутреннее 495
 — —, действие на проводники с токами 458
 — — критическое 505
 — —, напряженность 453

- Поле магнитное, потенциал векторный 521
 — — размагничивающее 497
 — — сильное 813
 — — слабое 813
 — —, принцип суперпозиции 454
 — самосогласованное 785
 — сил 30
 — — массовых 325
 — скоростей жидкости 329
 — электрическое внутримолекулярное 836
 — — эффективное 383
 — — индуктированное 479
 — электромагнитное 361
 — —, уравнения Максвелла 515
 — электростатическое 361
 — —, действие на диэлектрики 378
 — —, напряженность 361
 — —, потенциал 369
 — —, принцип суперпозиции 362
 — —, условие потенциальности 368
 Поликристалл 301
 Полиморфизм 303
 Полином Лагерра 778
 — Лежандра 751
 — Эрмита 765
 Политропа 185
 Полосы интерференционные 624
 — —, видность 621
 — — равного наклона 626
 — — равной толщины 624
 Полупроводник 419
 Поляра ударная 585
 Поляризаторы 679
 — скрещенные 696
 Поляризация вакуума 955
 — волн 555
 — диэлектрика ионная 381
 — — ориентационная 380
 — спонтанная сегнетоэлектриков 388
 — — электронная 381
 — колебаний 148
 — света 678
 — — линейная 694
 Поляризация света круговая 694
 — — при отражении 611
 — — эллиптическая 694
 Поляризованность 381
 Поляризуемость 379
 Поляриметрия (сахариметрия) 698
 Порог осязания 576
 — слышимости 576
 — фотоэффекта 727
 — энергетический ядерной реакции 896
 Порядок ближний 286
 — дальний 301
 — максимума дифракции 687
 — — интерференции 620
 Постоянная (число) Авогадро 169
 — агармоничности 842
 — Больцмана 174, 251
 — Верде 699
 — взаимодействия гравитационного 46, 946
 — — сильного 971
 — — слабого 975, 985
 — — электромагнитного 776, 950
 — Вина 720
 — вращательная молекулы 844
 — газовая молярная (универсальная) 173
 — — удельная 174
 — гравитационная (Ньютона) 46, 946
 — Керра 691
 — Коттона—Мутона 692
 — Кюри 492
 — магнитная 452
 — Планка 722
 — распада 872
 — — парциальная 873
 — Ридберга 776, 796
 — Стефана—Больцмана 719
 — тонкой структуры 776, 950
 — Фарадея (число Фарадея) 406
 — Холла 427
 — экранирования 828
 — электрическая 360
 — эмиссионная 448

- Постулаты Бора 724
 Потенциал векторный 521
 --- Гиббса 172, 204
 --- системы гомогенной 220
 --- стандартный 229
 --- изобарно-изотропный 204
 --- изохорно-изотермический 172, 204
 --- изохорно-изотропный 204
 --- ионизации 408
 --- атома водородоподобного 798
 --- Ленард—Джонса 841
 --- Морзе 841
 --- обобщенный 102
 --- поля гравитационного 50
 --- — электромагнитного векторный 521, 948
 --- — — запаздывающий 522
 --- — — скалярный 369, 521
 --- — — четырехмерный (4-потенциал) 948
 --- — — электростатического 369
 --- сил массовых 326
 --- скорости 330
 --- термодинамический 204
 --- химический 217, 257
 --- электрохимический 429
 Потери на гистерезис 508
 --- энергии ионизационные 888
 --- радиационные 888
 Поток жидкости 332
 --- лучистый 675
 --- магнитный 461
 --- напряженности электрической 385
 --- самовиндукции контура 480
 --- смещения 366
 --- тепловой удельный 307
 --- энергии волны 564
 Потокосцепление контура 461, 478
 Правило буравчика (Максвелла) 451
 --- Дюлонга и Пти 312
 --- Кирхгофа 401, 463
 --- левой руки 451
 --- Ленца 478
 --- Максвелла для фазового перехода 285
 Правило отбора 794
 --- — для переходов дипольных электрических 809
 --- — — спектров молекул комбинационных 851
 --- правой руки 479
 --- Прево 716
 --- Стокса 738
 --- фаз Гиббса 170, 224
 Предел пропорциональности 319
 --- прочности 320
 --- текучести 320
 --- упругости 320
 Предиссоциация молекулы 852
 Превращение фазовое 228
 Представление волновой функции и операторов 759, 769
 --- вторичного квантования 951
 --- Дирака—Паули 924
 Предель (большая) 937
 Преломление поверхностью сферической 651
 Преобразование вращения 914
 --- Галилея 45
 --- инверсии времени и пространства 918
 --- калибровочное 521, 915, 949
 --- каноническое 115
 --- Лоренца координат и времени 542, 919
 --- — проекций импульса и полной энергии 549
 --- — поля электромагнитного 550
 --- — — —, инварианты 551
 Прецессия гироскопа 93—95
 --- ларморова 488
 Приближение адиабатическое 785, 794
 --- квазиклассическое 256, 783
 --- сильной связи 788
 --- Хартри—Фока 785
 Приборы спектральные 666
 Призма 651
 ---, преломляющий угол 651
 ---, угол отклонения 651
 Примесь акцепторная 425
 --- донорная 422
 Принцип автофазировки 469

Принцип вариационный 107
 -- Гюйгенса 628
 - Гюйгенса—Френеля 629
 -- Даламбера—Лагранжа 108
 -- инвариантности 914
 -- скорости света в вакууме 529
 -- Ле-Шателье 223
 -- Мопертюи—Лагранжа 113
 -- Мопертюи—Якоби 114
 -- наименьшего действия Гамильтона 110, 925
 -- недостижимости абсолютно-го нуля 230
 -- независимости действия сил 39
 -- неразличимости тождественных частиц 256
 -- Нернста 200, 230
 -- освобожденности 34
 -- отвердевания 235
 -- относительности Галилея 46
 -- — Эйнштейна 538
 -- Паули 257, 394, 819
 -- причинности в механике квантовой 753
 -- — — классической 105
 -- Ритца комбинационный 795
 -- симметрии 913
 -- соответствия 912
 -- суперпозиции 362, 558, 743
 -- Ферма 114, 648
 -- Франка—Кондона 794
 -- эквивалентности, 57, 948
 Пробег частицы 891
 Пробой газа электрический 409
 Проводимость жидкости 404
 -- металлов 393
 -- полупроводников 419, 422, 425
 Проводник 404
 -- идеальный 418
 -- в поле магнитном 458
 -- — — электростатическом 373
 Прозрачность барьера потенциального 774
 Производная ковариантная 983
 -- четырехмерная 849
 Проницаемость диэлектрическая относительная 360, 385, 387, 614, 681

Проницаемость магнитная относительная 453, 496
 Пропагатор 952
 Пространство гильбертово 915
 -- изотопическое 962
 -- катодное темное 410
 -- конфигурационное 105
 -- фазовое 105, 246, 247
 -- фарадеево темное 410
 -- четырехмерное 540
 Протон 856
 Прохождение частиц через вещество 887
 -- — — потенциальный барьер 771
 Процесс двухчастичный 926
 -- многочастичный 926
 -- намагничивания ферромагнетика 501
 -- термодинамический 171
 -- — адиабатный 171, 185, 199
 -- — изобарный 171, 185
 -- — изотермный 171, 185
 -- — изохорный 171, 185
 -- — изоспонтальный 178
 -- — изоспонтанный 199
 -- — крутовой 171, 190
 -- необратимый 186
 -- обратимый 186
 -- политропный 185
 -- равновесный 171
 -- эквивалентный 189
 Пульсация скорости 352
 Пути оптические тауохронные 622
 Пучность стоячей волны 570
 Пучок лучей гомоцентрический 649
 -- — параксиальный 475, 652
 -- сил 32

Р

Работа виртуальная 97
 -- выхода 428, 432, 726
 -- перемещения заряда 368
 -- проводника с током 463
 -- расширения 179
 Равенство Клаузиуса 198
 Равновесие адсорбционное 316
 -- жидкости, уравнение 326

- Равновесие системы термодинамической истинное 223
 — химическое 226
 Радиоактивность 870
 Радиоспектроскопия 854
 Радиус боровский 778
 — дебаевский экранирования 415
 — действия ядерных сил 861
 — инерции тела 75
 — кривизны траектории 9
 — электрона классический 731
 — ядра 858
 Разложение Фурье 785
 Размер зоны активной критической 908
 Размерность физической величины 344, 992
 Разность потенциалов 370
 — контактная 429
 — — — внешняя 431
 — — — внутренняя 430
 — увеличений хроматическая 671
 — фаз когерентных волн 623
 — хода волн 619, 623
 Разрывы в гидродинамике 580
 — — — магнитной 534
 Разряд газовый дуговой 414
 — — искровой 413
 — — кистевой 413
 — — коронный 412
 — — несамостоятельный 408
 — — самостоятельный 409
 — конденсатора апериодический 509
 Распад ядер 871
 Распределение Бозе—Эйнштейна 257
 — Больцмана равновесное 255, 785
 — Гаусса 271
 — Гиббса каноническое 250
 — — квантовое 251
 — — классическое 252
 — — микроканоническое 249
 — Максвелла (молекул по скоростям) 231
 — Максвелла—Больцмана 252, 254
 — — спектральное 705
 Распределение Ферми—Дирака 257
 Рассеяние волн звуковых 575
 — нейтронов 902
 — света 711
 — — комбинационное 850
 — — молекулярное 713
 — — рэлеевское 712
 — частиц 779, 896, 926
 Расстояние наилучшего зрения 664
 — равновесное монов в молекуле 831
 — фокусное тонкой линзы 656
 Раствор 168, 297
 Растяжение всестороннее 320
 — одностороннее (продольное) 319
 Расход массовый 354
 Расширение поперечное относительное 319
 — — — тепловое твердого тела 304
 — — — линейное 304
 — — — объемное 304
 Расщепление уровней атома 810
 — — — ядра 865
 Реактор ядерный 908
 Реакция распада 870, 926
 — связи 84
 — фотохимическая 734
 — ядерная 870, 895, 900
 — — деления 871, 902
 — — — цепная 906
 — — синтеза 904
 — — срыва 901
 Резонанс 139, 956
 — — барионный 961
 — — в цепи электрической 513
 — напряжений 513
 — токов 514
 — — гигантский фотоядерных реакций 902
 — — магнитный 814
 — мезонный 961
 — электронный парамагнитный 815
 — — ферромагнитный 816
 — ядерный квадрупольный 866
 — — — парамагнитный 865

Резонатор Гельмгольца (акустический) 572
 Рекомбинация электронов и ионов 411
 Релаксация в термодинамике 171
 — спин-решеточная 816, 865
 — спин-спиновая 816
 Рефракция атомная 703
 — молярная 386, 703
 — света 611
 — удельная 703
 Решетка дифракционная 626, 641
 — — пространственная 645
 — кристаллическая 301
 Ротатор 766
 Ротатор плоский 107
 — квантовый 766
 — —, гамильтонов 767
 Ряд Фурье 128, 704

С

Самовозбуждение жесткое 163
 — мягкое 163
 Самодиффузия 240
 Сверхпроводимость 504
 Сверхпроводник второго рода 506
 — первого рода 505
 Сверхтекучесть гелия 298
 Свет 594
 — естественный (неполяризованный) 678
 Светимость 678
 — пучка в ускорителе 929
 — энергетическая 717
 Светосила объектива 664
 Свечение отрицательное (тлеющее) 410
 Свобода асимптотическая 938, 972
 Связь атомная (гомеополярная) 302, 832
 — водородная 303
 — ионная (гетерополярная) 302
 — ковалентная 832
 — коэффициентов переноса взаимная 242

Связь металлическая 302
 — механическая 10
 — — голономная 12
 — — идеальная 97
 — — неголономная 12
 — — стационарная 11
 — рассел-саундеровская (нормальная, LS -связь) 806
 — сильная (jj -связь) 807
 — — в ядре 863
 — слабая 806
 — химическая 302, 829
 — — пи (π) 835
 — — сигма (σ) 835
 Сдвиг 321
 Сегнетоэлектрики 387
 Семейства радиоактивные 874
 Сенсibilизатор 735
 Серия спектральная атома 797
 — — Деландра, нулевая полоса 848
 Сечение газокинетическое эффективное 236
 — рассеяния звука 575
 — — томсоновское 894
 — — частиц 779, 928
 — — —, приближение Борна 781
 — реакции ядерной 898
 — соударения молекул 236
 Сжатие 319
 Сжижение газа 285
 Сжимаемость адиабатическая 212
 — изотермическая 211
 Сила Ампера 450
 — Ван-дер-Ваальса 280
 — внешняя 34
 — внутренняя 34
 — восстанавливающая 155
 — вынуждающая (возмущающая) 138
 — — полигармоническая 159
 — — приведенная 154
 — гироскопическая 64
 — действия магнитного поля 450
 — движущая 39
 — диссипативная 72
 — звука (интенсивность акустической волны) 564
 — инерции даламберова 56

- Сила инерции кориолисова 56
 — — переносная 56
 - индукции электродвижущая 477
 — квазиупругая 131
 — консервативная (потенциальная) 62
 — коэрцитивная 502
 — Лоренца 465
 - магнитодвижущая (намагничивающая) 462
 — массовая 325
 - межмолекулярная отталкивания и притяжения 280
 — непотенциальная 64
 — нестационарная 68
 — неупругого сопротивления приведенная 157
 — обобщенная 97
 — — непотенциальная 98
 — оптическая линзы 657
 — — — магнитной 474
 — — — электростатической 474
 — осциллятора 702
 - поверхностная 326
 — равнодействующая 31
 — разрешающая объектива 672
 реактивная 43
 — света средняя сферическая 676
 — точечного источника 676
 — сопротивления 351
 — сторонняя 398
 — термоэлектродвижущая (термо-ЭДС) 441
 — тяги ракеты 44
 — тяжести материальной точки 48
 — тела 48
 — ударная (мгновенная) 72
 — упругая 318
 физически однородная 167
 — химическая (химическая связь) 829
 — центральная 87
 — центостремительная 39
 — электродвижущая (ЭДС) 399
 — — взаимной индукции 484
 — — самоиндукции 482
- Сила электростатического взаимодействия 360
 — ядерная 861
 Символ Кронекера 791, 924
 Симметрия 301, 913
 — внутренняя 915
 — глобальная 917
 — , группа 914
 — изотопическая 962
 — киральная 973, 986
 — кристаллов 301
 — локальная 917
 Симплекс 345
 Синглет 964
 Синхротрон 470
 Синхрофазотрон 470
 Система автоколебательная 154
 — единиц физических величин 344, 992
 — линейная 129
 — механическая 10
 — — голономная 12
 — — диссипативная 72
 — — замкнутая (изолированная) 34, 58
 — — консервативная 65, 72
 — — свободная 10
 — — точек материальных 6
 — оптическая 659
 — — центрированная 659
 — — — идеальная 659
 — отсчета 6
 — — абсолютная 24
 — — гелиоцентрическая 30
 — — геоцентрическая 30
 — — инерциальная 29
 — — лабораторная (л-система) 6, 30, 780
 — — неинерциальная 30
 — — относительная 24
 — — подвижная при вращении 20
 — — центра инерции (с-система) 780
 — центра масс 780
 — сил сходящихся (пучок сил) 32
 — термодинамическая 167
 — — безвариантная 224
 — — гетерогенная 167
 — — однородная 167

- Система термодинамическая
двухвариантная 224
— — закрытая 167
— — замкнутая (изолированная) 167
— — необычная 199
— — с отрицательной температурой 199
— — одновариантная 224
— — открытая 167
— элементов периодическая (Менделеева) 819, 856
— эргодическая 247
— ядерных спинов 199
Скачок поглощения рентгеновского излучения 828
— уплотнения (поверхность разрыва) 580
Скин-эффект 483
Скобки Пуассона 120
— — квантовые 756
Скорость абсолютная 24
— волны групповая 592
— — де Бройля 742
— — звуковой 554
— — критическая 582
— — лучевая 682
— — необыкновенной 684
— — нормальная 682
— — обыкновенной 684
— — фазовая 554, 560
— — — главная 683
— космическая вторая (параболическая) 91
— — первая (круговая) 91
— критическая 357
— линейная 20
— мгновенная 12
— наиболее вероятная 234
— обобщенная 96
— относительная 25
— перекошенная 25
— поперечная (трансверсальная) 13
— радиальная 13
— света фазовая 587
— секторная 14
— средняя путевая 14
— — арифметическая 234
— — квадратичная 231, 234
— — относительная 236
Скорость средняя турбулентного движения 352
— угловая 19
— — гироскопа собственная 93
— четырехмерная (4-скорость) 949
Слой двойной электрический 429
— — p - n -перехода 438
— контактный 431, 432
— — запирающий 433
— пограничный 351
— половинного ослабления γ -излучения 893
— электронный 819
Смачивание 292
Смещение электрическое 366
Событие элементарное 52, 540
Сокращение лоренцево 544
Соленоид 457
Соотношение Коши 339
— неопределенностей Гейзенберга 744
— Томсона второе 441
— — первое 445
Сопло Лавала 357
Сопротивление излучения 598
— контура активное (омическое) 512
— — волновое 510
— — емкостное 512
— — индуктивное 512
— — полное (эффективное) 511
— магнитное 462
— среды волновое 558
— термическое 307
— электрическое удельное 395
— — участка цепи 399
— электролита удельное 407
Соприжение зарядовое 917
Сорбция 316
Состояние атома возбужденное 776
— — метастабильное 794
— — основное (нормальное) 776, 798
— молекулы гибридное 835
— — синглетное 834
— — триплетное 835
— начальное стандартное 225
— системы квантовой виртуальное 954

- Состояние системы квантовой
 вырожденное 747
 — — — метастабильное 794
 — — — основное (нормальное)
 776, 798
 — — —, разложение по орто-
 гональным состояниям 747
 — — — стационарное 795
 — классической вырожден-
 ное 249
 — — —, кратность вырож-
 дения 249
 — — — метастабильное 223,
 285,
 — — — термодинамической не-
 устойчивое 223
 — — — равновесное 168
 — — — устойчивое 223
 — сверхтекучее 224
 — ядра возбужденное 859
 — — основное 859
 Спектр амплитуд волны 561,
 704
 — атома водородоподобного
 775
 — интенсивностей 704
 — испускания 709
 — молекулы вращательно-ко-
 лебательный 849
 — — вращательный 844
 — — диффузный 851
 — — колебательный 842
 — — комбинационный 850
 — — сплошной (истинно непре-
 рывный) 851
 — — электронно-колебатель-
 ный 847
 — — электронный 836
 — поглощения 709
 — — линейчатый 710
 — — полосатый 710
 — — сплошной 710
 — рентгеновский 827
 — фаз начальных 704
 — частот волны 561
 — — колебания 128
 — энергетический атома гелия
 802
 — — дискретный 754
 — — осциллятора 764
 — — ротатора 767
 — — сплошной 754
 Спектр энергетический части-
 цы свободной 754
 — — электрона в периодиче-
 ском поле 786
 Спин изотопический 937, 962
 — —, закон сохранения 916
 Спинор 921
 Спираль Корню 632
 Спиральность 978
 Способность вращательная 697
 — излучательная интеграль-
 ная 717
 — — спектральная 716
 — поглощательная 716
 — разрешающая прибора оп-
 тического 672
 — — — спектрального 674
 Среда анизотропная оптически
 679
 — диспергирующая 591
 — линейная 559
 — мутная 712
 — — оптически неоднородная
 711
 — — сплошная 324
 Средний квадрат флуктуации
 случайной величины 270
 Сродство химическое 226
 Статика 6
 Статистика квантовая 256
 Степень диссоциации электро-
 литической 405
 — ионизации газа 855
 — — плазмы 416
 — когерентности 622
 — поляризации линейной 612,
 693
 — свободы термодинамиче-
 ская 224
 — черноты тела 718
 Столб разряда положительный
 410
 Странность 937, 965
 —, закон сохранения 965
 Страт положительного столба
 газового разряда 411
 Струйка 331
 Структура альфа-спектра тон-
 кая 878
 — — — линий спектральных тонкая
 808
 — — — сверхтонкая 810

Структура оптическая двумерная 644
 — — трехмерная 645
 — спектра вращательно-колебательного 849
 — — вращательного (линейчатая) 850
 — — колебательная (полосатая) 849
 Сужение поперечное относительное 319
 Сумма статистическая 251
 Суперпозиция колебаний 127
 Сухость пара 284
 Сфера действия молекулярного 282

Т

Текучесть жидкости 288
 Тело вращения 77
 — зеркальное 718
 — кристаллическое 301
 — неупругое 6
 — — абсолютно 6
 — рабочее 190
 — серое 717
 — твердое 5, 300
 — — абсолютно 5
 — —, зонная теория 789
 — упругое 6
 — черное абсолютно 716
 Тембр 576
 Температура 169
 — абсолютная 170
 — — отрицательная 199
 — вырождения газа 259
 — дебаевская (характеристическая) 312
 — инверсии 283
 — кипения 296
 — кристаллизации 315
 — критическая 284
 — Кюри сегнетоэлектриков 388
 — — ферромагнетиков 499
 — Нееля 499
 — перехода в сверхпроводящее состояние 504
 — плавления 313

Температура радиационная 723
 — статистическая 251
 — характеристическая вращения молекул 268
 — — колебания молекул 266
 — — кристалла 312
 — цветовая 723
 —, шкала Кельвина 170
 —, — Фаренгейта 170
 —, — Цельсия 170
 —, — эмпирическая 169
 — электронная плазмы 417
 — яркостная 724
 Тензор антисимметричный полностью 937
 — квадрупольного электрического момента 598
 — кривизны Римана 946
 — метрический 52
 — напряженности электромагнитного поля 949
 — Эйнштейна 946
 — энергии-импульса 941, 946
 Теорема Бабинье 637
 — Гаусса—Остроградского 367, 461
 — Гельмгольца о представлении векторного поля 555
 — — о сохранении вихревых линий 341
 — Гюйгенса—Штейнера 75
 — Карно 191
 — Кёнига 66
 — Ляпунова 488
 — Лиувилля 118
 — Людерса—Паули (CPT-теорема) 980
 — подобия 347
 — Пуассона 121
 — Стокса 331
 — Томсона в гидродинамике 340
 — Эренфеста 757
 Теория близкодействия 361, 516
 — возмущений 790, 952
 — Друде—Лоренца электронная 394
 — — зонная твердого тела 789
 — Лоренца электронная 524
 — Максвелла 515

- Теория относительности общая
 (Эйнштейна) 52, 946
 — — специальная 538, 919
 — размерностей 345
 — Таунсенда 410
 — ядерных сил обменная
 (Юкавы) 862, 944
 Теплостойкость 180
 — в изопроцессах 183, 188
 — газа 264
 — — вращательная 268
 — — колебательная 266
 — твердых тел 311
 Теплообмен конвективный 343
 — радиационный 715
 Теплоотдача 343
 Теплопроводность 238, 309
 — твердых тел 306
 — — решеточная 310
 — — — стационарная 307
 — — — электронная 309
 Теплота адсорбции физической
 317
 — испарения 225
 — парообразования удельная
 296
 — Пельтье 444
 — перехода фазового 224
 — — — удельная 225
 — — — плавления удельная 314
 — Томсона 445
 Терм атомный 797
 — —, мультиплетность 808
 — —, обозначения 809
 — —, структура тонкая 808
 — —, — сверхтонкая 808
 — молекулярный вращатель-
 ный 844
 — — колебательный 842
 — электронный молекулы 836
 Термодинамика, второй закон
 197
 —, основное соотношение 203
 —, основные уравнения 208
 —, первый закон 181
 —, третий закон 200, 230
 Термостат 250
 Ток адронный 974
 — кварковый 978
 — лептонный 974
 Ток фотоэлектрический 726
 — четырехмерный (4-ток) 949
 — электрический 392
 — — индукционный 477
 — — квазистационарный 598
 — — конвекционный 392
 — — проводимости 392
 — — постолный 392
 — — молекулярный 452
 — — насыщения 409, 448
 —, плотность 392
 — —, сила 392
 — — смещения 518
 — — флуктуационный 275
 Токи вихревые (Фуко) 480
 Тон звуковой 575
 Топность (истинность) 937
 Точка кипения 296
 — критическая 284
 — материальная 5
 — мировая 52, 540, 919
 — седловая электростатиче-
 ской линзы 473
 — системы оптической глав-
 ная 659
 — — — кардинальная 661
 — тройная 224
 — фазовая 106, 160
 — эвтектическая 316
 Траектория 8
 — фазовая 106
 Трансляция (сдвиг) 301
 Трение внешнее 53
 — — качения 53
 — — кинематическое 53
 — — покоя 53
 — — предельное 54
 — — скольжения 53
 — — — жидкостное 54
 — — — сухое 54
 — внутреннее (вязкость) 53
 Триада изобарная 857
 Триплет зеемановский нор-
 мальный 811
 — пи-мезонов 963
 Трубка вихревая 332
 — тока 331
 Трубы зрительные 665
 — —, телескопические систе-
 мы 665

У

Увеличение линзы линейное 658

— лупы 664

— микроскопа 665

— поверхности сферической 654

— прибора оптического 663

— системы оптической линей-
ное 660

— — — продольное 661

— — — угловое 660

— — — телескопической 665

Углы Эйлера 21

Угол апертурный 664

— Брюстера 610

— Вайнберга (слабого смешива-
ния) 982

— вращения чистого 21

— зрения 663

— Кабиббо 978

— краевой 292

— кручения относительный 322

— Маха (слабых возмущений) 586

— кутации 21, 93

— отражения 565, 606

— падения 565

— — критический (предель-
ный) 567, 607

— преломления 565, 606

— прецессии 21

— призм преломляющий 651

— проекции 664

— сдвига 321

— трения 54

Удар 72

Удлинение относительное 305,
319

Узел волны стоячей 570

— цепи электрической 401

Ультразвук 577

Упругость формы 286

Уравнение Бернулли 338

— Бернулли—Эйлера 339

— Ван-дер-Поля 165

— Вант-Гоффа 298

— вековое (характеристиче-
ское) 142

Уравнение волновое 555

— волновых нормалей Френе-
ля 682

— волны продольной 559

— — — плоской 557

— — — — — стоячей 569

— — — — — сферической 558, 561

— — — — — стоячей 570

— Гамильтона (каноническое) 105

— Гамильтона—Якоби 119

— Гельмгольца гальваниче-
ского элемента 208

— — — гармонической волны 559

— Гиббса 317

— гидростатики 327

— Даламбера (волновое) 521,
556

— движения жидкости вязкой 335

— — — — — идеальной 334

— — — квантовое для динамиче-
ских переменных 757

— — — свободного твердого тела 84

— — — точки кинематическое 7

— — — Эйлера для твердого тела 84

— динамики точки материаль-
ной 37

— — — поступательного движе-
ния твердого тела 40

— Дирака 923

— диффузии 241

— кинетической теории газов
основное 231

— Кирхгофа для тепловых эф-
фектов 184

— Клапейрона—Клаузиуса 225

— — — — — для твердых тел 314

— Клапейрона—Менделеева 174

— Клейна—Гордона—Фока 921

— колебаний гармонических 126

— — — электромагнитных 507,
511

— Лагранжа 925

— — — второго рода 100

Уравнение Лагранжа—Гельмгольца 654
 — Лапласа для функции тока 340
 — линии тока 331
 — Майера 183
 — Навье—Стокса 335
 — — — в магнитной гидродинамике 529
 — неразрывности в гидродинамике 382
 — — плотности вероятности 755
 — Ньютона для вязкости 238
 — подобия 347
 — Пуассона дифференциальное 51, 371
 — равновесия жидкости 326
 — связей 10
 — состояния Берто 278
 — — Ван-дер-Ваальса 277
 — — — приведенное 278
 — — Вукаловича и Новикова 279
 — — газа идеального 173
 — — — Бозе—Эйнштейна 260
 — — калорическое 171
 — — Майера 279
 — — термическое 170
 — Томаса—Ферми 802
 — траектории 8
 — — в осе-симметричных полях 475
 — установления колебаний квазилинейной системы 164
 — Фурье для теплопроводности 238
 — характеристическое колебаний затухающих 150
 — — — свободных 142
 — Циолковского 44
 — Шрёдингера 753
 — — в матричной форме 763
 — — для атома водородоподобного 775
 — — — гелия 802
 — — — многоэлектронного 800
 — — — колебаний молекулы 841

Уравнение Шрёдингера для молекулы водорода 832
 — — — осциллятора гармонического 764
 — — — частицы в потенциальной яме одномерной 768
 — — — стационарное 754
 — Эйлера динамическое 84
 — — движения идеальной жидкости 334
 — — кинематическое 21
 — Эйнштейна внешнего фотоэффекта 726
 — — теории относительности общей 946
 — энергии сжимаемой вязкой жидкости 341
 Уравнения Гамильтона канонические 109, 119
 — Гиббса—Гельмгольца 207
 — Гиббса—Дюгема 217
 — Даламбера 521
 — Коши—Римана 340
 — Лауэ 645
 — Максвелла 515, 520
 — — в четырехмерной форме 949
 — материальные 520
 — оптики электронной 475
 — термодинамики основные 208
 Уровень акцепторный (прилипания) 425
 — громкости звука 577
 — давления звукового 576
 — донорный 422
 — локальный 422
 — потенциала химического 433
 — Ферми 394, 432
 Ускорение абсолютное 26
 — вращательное 22
 — конвективное 330
 — кориолисово 26
 — линейное 22
 — локальное 330
 — мгновенное 15
 — нормальное 17
 — осестремительное 22
 — относительное 26
 — переносное 26
 — радиальное 16

Ускорение свободного падения 49

- среднее 17
- точки 15
- трансверсальное 16
- угловое 22

Ускоритель заряженных частиц 467, 926

Условие адиабатичности движения идеальной жидкости 342

- Вульфа—Брэгга 646
 - калибровки 521
 - — Кулона 521
 - — Лоренца 521
 - Лагранжа—Гельмгольца 654
 - нормировки 248
 - волновой функции 743
 - отсутствия конвекции 328
 - прилипания жидкости 338, 352
 - равновесия жидкости устойчивого 328
 - — термодинамической системы 222
 - синусов Аббе 669
 - скольжения жидкости 337
- Условия граничные для уравнений вязкой жидкости 338
- — — идеальной жидкости 337
 - — — Максвелла 520

Участок гидродинамической стабилизации 355

Уширение линий спектральных доплеровское 708

- — — ударное 708

Ф

Фаза волны 559

- — — начальная 559
 - колебания гармонического 125
 - — — начальная 125, 508
 - магнитная 500
 - — — рассеяния 781
 - термодинамическая 167
- Фазотрон 469

Фактор рассеяния атомный 782

- размагничивающий 497
- релятивистский (Лоренца, гамма-фактор) 465

Ферми-газ идеальный 257

Фермисон 257, 818

- фундаментальный 930

Феррит 480, 504

Ферромагнетик 498

- , гистерезис 502

- жесткий 503

- мягкий 503

- , насыщение техническое 501

- , процесс намагничивания 501

- , — перемангничивания 501

Фигуры Лиссажу 147

Физика высоких энергий 470

Флуктуации 269

- в приборах измерительных 273

- объема и плотности изотермические 271

- относительные 270

- , распределение Гаусса 271

- температуры изохорические 273

- электрические 275

Флюоресценция 736

Фокус орбиты 90

Фокусы поверхности сферической 652

- системы оптической 659

Фонон 310

Формула Бальмера—Ридберга 796

- барометрическая 255

- Больцмана для энтропии 269

- Борна 782

- Брейта—Вигнера 899

- Вульфа—Брэгга 646

- Вейцасккера 866

- Гелл-Манна—Нишиджимы 937

- Гопкинсонов 462

- Дебая—Ланжевена 382

- де Бройля 742

- Деландра 847

- Жювена 294

- Формула зеркала сферического 653
 - Кирхгофа 717
 - Клаузиуса—Мосотти 385, 703
 - Клейна—Нишины—Тамма 731, 893
 - Леангюра (закон трех вторых) 447
 - Лоренц—Лоренца 702
 - Найквиста 275
 - Ньютона для преломляющей сферической поверхности 653
 - Планка для излучения черного тела 260, 722
 - — — энергии осциллятора 722
 - Пуазейля 356
 - Резерфорда 783
 - Ричардсона—Дешмана 448
 - Рэлея—Джинса 721
 - Саха 855
 - стехиометрическая 227
 - Стокса для силы сопротивления 351
 - теории электрослабой 984
 - Томсона 510
 - Френеля для p -волны 608
 - — — s -волны 608
 - Шоттки 275
 - Эйлера — Фурье 128
 - Эйнштейна для среднего квадрата смещения частицы 276
 - — — интенсивности молекулярного рассеяния 714
 Фосфоресценция 736
 Фотоделение ядер 892
 Фотодиссоциация молекул 852
 Фотоионизация 725, 854
 Фотолюминесценция 735, 737
 Фотон 725
 - виртуальный 920
 - , масса 725
 - реальный 920
 Фотонейтрализация ионов 855
 Фотопроводимость 725
 Фоторасщепление дейтрона 902
 Фоторождение пиона 941
 Фотозлектрон 726
 Фотозлемент 730
 Фотозффект 725
 - вентильный 729
 - внешний 725
 - , красная граница 727
 - — , уравнение Эйнштейна 726
 - внутренний 725
 - выход квантовый 727
 - многофотонный 727
 - селективный 727
 - ядерный 902
 Фронт волны 559
 Функции ортогональные 747
 - собственные для атома гелия 803
 - — — осциллятора 765
 - — — частицы свободной 752
 - излучения теплового 260
 Функция Бриллюэна 494
 - возбуждения ядерной реакции 897
 - волновая 742, 920
 - — — антисимметричная 803
 - — — векторная 921
 - — — нормированная 743
 - — , представление в виде ряда 747
 - — — симметричная 256, 803
 - , свойства 753
 - — — скалярная 921
 - — — спинная 804
 - Гамильтона (гамильтониан) 103
 - — — главная 119
 - Грина (пропагатор) 952
 - действия (действие) 106, 924
 - диссипативная 137, 342, 530
 - Рэлея 102
 - Кирхгофа 717
 - Лагранжа (лагранжиан) 98, 924
 - Ланжевена классическая 382, 850
 - полевая 920, 951
 - производящая для канонического преобразования 115

- Функция распределения вероятностей 248
 — — Бозе—Эйнштейна 257, 258, 260
 — — Максвелла—Больцмана 258
 — — радиального в жидкостях 287
 — — Ферми—Дирака 257, 258, 263
 — распространения (пропагатор) 952
 — Рэлея диссипативная 102
 — силовая 63
 — собственная 746
 — состояния 171
 — сферическая 751
 — тока 340
 — характеристическая в термодинамике 203

Х

- Характеристика квазиупругая 155
 — металла оптическая 614
 — фотоэффекта спектральная 727
 Хемилюминесценция 736, 738
 —, механизм 738
 Хемосорбция 298
 Хитсон 989
 Холодильник 190
 Хромодинамика квантовая (КХД) 938

Ц

- Цвет (заряд цветовой) 937
 Центр волны 558
 — инерции (масс) 36
 — качания физического маятника 134
 — конденсации 284
 — кривизны траектории 9
 — кристаллизации 315
 — линзы оптической 655
 — приведения системы сил 33
 — примесный в полупроводнике 421

- Центр рассеивающий 779
 — силы 87
 — тяжести 48
 Цепочка превращений радиоактивных 873
 Цепь магнитная 461
 — электрическая 401
 Цикл Дизеля 193
 — Карно 191
 — — обобщенный 213
 — — обратимый 191, 213
 — Отто 193
 — предельный 162
 — термодинамический 190
 — — двигателей поршневых 193—195
 — — обратный 190
 — — прямой 190
 — термоэлектрический 905
 — Тринклера—Сабата 194
 Циклотрон 469
 Циркуляция напряженности поля магнитного 460
 — — — электрического 368
 — скорости 331
 — —, закон сохранения 340

Ч

- Чармоний 968
 Частица 912
 — векторная 921, 922
 — виртуальная 920, 954
 — заряженная 922
 — истинно нейтральная 919
 — реальная 922, 945
 — скалярная 921
 — спинорная 921
 — сплошной среды 324
 — странная 964
 — субъядерная 913
 — фундаментальная 912
 — элементарная 912
 Частота бисений 127
 — боровская 763, 791
 — волны 560
 — колебания 125
 — комбинационная 159
 — ларморовская 488, 528, 812
 — перехода боровская 791

Частота резонансная 139
 — — контура 513
 — собственная 131, 571
 Число Авогадро 169
 — волновое 559
 — Грасгофа 349
 — дебаевское 415
 — зарядовое 856
 — квантовое 764
 — — атома внутреннее 807
 — — — магнитное 807
 — — — орбитальное 807
 — — — спинное 807
 — — барионное 863, 937
 — — внутреннее, изоспин (изотопический спин) 937
 — — —, истинность (топность) 937
 — — —, очарование 937
 — — —, прелесть (боттомность) 937
 — — —, странность 937
 — — —, цвет 937
 — — — электрона 777
 — — вращательное 844
 — — главное (энергетическое) 776
 — — колебательное 842
 — — лептонное 936
 — — магнитное 777
 — — орбитальное 776, 806
 — — параболическое 817
 — — спинное 806
 — — — изотопическое 937, 962
 — Лопшидта 173
 — магическое ядра 868
 — массовое ядра 856
 — Маха 349
 — Нуссельта 349
 — Пекле 350
 — Прандтля 349
 — Рейнольдса 348
 — — критическое 353
 — — магнитное 530
 — — степеней свободы 96
 — Струхала 349
 — Фарадея 406
 — Фруда 349
 Чувствительность глаза спектральная 675

Ш

Ширина линии спектральной 707
 — — — естественная 708, 794
 — максимума дифракционного 642
 — полосы интерференционной 621
 — уровня 794
 — — ядра составного 898
 Шумы 575
 Шунт 402

Э

Эвтектика 316
 Эквивалент работы тепловой 183
 — тротильный 908
 — химический 406
 — электрохимический 405
 Экран дополнительный 636
 Экспозиция 677
 Электродинамика квантовая (КЭД) 950
 — классическая макроскопическая 615
 Электроемкость 376
 — взаимная 376
 Электролиз 404
 Электролит 404
 Электролюминесценция 736, 740
 —, механизм 737
 Электрон коллективизированный 788
 — оптический 700
 — отдачи 732
 — проводимости 393, 420
 —, заряд 420, 787
 —, масса эффективная 420, 787
 Электронография 647
 Электроотрицательность 830
 Электропроводность газа 407
 — удельная металла 395
 Элемент матричный гамильтониана 768
 — — — возмущения 791
 — — оператора 761

- Элемент матричный квантовой скобки Пуассона 763
 — периодической системы переходной 819
 — — — трансурановый 874
 — симметрии кристалла 301
 Эллипс рассеяния 670
 Эллипсоид волновых нормалей 680
 — индексов 680
 — инерции твердого тела 76
 Эмиссия автоэлектронная 448
 — термоэлектронная 409, 446
 — фотоэлектронная 409, 449, 725
 — электронная вторичная 449
 Энергия активации жидкости 288
 — волн акустических 562
 — внутренняя 172, 176
 — — газа Ван-дер-Ваальса 178
 — — смеси газов 222
 — Гельмгольца 204
 — Гиббса 204
 — деления ядра 903
 —, закон изменения и сохранения 58
 —, значение собственное 754
 — ионизации 408, 798
 — кинетическая 65
 — критическая 890
 — механическая 65
 — —, закон изменения 71
 — молекулы 264
 — нулевая колебаний молекулы 265, 842
 — — осциллятора 265, 765
 — поверхностная 291
 — — свободная 291
 — покоя 547,
 — полная релятивистская 547
 — поля магнитного 486
 — — электрического 391
 — — электромагнитного 487
 — потенциальная 67, 68, 69
 — — тела деформированного 320, 321, 323
 — проводника заряженного электрическая 389
 — реакции ядерной 896
 — свободная 172
 Энергия связи системы 548
 — — ядра атомного 858
 — — — удельная 859
 — — электрона в атоме 797
 — среды намагниченной 496
 — тока собственная 485
 — токов взаимная 486
 — Ферми 261
 — электрическая системы зарядов 389
 — — заряженного проводника 389
 Энтальпия 172, 178
 — смеси газовой 221
 Энтропия 172, 198
 — газа Ван-дер-Ваальса 202
 — — идеального 200
 — смеси газовой 201, 221
 — смещения 201
 — удельная 212
 —, формула Больцмана 269
 Эффект Баркгаузена 500
 — Джоуля — Томсона 282
 — Доплера для волн акустических 573
 — — — электромагнитных 552
 — Зеемана 810
 — — аномальный 810
 — — нормальный (простой) 810
 — — обратный 811
 — изотопический в спектрах молекулярных 849
 — — — сверхпроводниках 504
 — Керра 690
 — Кнудсена 245
 — Комптона 730
 — Коттона — Мутона 692
 — Мейснера 505
 — Мёссбауэра 887
 — механикакалорический 300
 — Ми 713
 — Оже 728, 829
 — Пашена — Бака 814
 — Пельтье 444
 — пьезоэлектрический 388
 — — обратный 388
 — тепловой процесса 183
 — — — стандартный 229
 — туннельный 774
 — — альфа-распада 878

Эффект Фарадея 699

— Холла 427

Штарка в атоме 817

— — — — — квадратичный 817

— — — — — линейный 817

Я

Явление гидратации 297

— застоя 54

— Зеебека 441

— индукции взаимной 484

— контактное в металлах 428

— — — полупроводниках 432

— осмоса 297

— переноса в газах 238

— самоиндукции 480

— сверхтекучести 299

термоэлектрическое 441

Явление Тиндалля 674, 712

— Томсона 445

— трения внутреннего (вязкости) 238

— эмиссионное в металлах 446

Ядро дочернее 872

—, изобара 856

—, изомер 860

— зеркальное 856

— магическое 868

— материнское 872

— отдачи 884

— составное 898

Яма потенциальная 768

Яркость 677

Ячейка фазового пространства
256

— элементарная кристалла
785

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.	3
----------------------	---

Раздел I

Физические основы классической механики

Глава 1. Кинематика материальной точки и абсолютно твердого тела	5
---	----------

1. Предварительные понятия.	5
2. Скорость точки.	12
3. Ускорение точки	15
4. Кинематика твердого тела	18
5. Абсолютное, относительное и переносное движения	24
6. Некоторые случаи сложения движений твердого тела	27

Глава 2. Динамика поступательного движения	29
---	-----------

1. Первый закон Ньютона	29
2. Сила	30
3. Масса тела	34
4. Второй закон Ньютона	37
5. Третий закон Ньютона	39
6. Закон изменения импульса	40
7. Закон сохранения импульса	42
8. Движение тела переменной массы	43
9. Механический принцип относительности	45
10. Закон всемирного тяготения	46
11. Гравитационное поле	49
12. Внешнее трение	53
13. Движение в неинерциальных системах отсчета	55

Глава 3. Работа и механическая энергия	58
---	-----------

1. Энергия	58
2. Работа	59

3. Потенциальные поля и силы. Силовая функция.	62
4. Механическая энергия.	65
5. Закон сохранения механической энергии	71
6. Удар	72
Г л а в а 4. Динамика вращательного движения	74
1. Момент инерции	74
2. Момент импульса.	79
3. Закон изменения момента импульса	82
4. Закон сохранения момента импульса	85
5. Движение под действием центральных сил	87
6. Гироскоп	92
Г л а в а 5. Основы аналитической механики . . .	96
1. Основные понятия и определения	96
2. Уравнения Лагранжа второго рода	100
3. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона.	103
4. Понятие о вариационных принципах механики.	107
5. Канонические преобразования	114
6. Законы сохранения	121
Г л а в а 6. Механические колебания	124
1. Основные понятия	124
2. Малые колебания системы, имеющей одну степень свободы.	130
3. Малые колебания системы с несколькими степенями свободы	140
4. Колебания нелинейной системы, имеющей одну степень свободы.	154

Р а з д е л II

Основы термодинамики и молекулярной физики

Г л а в а 1. Основные понятия	166
Г л а в а 2. Законы идеальных газов	172
1. Идеальные газы	172
2. Смеси идеальных газов	174
Г л а в а 3. Первый закон термодинамики	176
1. Внутренняя энергия и энтальпия	176
2. Работа и теплота	179

3. Теплоемкость	180
4. Первый закон термодинамики	181
5. Простейшие термодинамические процессы идеальных газов	185
Г л а в а 4. Второй и третий законы термодинамики	186
1. Обратимые и необратимые процессы	186
2. Круговые процессы (циклы). Цикл Карно	190
3. Второй закон термодинамики	196
4. Энтропия	198
5. Основное соотношение термодинамики	202
6. Характеристические функции и термодинамические потенциалы	203
7. Основные дифференциальные уравнения термодинамики	208
8. Диаграмма $s-T$	212
9. Многокомпонентные и многофазные системы. Условия термодинамического равновесия	216
10. Химическое равновесие	225
11. Третий закон термодинамики	229
Г л а в а 5. Кинетическая теория газов	231
1. Основное уравнение кинетической теории газов	231
2. Закон распределения молекул по скоростям	232
3. Средняя длина свободного пробега молекул	236
4. Явления переноса в газах	237
5. Свойства разреженных газов	243
Г л а в а 6. Элементы статистической физики	246
1. Введение	246
2. Вероятность состояния системы. Средние значения физических величин	247
3. Распределение Гиббса	249
4. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы	253
5. Распределение Максвелла—Больцмана	254
6. Квантовая статистика	256
7. Квантовые распределения Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака	256
8. Вырожденный газ	258
9. Теплоемкости одноатомных и двухатомных газов	264

10. Статистический смысл второго начала термодинамики	268
11. Флуктуации	269
12. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов	273
13. Электрические флуктуации в радиоаппаратуре	275
14. Броуновское движение	276
Глава 7. Реальные газы и пары	277
1. Уравнения состояния реальных газов	277
2. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах	280
3. Дросселирование газов. Эффект Джоуля—Томсона	282
4. Изотермы реальных газов. Пары. Критическое состояние вещества	283
5. Сжижение газов	285
Глава 8. Жидкости	286
1. Общие свойства и строение жидкостей	286
2. Свойства поверхностного слоя жидкости	290
3. Смачивание. Капиллярные явления	292
4. Испарение и кипение жидкостей	295
5. Свойства разбавленных растворов	297
6. Сверхтекучесть гелия	298
Глава 9. Кристаллические твердые тела	300
1. Общие свойства и строение твердых тел	300
2. Тепловое расширение твердых тел	304
3. Теплопроводность твердых тел	306
4. Теплоемкость твердых тел	311
5. Фазовые превращения твердых тел	313
6. Адсорбция	316
7. Упругие свойства твердых тел	318

Раздел III

Основы гидроаэромеханики

Глава 1. Гидроаэростатика	324
1. Введение	324
2. Гидроаэростатика	325
Глава 2. Кинематика жидкости и газа	328
1. Основные понятия	328
2. Уравнение неразрывности	332

Глава 3. Гидроаэродинамика	334
1. Уравнения движения идеальной и вязкой жидкостей	334
2. Уравнение энергии	341
3. Элементы теории размерностей и теории подобия	344
4. Движение тел в жидкости. Пограничный слой	350
5. Движение жидкостей в трубах	354

Раздел IV

Электричество и магнетизм

Глава 1. Электростатика	359
1. Основные понятия. Закон Кулона	359
2. Электрическое поле. Напряженность поля	361
3. Электрическое смещение. Теорема Гаусса—Остроградского для потока смещения	366
4. Потенциал электростатического поля	367
5. Проводники в электростатическом поле	373
6. Емкость	376
7. Диэлектрики в электрическом поле	378
8. Сегнетоэлектрики. Пьезоэлектрический эффект	387
9. Энергия заряженного проводника и электрического поля	389
Глава 2. Постоянный электрический ток в металлах	392
1. Основные понятия и определения	392
2. Электронная теория проводимости	393
3. Законы постоянного тока	397
4. Правило Кирхгофа	401
Глава 3. Электрический ток в жидкостях и газах	404
1. Проводимость жидкостей. Электролитическая диссоциация	404
2. Законы электролиза	405
3. Дискретность электрического заряда	406
4. Закон Ома для тока в жидкостях	407

5. Электропроводность газов	407
6. Несамостоятельный газовый разряд	408
7. Самостоятельный газовый разряд	409
8. Понятие о плазме	414
Г л а в а 4. Электрический ток	
в полупроводниках	419
1. Собственная проводимость полупроводников	419
2. Примесная проводимость полупроводников	421
3. Явление Холла в металлах и полупроводниках	427
Г л а в а 5. Контактные, термоэлектрические и эмиссионные явления	428
1. Контактные явления в металлах. Законы Вольты	428
2. Контактные явления в полупроводниках	432
3. Термоэлектрические явления в металлах и полупроводниках	440
4. Эмиссионные явления в металлах	446
Г л а в а 6. Магнитное поле постоянного тока	450
1. Магнитное поле. Закон Ампера	450
2. Закон Био—Савара—Лапласа	451
3. Простейшие магнитные поля токов	454
4. Действие магнитного поля на проводники с токами. Взаимодействие проводников	458
5. Закон полного тока. Магнитные цепи	460
6. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле	463
Г л а в а 7. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	464
1. Сила Лоренца	464
2. Удельный заряд частиц. Масс-спектрография	466
3. Ускорители заряженных частиц	467
4. Основы электронной оптики	471
Г л а в а 8. Электромагнитная индукция	477
1. Основной закон электромагнитной индукции	477
2. Вихревые индукционные токи	480
3. Явление самоиндукции	480

4. Взаимная индукция	484
5. Энергия магнитного поля электрического тока	485
Г л а в а 9. Магнитные свойства вещества	487
1. Магнитные моменты электронов и атомов	487
2. Классификация магнетиков	490
3. Диамагнетизм	492
4. Парамагнетизм	493
5. Магнитное поле в магнетиках	495
6. Ферромагнетизм	498
7. Сверхпроводимость	504
Г л а в а 10. Электромагнитные колебания	507
1. Колебательный контур.	507
2. Вынужденные электромагнитные колебания	510
Г л а в а 11. Основы электродинамики неподвижных сред	515
1. Общая характеристика теории Максвелла	515
2. Первое уравнение Максвелла.	517
3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла.	517
4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	519
5. Решение уравнений Максвелла методом запаздывающих потенциалов (при $\epsilon, \mu = \text{const}$)	521
6. Законы сохранения в электромагнитном поле.	522
7. Основные положения электромагнитной теории. Система уравнений Лоренца	524
8. Усреднение уравнений микрополя	525
Г л а в а 12. Основы магнитной гидродинамики	527
1. Уравнение магнитной гидродинамики	527
2. Магнитогидродинамические волны.	531
3. Разрывы и ударные волны.	534
Г л а в а 13. Основы специальной теории относительности	538
1. Принцип относительности Эйнштейна	538
2. Интервал	540
3. Преобразования Лоренца и их следствия	542
4. Преобразования скорости и ускорения	544

5. Релятивистская динамика	546
6. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля	550
7. Эффект Доплера для электромагнитных волн	552

Раздел V

Волновые процессы

Глава 1. Основы акустики	553
1. Введение	553
2. Скорость распространения звуковых волн (скорость звука)	554
3. Волновое уравнение	555
4. Продольные синусоидальные волны	559
5. Энергия акустических волн	562
6. Отражение и преломление продольных акустических волн (в отсутствие дифракционных явлений)	565
7. Стоячие волны	569
8. Эффект Доплера в акустике	573
9. Поглощение и рассеяние звуковых волн	573
10. Элементы физиологической акустики	575
11. Ультразвук	577
12. Ударные волны в газах	580
Глава 2. Электромагнитные волны	586
1. Общая характеристика	586
2. Излучение электромагнитных волн в вакууме	594
Глава 3. Прохождение света через границу двух сред	603
1. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом	603
2. Отражение и преломление света диэлектриками	605
3. Поляризация света при отражении и преломлении	611
4. Основы металлооптики	613
Глава 4. Интерференция света	616
1. Когерентные волны	616
2. Интерференция в тонких пленках	622
3. Интерференция многих волн	626

Г л а в а 5. Дифракция света	628
1. Принцип Гюйгенса—Френеля	628
2. Графическое сложение амплитуд вторичных волн	631
3. Дифракция Френеля	633
4. Дифракция Фраунгофера	636
5. Дифракционные явления на многомерных структурах	644
6. Дифракция радиоволн	647
Г л а в а 6. Геометрическая оптика	648
1. Основные положения	648
2. Плоское зеркало. Плоскопараллельная пластинка. Призма	650
3. Преломление и отражение на сферической поверхности	651
4. Тонкие линзы	655
5. Центрированные оптические системы	659
6. Основные оптические приборы	662
7. Погрешности оптических систем	667
8. Разрешающая способность оптических приборов	672
9. Основы фотометрии	675
Г л а в а 7. Поляризация света	678
1. Способы получения поляризованного света	678
2. Элементы кристаллооптики	680
3. Двойное лучепреломление	686
4. Искусственное двойное лучепреломление	690
5. Анализ поляризованного света. Эллиптическая и круговая поляризация света	692
6. Интерференция поляризованных лучей	694
7. Вращение плоскости поляризации	697
Г л а в а 8. Молекулярная оптика	699
1. Дисперсия света	699
2. Спектральный анализ	704
3. Поглощение света	709
4. Рассеяние света	711
Г л а в а 9. Тепловое излучение	715
1. Тепловое излучение	715
2. Законы излучения черного тела	719
3. Понятие об оптической пирометрии	723

Г л а в а 10. Действия света	725
1. Фотоэлектрический эффект	725
2. Эффект Комптона	730
3. Давление света	732
4. Химические действия света	734

Г л а в а 11. Люминесценция	735
1. Классификация процессов люминесценции и их протекание	735
2. Закономерности люминесценции	738

Р а з д е л VI

Основы квантовой механики и атомной физики

Г л а в а 1. Введение в нерелятивистскую квантовую механику	741
1. Волновая функция	741
2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	743
3. Линейные самосопряженные операторы	745
4. Операторы динамических переменных	747
5. Уравнение Шредингера	753
6. Уравнения движения и законы сохранения	755
7. Основы теории представлений	759

Г л а в а 2. Простейшие задачи нерелятивистской квантовой механики	764
1. Гармонический осциллятор	764
2. Ротатор	766
3. Одномерная прямоугольная потенциальная яма	768
4. Трехмерная прямоугольная потенциальная яма	770
5. Потенциальный барьер	771
6. Движение электрона в центральном кулоновском поле ядра атома (водородоподобные ионы)	775
7. Рассеяние частиц в центральном поле сил	779
8. Квазиклассическое приближение	783
9. Движение электрона в периодическом поле	785
10. Квантовые переходы	789

Глава 3. Атом	796
1. Атомы и ионы с одним валентным электроном	798
2. Многоэлектронные атомы	800
3. Векторная модель атома	805
4. Эффект Зеемана и явления резонанса	810
5. Эффект Штарка в водородоподобных системах	817
6. Принцип Паули. Периодическая система элементов	818
7. Рентгеновское излучение	826
Глава 4. Молекула	829
1. Ионные молекулы	829
2. Атомные молекулы	831
3. Электронные спектры молекул	836
4. Колебательные спектры молекул	841
5. Вращательные спектры молекул	843
6. Электронно-колебательные спектры молекул	847
7. Вращательно-колебательные спектры молекул	849
8. Комбинационные спектры молекул	850
9. Сплошные и диффузные спектры молекул	851
10. Молекулярная спектроскопия	853
11. Ионизация атомов и молекул	854

Раздел VII

Основы ядерной физики и физики элементарных частиц

Глава 1. Атомное ядро	856
1. Состав и размеры атомных ядер	856
2. Энергия связи ядер. Ядерные силы	858
3. Магнитные и электрические свойства ядер	862
4. Модели ядра	866
Глава 2. Радиоактивность	870
1. Основные понятия	870
2. Альфа-распад	877
3. Бета-распад	879
4. Гамма-излучение	884
5. Прохождение заряженных частиц и гамма-излучения через вещество	887

Г л а в а 3. Ядерные реакции	895
1. Основные понятия	895
2. Общая классификация ядерных реакций	900
3. Физические основы ядерной энергетики	905
Г л а в а 4. Элементарные частицы	912
1. Принципы теории	912
2. Фундаментальные частицы и взаимодействия	925
3. Гравитация. Квантовая электродинамика	945
4. Сильное (цветное) взаимодействие	956
5. Слабое взаимодействие	974
6. Электрослабое взаимодействие	982
ПРИЛОЖЕНИЯ	992
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	1011

ДЛЯ ЗАМЕТОК

[illegible]

Справочное издание

**Яворский Борис Михайлович
Детлаф Андрей Антонович
Лебедев Андрей Константинович**

**СПРАВОЧНИК по ФИЗИКЕ
для инженеров и студентов вузов**

**Редактор Е. С. Гридасова
Младшие редакторы О. А. Фёдорова, К. А. Каширина
Корректоры М. Б. Козинцева, В. Г. Овсянникова
Технический редактор Л. Б. Чуева**

Оригинал-макет подготовлен ООО «Бета-Фрейм»

**Подписано в печать с готовых диапозитивов заказчика 20.10.05.
Формат 76×100¹/32. Печать офсетная. Усл. печ. л. 46,20.
Тираж 7000 экз. Заказ 2940.**

**Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература**

**ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 110-02-50.
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru**

**ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru**

**Издание осуществлено при техническом содействии
ООО «Издательство АСТ»**

**Издано при участии ООО «Харвест».
Лицензия № 02330/0056935 от 30.04.04
РБ, 220013, Минск, ул. Кульман, д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.**

**Республиканское унитарное предприятие
«Издательство «Белорусский Дом печати»
220013, Минск, пр. Независимости 79.**

